



EXAMEN MARITIMO
Theórico Práctico,
ó
TRATADO DE MECHANICA
aplicado á la
CONSTRUCCION,
CONOCIMIENTO Y MANEJO DE LOS NAVIOS
y demas Embarcaciones.

Por D. JORGE JUAN,

Comendador de Aliaga en la Orden de San Juan, Xefe de Esquadra de la Real Armada, Capitan de la Compañía de Guardias Marinas, de la Real Sociedad de Londres, y de la Academia Real de Berlin.



TOMO PRIMERO.

EN MADRID:
En la Imprenta de D. Francisco Manuel de Mena, Calle de las Carretas.

M.DCC.LXXI.
Con permiso Superior.

AL REY N. SEÑOR.

SEÑOR.

LA obligacion con que nace un Vasallo es de producir quantas utilidades dependan de él en beneficio de su Rey y de su Patria. Las que se comprehenden en estos dos Tomos son las que puedo ofrecer á los pies de V. M.: y será mi mayor gloria saber, si, como las juzgo tales, logran la dicha de serlo.

N. Señor guarde la importante vida de V. M. los muchos años que necesita la Monarquía.

SEÑOR.
A los Pies de V.M.
su mas humilde y fiel Vasallo

Jorge Juan.

Qui descendunt mare in navibus: facientes operationem in aquis multis.
Ipsi viderunt opera Domini, & mirabilia ejus in profundo. Ps. 106.

PROLOGO.

LA instruccion del Marinero, si exceptuamos los cortos principios en que se funda el Pilotage, se ha considerado, hasta muy poco tiempo ha, de pura práctica. La fábrica del Navío, y otras Embarcaciones, y sus maniobras, que es el modo de manejarlas, ha estado siempre en manos de unos casi meros Carpinteros, y de otros puramente Trabajadores ú Operarios: ninguna dependencia se creyó que tubiesen de la Mathemática, sin embargo de no ser el todo sino pura Mechânica: Ciencia, quizas, la mas dificil y mas intrincada del mundo; pero qué mucho? En el Marinero, todo ocupado al riesgo, al trabajo y á la fatiga, no cabe quietud para estudio tan dilatado y prolixo; y el estudioso, que requiere suma tranquilidad para la contemplacion, no se acomoda al afan y fatiga extrema del otro, únicas maestras que enseñan con facilidad las resultas que por solo theórica fuera casi imposible descubrir. La dificultad de unir estas dos partes, en que consiste perfeccionar estudio tan manifiestamente útil, le tubo por consiguiente en tinieblas tantos siglos hace; pero como en el presente han florecido con admiracion las Mathemáticas, y se han introducido con beneficio singular en casi todas las Ciencias y Artes, era irregular que no hubiera logrado del mismo la Marinería, ó á lo menos, que no se diese principio á la necesaria perfeccion para que con él se cultivase progresivamente. En el año de 1673 ya nos habia dado el *P. Pardies*

su

su Tratado de Stática, ó Ciencia de las fuerzas movientes, y en él, por via de exemplo, una instancia ú demonstracion del camino que debe seguir la Nave, impelida por un viento lateral. Era ya un índice que pudo haber servido de guía para dilatarse mas en materia tan abundante; pero sin embargo, no vimos estenderla, hasta que el año 1689 nos dió el *Cavallero Renau* un tomo en octavo intitulado, *De la Theorie de la Manœuvre des Vaisseaux.* Seguia este el primer paso del *P. Pardies*: ambos convenian en que el camino directo que hace la Nave, disminuye de aquel que hiciera si por todas partes rompiera el agua con la misma facilidad, en la razon del radio al seno del ángulo que forma la Vela con la Quilla: y el lateral en la compuesta del radio al coseno, y de la resistencia del Costado á la de la Proa; pero por desgracia el *Cavallero* convenia en que las resistencias eran como los quadrados de las velocidades de los fluidos, y como los quadrados de los senos con que inciden sobre las superficies: principio que entonces, y hasta ahora, ha sido admitido casi sin la menor repugnancia de los mas célebres Geómetras. Esto bastó para que el célebre Holandes *Christiano Hugenio* manifestase en la Bibliotheca universal é historica (año 1693) las contradicciones en que habia incurrido el *Cavallero*: hizole ver, que segun sus principios, las velocidades directas del Navío debian ser mucho mayores, y que el ángulo ventajoso que asignaba á las Velas para ganar á barlovento, no era el que legitimamente se deducia. El *Cavallero* defendia su opinion (*Diario de los Sabios* 1695) fundado en la in-

innegable regla de la descomposicion de fuerzas; á cuyos argumentos no satisfacia *Hugenio*: lo que produxo alternativamente varias réplicas de una y otra parte, sin que jamas se llegase á la conclusion, ni al desengaño de alguna de ellas. Cesó, sin embargo, la controversia, y quando, por este motivo, se creyó mas seguro el *Cavallero*, se vió un escrito en las *Actas de los Eruditos de Leipsic* del mes de Julio de 1696, dado por *Jacobo Bernoulli*, Profesor de Mathemáticas en *Groningue*, en que, sin embargo de alguna modificacion, admitia la opinion de *Hugenio*; pero apartandose de este en no considerar la velocidad del viento como infinita, respecto á la del Navío: error en que habian incurrido los otros dos; y por tanto las resultas se hacian en parte distintas. El *Cavallero* se conmovió á este segundo ataque, y le obligó á dar á luz un Libro intitulado *Memoire ou est demonstré un principe de la Mechanique des liqueurs, dont on s'est servi dans la Theorie de la Manœuvre des Vaisseaux, & que à esté contesté par M. Hughens*; pero se reduxo á sostener su proposicion sobre la descomposicion del movimiento, sin satisfacer al cargo que le hacia *Hugenio*. *Juan Bernoulli*, hermano de *Jacobo*, y tambien Profesor de Mathemáticas en *Basiléa*, se arrimó primero á la opinion del *Cavallero*; pero estando despues mejor informado, dió la razon á *Hugenio*, y al Público, en 1714, un Libro intitulado, *Essai d'une novelle theorie de la manœuvre des Vaisseaux*, que remitió primero á la censura de la Academia Real de las Ciencias de *Paris*. La mucha y sublime Geometría del Autor hizo que estendiese

sus cálculos á mucho mas de lo que hasta entonces se habia visto: la disputa entre el *Cavallero* y *Hugenio* quedó decidida al dictamen general de los inteligentes; porque no solo se declaró á favor de las velocidades que este habia hallado, sino que añadida por el Autor una curva que las terminaba, le hizo decir, que *elle decide par consequent la controverse en sa faveur, contre la pretension de M. Renau. Juan Bernoulli* no quiso, sin embargo, limitar las velocidades del viento, como con muy fundada reflexion lo habia hecho su hermano: y por tanto, aun con toda la decision no pudo determinar las de las Naves con la misma justificacion; atendió, no obstante, á la obliquidad con que el viento hiere la Vela, lo que su hermano omitió: y exâminando la equacion dada por *Hugenio*, para hallar el ángulo que debe formar el viento con aquella, dado el que forma la Vela con la Quilla, para ganar lo mas que fuere posible á barlovento, no solo concluye la misma fórmula, sino que trata como de misterio el haber omitido *Hugenio* sus cálculos. Prosiguió despues buscando para lo mismo el ángulo que debe formar la Vela con la Quilla, dado el que forma la Vela con el viento: y hallado, trata de deducir el mas ventajoso de aquellos, con el mas ventajoso de estos; pues como para cada ángulo de Quilla y Vela que se tome, hay uno de Vela y viento ventajoso, se puede buscar el caso en que ambos sean ventajosos, y que darán el máxîmo andar. Resuelve con la misma destreza esta qüestion; pero asi esta, como todas las demas, baxo el supuesto de que sea la velocidad del viento in-

infinita y nula la deriva : ambas suposiciones bien apartadas de lo que realmente sucede en la práctica. Los tres deduxeron sus cálculos supuesta la Nave un rectángulo , cuyos lados menores se consideren como la Proa y la Popa ; pero *Juan Bernoulli* se estendió á suponerla formada de un rombo , romboyde, y de segmentos circulares : porque habiendo notado que todo el cálculo dependia de las resistencias supuestas , y estas de la figura ó cuerpo de la Nave , le pareció necesaria esta atencion, é hizo cargo á *Huguenio* de haber consentido en que sería cierta la deriva que asignó el *Cavallero* , quando las resistencias de los fluidos fueran como las simples velocidades , y no como los quadrados. Se ocupó con esto á exâminar las varias resistencias , particularmente de los segmentos circulares ; y llamó exe de ellas á la línea que divide en dos partes iguales los exfuerzos de las aguas en toda la longitud de la Embarcacion desde Proa á Popa : lo que dió motivo para discurrir , que puesto el palo de la Embarcacion en dicha línea , la fuerza de la Vela se opondría directamente á la de las aguas , y se lograría un perfecto govierno : idea que pareció al Autor tan meritoria , como que por ella dixo , *Je m' etonne que ni M. Renau , ni M. Huguens, n' ayent point songe à cette question , qui paroit pourtant assez essentielle à la theorie de la manœuvre des Vaisseaux*. En efecto , esta y todas las demas determinaciones que produxo , hubieran sido de la mayor utilidad , á haber acompañado alguna práctica á la mucha Geometría que poseía.

Con Obra tan prolixa como perfectamente calcu-

lada, pues, á mas de lo dicho, se estendia á exâminar la curvidad de las Velas, sus fuerzas, y el exe donde estas pueden suponerse reunidas, que llamó *Línea de la fuerza motriz*, parecia que ya debian haberse concluido las controversias; pero con todo, el *Cavallero Renau* no quiso darse por vencido: replicó de nuevo, fundado en su descomposicion de fuerzas, y arguyó de modo, que, sin embargo de la sublime Geometría de *Bernoulli*, no pudo satisfacer este sino con decir, que no era lo propio la descomposicion de movimientos, quando se hacian en los fluidos, que quando se hacian en el vacuo. Estos absurdos se siguen de principios ciegamente concevidos; pero en fin el *Cavallero* calló, mas por prudencia, ó por el respeto debido á la autoridad de *Bernoulli*, que por quedar convencido.

Mientras duraron estos debates, *Mr. Parent*, de la Real Academia de las Ciencias de *París*, dió al Público (año 1713) su Obra intitulada, *Essais & recherches de Mathematiques & de Physique*, donde (Tom.2. pag.741.) se encuentra esta proposicion, *De la situacion, route & vitesse de une figure plane quelconque tiree dans un fluide.* Los principios sobre que fundó su cálculo fueron los mismos que los que usó *Jacobo Bernoulli*; pero con todo, por falta de atender á otros de Mechânica muy precisos, no logró las mismas resultas que este célebre Autor.

Salió asimismo en el propio tiempo (año 1697) otra Obra en folio mas difusa, que dió el *P. Pablo Hoste*, Profesor de Mathemáticas en el Seminario

Real de *Tolon*, intitulada *Theorie de la construccion des Vaisseaux*, que por seguir á otra que la precede y acompaña, intitulada *L'art des armées navales*, célebremente admitida de la Marinería, es muy conocida de esta: y por tanto no podiamos dexar al silencio su mérito. El *Padre* se esfuerza en ella á persuadir que las resistencias de los fluidos sobre las superficies que chocan, no son sino como las simples velocidades, y como los simples senos de los ángulos de incidencia: y aunque este es el primer error que algunos Geómetras le reprehenden, ya se verá en el discurso de esta Obra, que no es tanto el perjuicio que de él se origina, como la falta de principios sólidos de Mechânica en que tropieza, ya en las resistencias, como en la theórica del aguante de Vela del Navio, cabezadas y demas acciones de este: pudieramos citar vários pasages, pero fuera dilatarnos sin fruto, bastando lo dicho para que el Lector sepa el mérito que debe darle.

Despues de las citadas Obras no se vieron por algun tiempo sino algunas de mera práctica: ninguna razon fundamental precedia sus reglas, y solo un prudente juicio, pero sin cultivo, era el que enmendaba ó corregia, cayendo muchas veces en errores mas perjudiciales. La sublime theórica de los *Bernoullis*, poco ó nada adaptable á la práctica, no produxo sino la Obra que el año 1731 dió á luz *M.Pitot*, de la Academia Real de las Ciencias de *Paris*, con el título *La theorie de la manœuvre des Vaisseaux reduite en practique*: en efecto, sujetó á las reglas dadas en aquella theórica, las repite, y

da tablas de los ángulos que deben formar las Velas; pero, á mas de los tropiezos theóricos que en esta Obra se reconocerán, *M. Pitot* carecia enteramente de práctica, lo que le hizo juzgar á arbitrio de las operaciones del Mar y de los Marineros, atribuyendoles hechos que jamas se han visto.

Quatro años antes ya *M. Bouguer*, entonces Hydrógrapho en *Havre de Gracia*, nos habia dado un Escrito que mereció el premio de la Academia Real de *París*, año 1727, intitulado, *De la mature des Vaisseaux*. Esta Obra, en que florece muy particularmente la Geometría, concluye con reglas nada conformes con los deseos del Autor, é imposibles de practicarse. Sus ideas fueron poder aplicar á los Navios Velas sumamente mayores de las que llevan, á fin de aumentar su marcha, sin riesgo de que padezcan grandes inclinaciones; pero, por desgracia, este beneficio no se consigue sino en el único caso de ir á Popa: en lo demas, aun el mismo Autor reconoce la imposibilidad, y por tanto quiere que se baxen y ensanchen las Velas de dos á dos y media veces la medida que hoy tienen. Por esta práctica, las Velas y las Vergas estubieran continuamente anegadas debaxo del agua, puesto que aun en el estado que hoy se hallan, se ve alguna vez: y á mas de otros inconvenientes que se tocarían en el modo de sujetarlas y orientarlas, se verá en el discurso de esta Obra, que fuera casi, sino enteramente, imposible el que governase el Navío con semejante aparejo: consideracion que no previno el Autor, sin embargo de su mucha ciencia y perspicacia: estos son unos hechos que se descubren con

al-

alguna práctica, y que se dificultan sin ella.

En la célebre Obra intitulada, *A Treatise of fluxions*, que el año 1742 dió á luz el gran Geómetra *Colin Mac Laurin*, Profesor de Mathemáticas en la Universidad de *Edimburgo*, y Miembro de la *Real Sociedad de Londres*, se halla (Tom. 2. §.922.) resuelto tambien el problema sobre los ángulos que deben formar las Velas con la Quilla y con el viento: la solucion es como del gran Maestro que la produxo: conviene con la dada por *Juan Bernoulli*; pero los principios en que se funda son, que la velocidad del viento es infinita, respecto á la del Navío, y la deriva nula, asi como lo supuso este: sin ello, y sin los falsos supuestos de las resistencias, como se verá despues, hubieramos tenido la perfecta solucion que sobre el asunto se deseaba.

Todas estas Obras se reducen, sin embargo, á un limitado número de proposiciones sueltas: faltaba la recopilacion de todas ellas, la correccion de las erradas, y la adiccion de muchas que aun no se habian ofrecido. Esta Obra quedó para *M. Bouguer*, el mismo que en el año 1727 nos dió la *Mature des Vaisseaux*, pues en 1746 publicó su segunda Obra de Marina intitulada, *Traitè du Navire, de sa construccion & de ses mouvemens*: su extension, el particular como prolixo exâmen de la diversidad de asuntos que en ella se tratan, y el acierto de las soluciones geómetricas, casi reducidas al alcance de los principiantes, le dieron el honor que merecia en toda la Europa: lo cierto es, que á haber concurrido en tan digno Autor la prác-

tica

tica necesaria para descubrir los errores que resultan de los falsos supuestos theóricos, nada nos hubiera quedado que apetecer: su eficacia é incesante tarea era preciso que hubieran producido una Obra completa. No nos detendremos en citar lo que en ella será siempre especial, ni lo que evidentemente se demuestra defectuoso, porque en el discurso de esta Obra se citan los pasages mas notables, omitiendo, por no dilatarnos, los de menor momento.

Ultimamente (año 1749) *Leonardo Eulero*, Director de la Real Academia de *Berlín*, nos dió dos Tomos en quarto con el título de *Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus*. El especial orden y sublime Geometria con que trata todos los asuntos tan gran Maestro, es digno de admiracion: hubiera sido un tesoro de la Ciencia, y particularmente de la Marina, si á semejante destreza hubiera acompañado la práctica que igualmente deseabamos en *M. Bouguer*; pero en fin sus soluciones sirven de guia para todo lo nuevo que se pueda proponer y ofrecer, que no es poco beneficio. Despues de estas, se han visto algunas pequeñas Obras mas, ya de práctica, ya de theórica; pero podemos asegurar, que lo que no se encuentra en estos dos célebres Autores, no es lo principal de lo que se ofrece en la theórica de la Marina.

Estos han sido los documentos que nos han servido de Norte en lo científico de la Marinería: la práctica por otro lado no es menos maestra, particularmente si, despues de bien exàminada y despejada de los accidentes que puedan hacerla variar,

no se conforma con la theórica. En este caso, no hay Científico que no crea, que algun supuesto falso precedió á esta: es preciso buscarle y corregirle, porque la práctica no es distinta de theórica: si no concuerdan, alguna de las dos está viciada. De este tenor se encuentran algunos casos de los mas principales del estudio del Marinero, sin embargo del cuidado de los Maestros que lo cultivaron; no por falta de la ciencia, sino de la confrontacion con la práctica. Una de las primeras, y aun mas importantes dudas que se me presentaron en mis combinaciones fue sobre el andar del Navío. Segun la theórica (*a*) no puede tomar, aun suponiendole de los mas veleros, mas velocidad que la $\frac{100}{336}$ de la que tubiere el viento, y esto navegando con todo el velamen, y á Popa, ó viento largo, cuyos dos casos parecen indiferentes para el Autor (*b*). La velocidad del viento es quando mas, segun *M. Mariote*, (*Traite du mouvement des eaux*, part. 1. disc. 3.) de 24 pies por segundo, porque dice, *c'est la vitesse ordinaire des vents incommodes, & contre les quels on a paine d'aller*, repitiendo lo mismo *M. Clare*, de la Sociedad Real de *Londres*, en su *Movimiento de los fluidos*, pag. 261: y será precisamente el viento que pueda suportar con mucha dificultad todo el Velamen, segun las experiencias que yo mismo he practicado, por las quales he quedado convencido de que, corriendo el viento de 18 á 20 pies, ya se ven los Navíos, yendo

á

(*a*) *M. Bouguer*, *Tratado del Navío*, Lib. 3. sec. 2. cap. 1.

(*b*) Se verá que el Navío anda mucho mas á viento largo, que á Popa; y esto sirviendo el mismo velamen en ambos casos.

á viento largo, precisados á ir recogiendo Velas por temor de no romper las Vergas ó los Masteleros. El mismo *M. Mariotte* repite en el propio Tratado (Prop. 2. disc. 3.) *supposant que le vent fasse 24 pieds en une seconde, comme il fait quand il est assez violent à l'ordinaire, mais pourtant bien moins que dans les grandes tempétes & ouragans.* En los mas violentos de estos, dice *M. Guillermo Derham*, de la Sociedad Real de *Londres*, quien hizo repetidas experiencias (Trans. Phylos. n.313.), que no corre el viento sino 66 pies Ingleses por segundo, y quando mas de 70 á 90: añadiendo, que algunos corren 22, otros 44, otros mas, y que hay viento que no corre una milla por hora: lo que equivale á 1 $\frac{1}{2}$ pies por segundo. Por mis propias experiencias, ya citadas, hallé, que las Brisas de Verano, que reynan casi diariamente en Cadiz, corren por lo general 12 pies por segundo, poco mas ó menos: lo que conviene muy bien con lo que dicen los citados Autores: y así, suponer que un Navío aguante todo su Velamen, corriendo el viento 24 pies por segundo, es quanto se puede suponer; antes debe caber mucha duda en que pueda aguantar tanto. Esto supuesto, no pudiendo andar, segun la theórica hasta ahora calculada, mas que los $\frac{100}{336}$ del viento, corresponderá en el caso propuesto, que ande $\frac{100}{336}$ de 24, ó 7 $\frac{68}{356}$ pies por segundo, que equivalen á 4 $\frac{5}{7}$ millas por hora: quan apartado esté esto de 9, 10 y 11 millas que suele andar un Navío en semejantes casos, considérelo qualquiera Marinero que tenga práctica de ello. Tomemos al contrario

el

el cálculo : supongamos que el Navío ande las 11 millas , como efectivamente las anda , que corresponden á la velocidad de $17\frac{1}{4}$ pies , y tendremos, que para esto el viento debiera correr $\frac{336}{100}$ de $17\frac{1}{4}$ pies , ó próxîmamente 58 pies Franceses , que equivalen á 62 Ingleses : de suerte que , para andar el Navío las 11 millas que sabemos que anda con todo Aparejo , casi necesita el uracan observado por *Derham*. Estas conseqüencias es suponiendo *M. Bouguer* la densidad del ayre $\frac{1}{576}$ de la del viento : tomandola de $\frac{1}{1100}$, añade que la velocidad del Navío ya no será sino el $\frac{100}{419}$ de la del viento: de suerte, que las $4\frac{3}{5}$ millas de su andar , ya no deben ser sino $3\frac{2}{3}$; ó la velocidad del viento , para que le haga andar las 11 , de $77\frac{1}{3}$ pies Ingleses, uracan bastante completo.

Esta falta de correspondencia me pareció , á primera vista , que podria depender de algun error en el cálculo ; pero formadas nuevas fórmulas , como se verán en el Cap. 1. del Libr. 4. Tom. 2 de esta Obra , solo sirvieron para confirmarle : deduciendose asimismo que á bolina solo puede andar el Navío , con todo su aparejo, $\frac{131}{1000}$ del viento , y que debiera correr este $77\frac{1}{3}$ pies Ingleses por segundo para hacerle andar solo seis millas por hora , como andan muchos Navíos : lo que con mas razon es imposible , á causa de no poder , con mas motivo , suportar todo su aparejo con tan violento viento.

Sin embargo de esto , aun nos faltaba otro exâmen que hacer , pues todas estas determinaciones

pendian de suponer que el Navío, andando 11 millas por hora con todo el aparejo, no fuese sino solo de la accion del viento, que corriese 24 pies por segundo: cantidad asignada solo por la fe que dabamos á las observaciones de *Mariotte* y *Derham*. Era preciso ver si esta velocidad no sería quizás mayor, en cuyo caso nos acercariamos mas á las determinaciones del cálculo. La experiencia era solamente la que nos habia de sacar de esta duda: para que el Navío ande las 11 millas, es preciso que tenga $17\frac{1}{4}$ pies de velocidad por segundo; y si el viento que producía este efecto no fuese mas que de 24 pies de velocidad por segundo, la velocidad de aquel debia ser próximamente los $\frac{2}{3}$ de la de este, y no $\frac{1}{4}$, como del cálculo se habia deducido. Para esto escogí un Bote, y mientras que navegando en él á viento largo se media su velocidad, se estaba midiendo en tierra la del viento, por medio de soltar pequeñas plumas ligerísimas, y observando con una muestra de segundos el camino que andaban en un tiempo dado. Despues de repetir esta experiencia algunas veces, diré: que con admiracion mia, no solo reconocí que no podian aumentarse los 24 pies, sino que debian disminuirse de mucho: el Bote, en substancia, se encontró que andaba muy poco menos que el viento: de suerte, que corriendo este de 10 á 11 pies, sacó el Bote cerca de 10: phenómeno bien extraño, para los que creyeron, que la velocidad del viento era casi infinita, respecto á la del Navío; pero no por ello es menos verdadero. Esta experiencia se puede repetir diariamente en qualquiera Puerto donde se dé la comodidad de pa-

pasar los Barcos á la Vela de un lado á otro, como sucede en la Bahía de Cadiz. De esta Ciudad á la del Puerto de Santa Maria hay cinco millas, ó 30400 pies Ingleses: los Barcos hacen este tránsito corriendo el viento largo ó fresco, ú de 12 pies por segundo, en $\frac{3}{4}$ de hora, ó 2700 segundos: lo que, partiendo por ellos los 30400 pies, da $11\frac{7}{27}$ de velocidad al Barco. De aqui se ve claramente, que ya no corresponde conceder mas de 24 pies de velocidad al viento para que ande el Navío $17\frac{1}{4}$, particularmente suponiendo á este muy velero.

Ya tampoco hay con esto mas asilo: es preciso y evidente, que la theórica enseñada sea falsa, ó por mejor decir, que lo sean los principios ó suposiciones sobre que se fundó. Estos se reducian á sentar, que la fuerza del viento en las Velas, asi como la de las aguas en el costado del Navío, son como las areas chocadas, como los quadrados de las velocidades y senos de incidencia con que las chocan los fluidos, y como las densidades de estos: á que podia añadirse haber supuesto las Velas planas no siendolo, particularmente en caso de viento fresco. Esta ultima suposicion, muy lexos de perjudicar era favorable, puesto que con ella se daba mas fuerza á la Vela que la que efectivamente tiene; y por tanto debia resultar mas velocidad al Navío, como se deseaba. Que la fuerza sea como las densidades de los fluidos, es principio tan evidente, que no creo se le haya ofrecido á nadie ponerlo en duda: y lo mismo parece que debiera suceder en quanto á seguir la razon de las areas chocadas, como hasta ahora se ha creido. Todo el

error debia recaer, por consiguiente, sobre suponer que las fuerzas, ó lo que es lo mismo, las resistencias de los fluidos fuesen como los quadrados de sus velocidades, y senos de incidencia. Este principio estaba sin embargo recibido de los primeros Geómetras y Physicos de la Europa, ó generalmente de todas las Academias creadas en ella, y con tanta razon y aplauso celebradas: esta consideracion debia causar el mayor respeto, y quizas una entera separacion de mayores exâmenes, á no vernos autorizados de los mismos Geómetras para dudar. El Cavallero *Newton* es de los que mas esfuerzos hicieron para asegurarse de principio tan esencial, y para proceder con acierto en la theórica de los proyectiles, despues de muchos exâmenes theóricos (*Philosophia naturalis* lib. 2.) aunque solo de pura meditacion, y no de sólidas demonstraciones Geométricas, y de atenerse por ellas á que las resistencias habian de ser como los quadrados de las velocidades, quiso confirmarlo por experiencias, haciendo oscilar Péndulos de varias materias y magnitudes en los fluidos. (*a*) La resulta de estas es tan apartada de lo que habia imaginado, que mas próximamente concluyen, que las resistencias son como las simples velocidades: lo que le hizo confesar que no estaba muy confiado de sus experiencias, y que deseaba se repitiesen. *Leonardo Eulero* en su *Ciencia Naval* ya citada (Cap. 5 Prop. 49) trahe una resolucion Geométrica sobre lo mismo, en que no respira sino su suma habilidad y des-

(*a*) Vease el Escollo de la Prop. 17. Libr. 2. Tom. 1. de esta Obra.

destreza: la conclusion es, (*a*) que la fuerza ó resistencia de los fluidos es igual al duplo peso de una coluna de agua, cuya base es la superficie impelida, y la altura aquella de donde fuera necesario que cayese el cuerpo, para obtener la velocidad con que se mueve: altura que es como los quadrados de las velocidades; pero qué disonancia no causó esta solucion al mismo Autor? quando confiesa que la fuerza no puede ser sino igual al peso de una sola coluna, y no de dos. En efecto, toda su demonstracion se funda en suponer, que al moverse el cuerpo en el fluido, solo impele de este aquel único que desocupa; sin hacerse cargo de que este impele al que tiene delante, este otro al que se le sigue: y asi sin término, ó sin que sepamos quanta es la cantidad de fluido que realmente se mueve, como lo confiesa el mismo Cavallero *Newton* (Escolio de la Prop. 35. Lib. 2. *Philosophia natural*). *Daniel Bernoulli*, bien conocido en la República literaria, estiende aun mas sus cálculos, (*b*) manifestando la diferencia que resulta de ser á no ser los cuerpos elásticos; pero como quiera la solucion es la misma, y solo resulta en el primer caso dupla fuerza: de suerte, que nos quedan igualmente las propias dudas. Menos estraño debe aun hacerse todo esto si se considera que en las theóricas expuestas no se supone el fluido sino destituido de toda gravedad, y por consiguiente de toda presion de unas partículas respecto á las otras; lo que

(*a*) Vease el mismo Escolio.

(*b*) Comentarios de la Academia de Petersbourgo, M. M. de Junio y Octubre de 1727.



que no cabe, ni en nuestro ayre, ni en nuestras aguas: estos fluidos, quando la velocidad de los cuerpos no es muy grande, impelen estos por detras con la fuerza que de su gravitacion les queda, lo que tambien reconoció el mismo *Newton*, y por consiguiente se disminuye la resistencia; al contrario, si la velocidad es grande, no tiene tanto lugar la gravitacion para actuar detras, y la resistencia debe ser á proporcion mayor. Bien han reconocido algunos despues este efecto, (a) y han confesado, que las resistencias de nuestros fluidos no pueden ser como las theóricas las describen regularmente.

Ya no debemos, pues, extrañar que la velocidad calculada, y que deben tomar los Navíos, esté tan apartada de la que realmente toman: los supuestos sobre que se fundó son falsos; pero no es esto aun la peor conseqüencia: si la resulta en la velocidad es tan sumamente erronea, ¿cómo podemos asegurar tampoco ninguna de las demas deducciones, ya sean de los ángulos que deben formar las Velas con el viento, el del Timon, ni tampoco la deriva, ni los aguantes de Vela, y demas acciones del Navío? Todo debe estar viciado, ó á lo menos debe discurrirse asi. El asunto pedia un sério exâmen, y este es el mismo que me propuse, sin escusar trabajo ó fatiga.

Era menester empezar por seguras experiencias, que acreditasen la duda de las resistencias:

bus-

(a) Benjamin Robins, de la Sociedad Real de Londres, *New principles of Gunnery*. Cap. 2. Prop. 1.

buscar despues, por vias diversas, ó por las mismas con que actua la Naturaleza, otra theórica de ellas; y ultimamente exâminar si esta convenia, no solamente con la marcha de los Navíos, sino con todas sus acciones, y asimismo con todos los efectos ó movimientos que en la Naturaleza se observan. El empeño, aunque arduo, produxo aun mucho mas de lo que yo mismo esperaba. La fuerza del agua corriente sobre una tabla que á ella expuse, no solo la hallé en ocasiones quatro veces mayor de lo que la asigna *Mr. Mariotte* (*Tratado del movimiento de las aguas*, Disc. 3. Part. 2.) sino que en otras lo era hasta ocho veces mayor: porque no solo dependia la fuerza de la magnitud del area, ó superficie de la tabla chocada, como hasta ahora se ha creido, sino tambien de su mayor profundidad en el fluido: de suerte que, puesta la misma area ó tabla cortada en paralelogramo rectangulo, con su lado mayor horizontal, padecia mucha menos resistencia, que puesto el propio lado vertical: es observacion utilisima para la Marina, y que hasta ahora á nadie se le ha ofrecido, no obstante ser conseqüencia clara de la gravitacion; pues si esta actua en las resistencias como acabamos de decir, siendo aquellas mayores á mayores profundidades, porque mayores colunas de peso cargan, mayores deben ser tambien las resistencias á mayores profundidades. Las diferencias que de solo este hecho resultan son tan excesivas, que no podia menos de variar con extremo todo lo hasta ahora calculado: si la tabla tenia de largo quatro veces su ancho, la resistencia, con su lado mayor vertical, era proxima-

mamente dos veces mayor que puesto el mismo lado horizontal: esto es, próxîmamente como las raices quadradas de las alturas, ó profundidades de la tabla en el fluido: y asi, si un Navío tiene sus dimensiones lineares duplas que otro, que le es semejante, las areas chocadas de aquel serán quadruplas de las de este, y segun lo hasta ahora enseñado, sus resistencias fueran como 4 con 1; pero, segun estas observaciones, ya no deben ser sino próxîmamente como 5 ⅗ con 1: diferencia, como se ve, bastantemente excesiva.

A mas de esto manifestaron las experiencias claramente, que no seguian las resistencias la ley de los quadrados de las velocidades, y senos de ángulos de incidencia, sino próxîmamente la de las simples velocidades y senos de incidencia, segun lo manifestaron tambien las experiencias del *Cavallero Newton.*

Ya se tenia con esto seguridad del error que se padecia en las resistencias theóricas establecidas, y recibidas en general, aunque con las dudas, tropiezos é imperfectas ilaciones que se han visto. No bastaba aun esto, era precisa la nueva theórica que diese iguales conseqüencias, sin ello no se podia introducir en el cálculo; pero parecia á primera vista que debiamos tener peores deduciones: si las resistencias eran efectivamente mayores, cómo podian resultar mayores velocidades en los Navíos, segun pedia la práctica? No obstante, considerando que si las resistencias de las aguas en la Proa aumentaban, tambien debian aumentar, por iguales razones, las fuerzas del viento en las Velas; no hu-

hubo para qué detenerse. Solicitada la theórica por medio de la relacion entre la velocidad con que sale el fluido por un agujero, y el peso que suportara la superficie que lo tapara, ya sea en el caso del reposo, como en el del movimiento, segun se verá por extenso en el Libro 2 de este Tomo, se halló la mas particular conformidad entre sus fórmulas y las experiencias; á lo menos en las relaciones con que se hacen las fuerzas, ya que no en sus medidas absolutas. Por esta nueva theórica las resistencias son como las densidades de los fluidos, como las areas chocadas, como las raices quadradas de sus profundidades en los mismos, y como las simples velocidades, y senos de incidencia con que se chocan. Pero no es esto aun el todo, porque este es solo el caso en que la superficie esté enteramente sumergida en el fluido, y que la parte anterior del cuerpo sea semejante á la posterior: quando hubiere parte de aquella fuera, resulta una nueva cantidad en la resistencia, que no tiene dependencia alguna con el area chocada, y que solo resulta de la velocidad; pero no es como las simples velocidades, ni como sus quadrados, sino como sus quadrados-quadrados. En ocasiones resulta tambien otra tercera cantidad, que es como los quadrados de las velocidades, y como las superficies chocadas, que corresponde precisamente al caso que hasta ahora se ha dado: y aun en otras otra quarta, que ninguna dependencia tiene de las velocidades, sino solo de las areas chocadas. En general las resistencias, segun esta theórica, dependen de quatro cantidades distintas, de las quales, segun las

ocasiones, se desvanecen algunas; y por dicha, para el asunto de la Marina que nos proponemos, quedan de ordinario en solo una, que es la primera de las referidas; aunque en las ocasiones de muchisima velocidad no podemos escusar el hacer atencion á la segunda: por lo que toca á la tercera, única de que se ha hecho caso hasta el presente, es por lo ordinario inutil.

Ya se tenia con esta confrontacion un cimiento del edificio; pero muchas experiencias en pequeño, no tienen iguales resultas en lo grande ó extenso, porque en este caso se hacen mas sensibles los efectos de los accidentes, y es lo que precisamente sucedia en las acciones del Navío, comparadas con las experiencias que hasta ahora se han practicado. Pero no tubo iguales resultas nuestra theórica, pues quando podiamos esperar mayores diferencias, por el aumento hallado de las resistencias, se encontró la mas perfecta resulta que se podia aguardar. Con ella se halla, que las Embarcaciones deben andar precisamente lo que andan, sease á Popa, como á viento largo y de bolina; pero lo que es mas, que no solo andan algunas á viento largo casi tanto como el mismo viento, sino que algunas de ellas andan mas que el propio viento: paradoxa que estrañarán muchísimos; pero que sin embargo se verá demostrada, no en los terminos que lo creyó *Juan Bernoulli*: (*a*) esto es, de que se pudiera largar casi infinita Vela, supuesto imposible para la práctica, sinò en terminos de hecho, ú de lo que actualmente su-

(*a*) Obras de *Juan Bernoulli*, Tom.2. N. XCIII.

sucede con muchas Embarcaciones; como Galeras, Xabeques, &c.

Hallada esta exâcta conformidad de nuestra theórica de resistencias con la práctica, asi en pequeñas superficies, como en las muy ámplias de los Navíos, se trató tambien de aplicarla, para mayor verificacion, á otros dos casos diversos. El primero, produciendo una nueva theórica de los *Voladores*, ó por otro nombre *Cometas*, que vuelan los Niños; pues aunque solo sean instrumentos propios para la comun diversion de ellos, han sido en este caso muy adequados para verificar asunto tan importante: y asi, al fin de este Tomo, se da en Apéndice todo el cálculo, comparandolo con el que resulta del systhema antiguo, para que se conozca con evidencia el verdadero.

El segundo caso á que se aplicó tambien la theórica, es á las experiencias que *Mr. J. Smeaton* hizo con una Máchina propia de su invencion, para averiguar la fuerza con que el agua actua en las ruedas que mueven, á imitacion de los Molinos: se comparan veinte y siete experiencias con las dos theóricas, la que hasta ahora se ha seguido, y la nueva que damos, y se halla que corresponden exâctamente con esta, quando se apartan enteramente de la otra; cuya resulta no es tanto mas favorable quanto no se puede dudar de experiencias agenas, hechas con tanta anticipacion.

Ya teniamos con esto corregido el error de principio: faltaba entrar despues en el exámen de una materia dilatadísima, y se puede decir mas que nueva, porque de ordinario cuesta mas trabajo

corregir un vicio, que plantear de nuevo la obra. No se limitaba el error à solo las velocidades, como hemos visto, era conseqüente que lo hubiese en la deriva, en los ángulos que deben formar las Velas con la Quilla, y con el viento, y en los aguantes de Vela, porque todo esto depende de la relacion de las resistencias, y esta variaba tanto; particularmente en lo ultimo, porque se habian de equilibrar mayores esfuerzos del viento en las Velas, con los mismos que sufre el costado. Asimismo el modo de calcular las resistencias debia ser muy diverso, y los cuerpos que debian padecer las mínimas muy distintos, pues una porcion de costado próxîmo á la superficie del agua, ya no padecia lo mismo que otros iguales y semejantemente chocados, colocados á mayor profundidad.

Extra de esto, no eran solo las velocidades del Navío en lo que se tropezaba: el govierno era otro asunto en que se veian igualmente algunos errores. El exe de las resistencias, y el de la fuerza motriz debian concurrir, segun la theórica hasta ahora dada, para equilibrar el Navío, y lograr un perfecto govierno; sin embargo, en la práctica el exe de las resistencias está próxîmamente mas á Popa que el de la fuerza motriz, yendo con todo el Velamen, de $\frac{1}{7}$ de toda la longitud del Navío, y por consiguiente, debia arrivar este de continuo, y con gran fuerza, segun lo enseñado; pero al contrario, el Navío es mas propenso á orzar, particularmente con viento fresco: es, pues, preciso que haya algun vicio en esta theórica, ó que se hayan omitido en ella algunas consideraciones esencialísimas: en efecto

se encuentran dos, una la curvidad de la Vela, que conduce el exe de la fuerza motriz mucho mas á Popa: y otra la inclinacion del Navío, que lo conduce mucho mas. Si estas alteraciones fueran constantes, no hubiera sin embargo mucho que corregir en lo enseñado; pero son variables, segun la fuerza del viento, la figura de las Velas, y el aguante del Navío: si hubieramos colocado la arboladura conforme se nos advertia, hubiera sido imposible el govierno, y muchísimo peor si se le hubieran dado las medidas que *Mr. Bouguer* ha pretendido.

El balance y cabezada no és asunto donde haya tropezado menos la theórica hasta ahora dada: en ella no se considera mas accion que la que resulta de un movimiento oscilatorio, supuesto el Navío un péndulo, y en esta inteligencia, todos sus balances y cabezadas deben executarse en el mismo tiempo: ninguna relacion se ve que tenga, en este supuesto, el balance con la ola, sin embargo que es su verdadera causa: y aunque puede creerse que se refiere la theórica á los segundos ó terceros balances, que se suponen libres de la misma ola, quien puede dudar que sean los primeros de mayor eficacia? Que para estos no corresponda la theórica se hace evidente, porque ningun balance se puede cumplir que no haya hecho su transito la ola, y estas no pasan en el mismo tiempo, sino en muy diversos, segun sus magnitudes: de suerte, que se hace de admirar como se ha podido creer y admitir tan generalmente iguales errores. En estas acciones no se han considerado tampoco los efectos

de

de las olas ó golpes de Mar, y parece que los cálculos no se han propuesto sino para Mares de delicias, no para las que pasan por encima de los Navíos, que los inundan, y que los hacen perecer. Una Embarcacion se eleva con mas facilidad sobre la ola que otra, quien duda que esta estará mas expuesta á que la sobrepuge ó inunde, y aquella á romper sus arboladuras? Es menester considerar, por consiguiente, no solo el tiempo en que se dá el balance, sino su magnitud, y la elevacion de las aguas en el costado. A estos accidentes estaban expuestas las Proas agudas, ú de menor resistencia, que los Geómetras han deseado tanto: precisamente habian de estar de continuo sumergidas debaxo de las aguas, y no solo corrieran los riesgos de un naufragio, sino que aun nada ganarian en la marcha, unico objeto que de ordinario se ha tenido presente, pues las resistencias crecieran á medida que mas se sumergieran é inundaran las Proas con las olas que las chocaran.

De todos estos errores, y algunos mas que, por no dilatarnos, escusamos referir, hemos procurado libertar nuestra theórica; pero para exponerla nos faltaban muchos documentos de mechánica, particularmente sobre la accion y movimiento de los fluidos. Pensamos, pues, por esto en exponerlos desde los principios, incluyendo todo lo que igualmente conduce à la theórica de las Máchinas simples y compuestas, sus fricciones, choques de cuerpos, y sus acciones, pues todo es propio de la Marinería, y conducente á la resolucion de tan intrincadas soluciones como las que se verán. La

idea

idea que nos hemos propuesto es como se sigue.

El primer Tomo se divide en dos Libros: el primero de estos contiene 9 Capítulos. El primero trata de las Definiciones y Axîomas, ó leyes del movimiento, con los principios deducidos de la experiencia de como actua en él la gravedad: y el segundo de la composicion y descomposicion del mismo movimiento, y de las fuerzas que actuan. El tercer Capítulo contiene todo lo que corresponde al centro de gravedad ú de las masas, asi como del de las potencias ó fuerzas: con las fórmulas de sus velocidades, longitudes que corren, y tiempos en que las corren. El quarto trata de la rotacion de un systhema qualquiera de cuerpos libres, ó ligados entre sí: del ángulo giratorio ú de rotacion que prescriben en virtud de qualesquiera potencias que actuen en él: con la demostracion de que girará del mismo modo estando su centro de gravedad fixo, que estando libre: y de que este ha de baxar en qualquiera Máchina ó cuerpo lo mas que fuere posible: agregandose, como conseqüencia de aquella theórica, la de los Péndulos, y la de las Palancas de los tres generos, no considerandolas solamente como hasta aqui en el reposo, sino en el de movimiento, y especulando sus fuerzas, resistencias que deben tener en sus fibras, y en el todo de sus partes.

El Capítulo quinto trata del exe y radio de rotacion, ú del punto sobre que gira un systhema ó cuerpo, en que se manifiesta que este punto jamas está fixo, á menos que no sea el centro de gravedad. El sexto encierra toda la theórica de la percu-

cusion de los cuerpos, en que nos hemos dilatado algo, por motivo que es el principio de los Capítulos siguientes, y por aclarar una materia que hasta ahora ha sido el objeto de muchas controversias entre los mas respetables Autores, como es la qüestion de las fuerzas vivas y muertas: se dan fórmulas en que se hallan los tiempos, las velocidades, las acciones, y las longitudes corridas por los cuerpos en el acto del choque, como tambien de las fuerzas con que actuan á qualquier tiempo: aplicando las soluciones á la práctica, y experiencias de los Autores de Phisica experimental, á fin de que se vea la exácta correspondencia de mi theórica con la práctica, y los efectos admirables del choque: concluyendo con aclarar el error en que han estado varios Autores célebres quando confundian los centros de oscilacion y percusion, pues aunque en ocasiones se unan, no siempre son el mismo.

El Capitulo septimo contiene el movimiento de los cuerpos que insisten sobre planos inclinados, asi como por curvas: se da el tiempo de su caida por la cycloide, y se aplica á los Péndulos, hallando aquel en que estos oscilan, y la longitud que corren los cuerpos cayendo verticalmente en igual tiempo que aquellos terminan una oscilacion: concluyendo con los casos en que giran los cuerpos cayendo por el plano inclinado, ó curva.

El octavo se reduce á una nueva theórica sobre la friccion ó rozamento: asunto que hasta ahora no se ha visto que corresponda á las experiencias, sin embargo de haberse tratado por los Geómetras de la mayor graduacion: se demuestra que su fuerza

no

no es solo proporcional al peso que la causa, como creyeron *Mr. Amontons*, y *Mr. Bilfinger*: y se concluye manifestando los tropiezos que se ofrecen en la theórica dada sobre el asunto por el muy célebre *Leonardo Eulero*, y el como se concilian todos los hechos con la nuestra.

Ultimamente concluye el primer Libro con el nono Capítulo, que trata de las Máchînas simples, Plano inclinado, Cuña, Hacha, Tornillo, Exe en peritrochìo, Carrucho ó Moton, y Aparejos: se dan sus theóricas por extenso, atendiendo á la friccion que padecen, lo que es preciso para deducir sus verdaderas fuerzas, hallando las máxîmas y mínimas de estas, y se aplica el todo á algunos hechos de práctica.

El Libro segundo encierra el tratado de los fluidos. En el Capit. 1. se determina la accion y fuerza con que actuan estos sobre los cuerpos en el caso del reposo, y las condiciones que deben concurrir para que se efectue este. El Cap. 2. trata de la fuerza con que en el movimiento actuan los fluidos contra una diferencial de superficie ó area muy pequeña: se determina esta fuerza en todos los casos de movimiento horizontal, vertical, ú obliquo, asi como de distintas direcciones y ángulos de incidencia, y se concluye manifestando las varias theóricas que sobre el asunto se han dado por los mas célebres Geómetras, y los errores á que han conducido, aplicadas á los fluidos graves. El 3. Cap. concluye las mismas fuerzas en las superficies planas: manifiesta los diversos casos que ocurren de hallarse ó no las mismas enteramente sumergidas en

los fluidos, por causa de la desnivelacion que resulta en estos: y finaliza explicando una diferencia que occurre de lo expuesto en una proposicion de la Philosophia natural del *Cavallero Newton*; siguiendo despues el Cap. 4. en que se hallan las mismas fuerzas en la accion contra qualesquiera superficies.

El Cap. 5. trata de las resistencias horizontales que padecen los cuerpos movidos en los fluidos, y de la que padecen quando estos se mueven contra los cuerpos, pues no es el mismo caso, como hasta ahora se ha creido: se combinan las experiencias para ver como conviene con estas la relacion que determina la theórica. En el Cap. 6. se hallan las resistencias verticales que igualmente padecen los cuerpos, sease movidos estos ó los fluidos: y se hace ver la gran diferencia que resulta de un caso al otro. En el 7. Cap. se demuestra la alteracion en las resistencias que causan las desnivelaciones en los fluidos que proceden del movimiento de los mismos cuerpos: y lo que dependen aquellas de la longitud de estos. El 8. trata de las líneas y superficies que padecen la máxima y mínima resistencia, asi como de las que deben cubrir las bases, ó que hayan de encerrar un determinado cuerpo, logrando la misma propiedad: y se concluye con una Tabla de las abcisas y ordenadas de la curva que padecerá la menor resistencia, comprehendiendo el mayor espacio.

El Cap. 9. expone las fórmulas de la relacion que hay entre los tiempos, espacios corridos, y velocidades que toman los cuerpos en su movimiento progresivo por los fluidos: demuestra que no lle-

llegan á obtener sus máximas velocidades sino despues de tiempos y espacios corridos infinitos; pero que sin embargo á corto tiempo las adquieren muy poco menores que las máximas: y concluyen con la theórica de las olas, en que se dan sus velocidades y magnitudes. El 10. trata de los momentos que padecen los cuerpos en su movimiento progresivo horizontal, y de la estabilidad que de ellos se origina, tanto en el caso del reposo, como en el de movimiento. El 11. de la inclinacion que en aquellos resulta, impelidos por qualesquiera potencias: con las varias soluciones que en el mismo caso se ofrecen, segun las figuras de los mismos cuerpos; á que se añaden algunas prevenciones para evitar los errores á que pueden conducir las fórmulas hasta ahora dadas, sino se consideran con las suposiciones precisas, manifestando el todo con exemplos.

El Cap. 12. contiene las fórmulas que expresan los momentos que padecen los cuerpos quando giran en los fluidos, sobre un exe que pasa por su centro de gravedad: y el 13 las de las velocidades angulares de los mismos, y longitudes de los péndulos que oscilan isochronamente con ellos, como asimismo las máximas y mínimas velocidades que adquieren en sus vibraciones: concluyendo despues de esto el Tomo con los dos Apéndices, sobre la theórica de los Cometas que vuelan los Niños, y el de la resistencia de los fluidos en las Máchinas, para confirmacion de nuestra theórica de las resistencias, segun ya diximos.

El Tomo segundo trata todo de Marina, y se divide en cinco Libros. El primero contiene lo

perteneciente al conocimiento y fabrica de la Nave. El Cap. 1. de este da una idea general de las Embarcaciones, de las propiedades que las convienen, de su figura, del modo de governarlas, y de la disposicion y pluralidad de sus Mástiles y Velas. El 2. trata del infinito número de distintas Embarcaciones que pueden resultar, y de su fábrica, segun el uso práctico mas antiguo: el 3. prescribe la theórica y modo de delinear los planos de aquellas fábricas, segun el uso de varias Naciones. El 4. enseña el modo de delinear los planos, segun lo que hoy practican los Constructores mas especulativos y prácticos de las dos Naciones Francesa é Inglesa: y el 5. un nuevo méthodo geométrico de describirlos, formando el todo de las Quadernas desde un extremo al otro de la Embarcacion por arcos de círculo, y evitando el mucho número de tentativas que en los otros méthodos no son evitables. El 6. describe en los planos, por los diversos modos, las obras muertas: y el 7. concluye el Libro con igual descripcion de las cubiertas.

El Libro segundo exâmina el cuerpo del Navío y sus centros: sus fuerzas, resistencias y momentos. El Cap. 1. trata de la flotacion y línea de agua del Navío, de su peso total y del de su casco: se da un exemplo de la práctica en el cálculo: se enseña el modo de variar la línea de agua alterando el Navío: se dan los volúmenes que ocupan los de diversas clases, con la relacion que tienen dichos volúmenes con las dimensiones lineares de los Buques, y el error de no reglar los Constructores el grueso de maderas, segun la debida propor-

cion

cion que se necesita. Se dan asimismo reglas fáciles para determinar la magnitud de los Navíos, segun la Artillería y variedad de pesos que deben suportar, en atencion á que el todo, y aun las Tripulaciones, siguen próximamente la razon de los cubos de sus dimensiones lineares: y se concluye con la relacion en que estan, y deben estar los Buques con el peso total de los mismos, de sus pertrechos, y demas necesarios que componen el todo del armamento. El Cap. 2. trata del modo de hallar el centro del volúmen que el Navío ocupa en el fluido, aclarando la regla con un exemplo: se explica la variacion que puede tener dicho centro, no solo por variar la línea de agua ú de flotacion, sino tambien por variar el volúmen del Buque en qualquiera de sus partes; y se termina con inquirir facilmente el mismo centro en otros Navíos semejantes, hallado ya el de uno, aunque entre ellos haya algunas cortas variaciones.

El Cap. 3. enseña el modo de hallar la altura del metacentro sobre el centro de volúmen, y se da un exemplo para su facil inteligencia: añadiendo la regla y modo facil de hallar lo mismo en los Navíos semejantes, ú de muy poca diferencia; concluyendo con hacer iguales exâmenes y averiguaciones por lo que toca de Popa á Proa, asi como en lo primero se hizo para de un lado á otro.

En el Cap. 4. se enseña el modo de hallar el centro de gravedad del casco, y del todo del Navío, por medio de la colocacion y peso de todas sus partes, haciendo manifiesta la regla con un exemplo. Se da igualmente el modo de hallar dicho

cen-

centro por medio de una experiencia facil, practicada en otro Navío, atendiendo despues á la diferencia entre ambos, que expone una pequeña fórmula, de la qual se infieren varios Corolarios, no solo sobre la variacion en altura del centro de gravedad, sino sobre la distinta inclinacion ó aguante que tendrá el Navío, siempre que se varie en qualquiera parte de él su volúmen y peso. Se aplica todo esto á varios exemplos de otros Navíos, y se demuestra últimamente la equivocacion en que cayó *Mr.Bouguer*, asegurando, que en el Navío de tres puentes se eleva el metacentro sobre el centro de gravedad de solo uno ú dos pies.

El Cap. 5. enseña el modo de calcular las resistencias horizontales que padece un Navío, tanto directas, ó por la Proa, como laterales, ó por el costado, con el orden en que se deba seguir el cálculo para evitar confusion. Dos solas cantidades resultan de este, una que es como las simples velocidades, y otra que es como los quadrados-quadrados de las mismas, y que depende del efecto de la desnivelacion de las aguas en Proa y Popa: las otras dos cantidades que ocurren en las resistencias, son despreciables en la accion del Navío. Se dá despues el modo de calcular la alteracion de aquellas resistencias en caso de sumergirse el propio Buque algo mas ó menos, ú de sacarlo de aquella estiva primera: y se concluye dando fórmulas faciles para deducir las mismas resistencias en otros Navíos de fondos semejantes, por las ya dadas del primer Navío, advirtiendo, que la cantidad, que es como los quadrados-quadrados, se hace des-

pre-

preciable en Buques grandes, lo que no en pequeños.

El Cap. 6. enseña el modo de calcular los momentos que padece un Navío en sus inclinaciones, que llaman los Marineros aguante de Vela, tanto en el caso de hallarse en reposo, como en el de hallarse en movimiento, porque pueden ser distintos: se enseña igualmente á calcular la variacion que en ellos resulta quando el Navío se cala mas ó menos en el fluido: y se dan fórmulas para hallar facilmente los que corresponden à qualquier Navío semejante en sus fondos, por los ya hallados para el primero; y se concluye manifestando quanto conduce para el buen aguante de Vela, el que el centro de las resistencias horizontales esté lo mas alto que fuere dable, y que los costados de los fondos en las inmediaciones de la superficie del agua estén en quanto sea posible verticales, pues no dependen dichos aguantes de solo la seccion horizontal del Navìo, hecha por la superficie del agua, segun se ha creido y enseñado hasta ahora.

En el Cap. 7. se trata de los momentos que padece la Nave en su movimiento de rotacion, que los Marineros llaman *virar*: se ve por ellos lo propenso que debiera ser á arribar, sino fuera por otras fuerzas que se lo impiden: se explica la variacion que resulta en los mismos momentos, quando el Navío esté mas ó menos calado en el fluido; y se dan fórmulas para hallar los que corresponden á qualquiera Navío semejante en los fondos al primero.

El Cap. 8. trata de los momentos que padece la Nave

Nave en su rotacion, que los Marineros llaman *cabezada*: con la misma extension y circunstancias que se especularon los que resultan en el balance; y se dá fin al Libro 2. con el Cap. 9. que trata de los momentos que padece la Nave, y que ocasionan lo que los Marineros llaman quebranto: se demuestra la causa de donde procede, y que la fuerza de un solo costado fuera capaz de precaverle casi enteramente, á no ser por el juego que ordinariamente resulta en las maderas y herrages, por cuyo motivo es preciso precaverle; aunque la principal atencion para evitarle, consiste en la figura de los fondos del Navío, y en recoger lo mas que sea posible sus diversos pesos hacia el centro de gravedad de aquel. Se exâminan los mismos momentos en caso de que el Navío esté vacío, y se evidencia lo mas que está expuesto en este caso al quebranto: despues de lo qual se trata del que resulta tambien de un lado al otro, que hasta ahora no se ha considerado, sin embargo de ser bien eficaz y perjudicial, mayormente en los Navíos de Guerra, quando sus baterias se elevan mucho sobre el centro de gravedad: advirtiendo el mal orden con que se reparten, y las reglas que deben seguirse para evitar las desgracias que por ello suceden con mucha freqüencia.

El Libro tercero trata de las Máchinas que mueven y goviernan el Navío. El Cap. 1. se estiende sobre las Velas, sobre la figura que toman, y sobre la fuerza y direccion con que aćtua el viento en ellas. Se halla la curva que forman muy distinta de la cadenaria que hasta ahora se ha creido to-

tomaban, y se dan las abcisas y ordenadas que la la describen. Se determina la absoluta fuerza con que actuan, y se hace ver que esta no depende de solo el ángulo que forma el viento con las Vergas, sino tambien de la mayor ó menor curvidad que en sus extremos tenga la Vela, la qual se altera segun la velocidad del viento, y segun la magnitud y calidad de la misma Vela. Se determina asimismo la direccion en que actuan estas, y el centro de sus fuerzas, que cae siempre mas á Popa que el centro de las mismas Velas, segun la curvidad y anchura que estas tubieren, lo que es uno de los motivos que obligan al Navío á orzar. Se aplica despues la theórica á varios exemplos prácticos, y se concluye por ellos la mucha deriva que deben padecer los Navíos, solo por aumentar el viento, y sin atender á las olas ó golpes de Mar, que ha sido, segun los Marineros, la sola causa de ella. Se dan Tablas de los pies quadrados que contiene cada Vela: del centro de gravedad de cada una de ellas; y asimismo de sus momentos, tanto verticales como horizontales, con extension à todos los casos que mas generalmente se ofrecen en la práctica.

El Cap.2. trata del Timon, de sus fuerzas respective á los diversos ángulos que forme con la Quilla, tanto por barlovento como por sotavento, y á su figura, que contribuye muchísimo, sin embargo que hasta ahora no se ha reconocido esta circunstancia. Se halla el ángulo en que debe hacer el máxîmo efecto; pero se reconoce la poca ventaja que con él se consigue, respecto al que los Marineros disponen, y las razones por que deben

privilegiarse estos á los que la Geometria determina.

El Cap.3. se extiende sobre el Remo, máchîna bien simple en la práctica; pero tan complicada para la theórica, que solo el gran Geómetra *Leonardo Eulero* nos ha podido dar el legítimo cálculo de ella: y hubiera igualmente sido el de sus verdaderas fuerzas y efectos, á no ser por la fàlsa suposicion sobre la ley con que actuan las resistencias. Se da por extenso todo el cálculo, atendiendo al mas mínimo momento, y se concluye la velocidad que debe tomar la Embarcacion; y que se verifica con la conformidad de los exemplos á la práctica: lo que de nuevo autoriza nuestra theórica de resistencias. Se advierte lo que importa que la parte exterior del Remo se aligere: y se halla la fuerza y velocidad ventajosa con que debe actuar el Remero para que la Embarcacion tome la mayor velocidad posible. Ultimamente se inquiere tambien la mas ventajosa relacion que debe haber entre las longitudes de la parte exterior é interior del Remo: se hace ver que esta relacion no es constante aun en el mismo Barco, y con los mismos Remeros, porque depende de la fuerza que estos empleen, y de la que hubiere entre los tiempos que pasan entre una palada y otra, y el que se mantiene el Remo en el agua: de suerte, que quanto mayores fueren dichas cantidades, mayor debe ser la longitud de la parte exterior del Remo, respecto á la interior. Lo mismo se sigue quando mayor fuere el número de Remeros; y al contrario quando mayor fuere la resistencia de Proa: de suerte, que la mayor Embar-

barcacion necesita menos longitud en la parte exterior del Remo. Se atiende tambien en esto á la fuerza de los Remeros ; pero se concluye por las atenciones que despues se hacen , con que la mejor disposicion del Remo es , con corta diferencia , la que estilan los Marineros , aunque tomando algunas precauciones , segun las distintas Embarcaciones : y se concluye el Libro con un exemplo , aplicado á una Galera , y con manifestar el poco efecto que producen algunos momentos.

El Libro quarto trata de las acciones y movimientos del Navío. El Cap. 1. se extiende sobre el andar ó movimiento progresivo que da al Navío el impulso del viento en las Velas , y del rumbo que le obliga á seguir. Se dan quatro fórmulas que expresan las quatro velocidades que distinguimos en el Navío , esto es , la direćta ò por la Proa : la lateral ó perpendicular al costado : la obliqua , que legitimamente toma la Embarcacion ; y ultimamente aquella con que sale á barlovento , ó con que direćtamente gana en oposicion , segun la misma línea del viento : á que se agrega la expresion ó valor del ángulo de la deriva. Se exâminan despues las ventajas y conocimientos que ofrecen dichas fórmulas : manifiestan á primera vista , que las quatro velocidades fueran exâćtamente porporcionales à las del viento , á no ser por la curvidad de la Vela , que altera algo esta proporcion. Manifiestan igualmente , que quanto mayor fuere la relacion entre la resistencia del costado , y la de la Proa , mayor será la velocidad direćta ò por la Proa , y menor la lateral : y que para que el Navío

gane barlovento,es preciso que aquella relacion sea mayor que la que tiene la tangente del ángulo que forma el viento con la Quilla, con la tangente del ángulo que forma la perpendicular á la Quilla con la direccion en que aċtuan las Velas. Del mismo modo manifiestan, que las quatro velocidades aumentan, á medida que se largue mas Vela; y que la direċta y obliqua, quando se navega con todo el aparejo á viento largo, llegan al extremo de ser mayores que la del mismo viento: se explican los casos en que esto sucede, y aunque no corresponden en los Navíos, se verifican en las Galeras y Xabeques. Se aplican despues las fórmulas á varios exemplos práċticos, ú de la disposicion de aparejos que usan los Marineros, ya en Popa como á viento largo y de volina, y se reconoce la perfecta conformidad de la práċtica, con las soluciones que de las fórmulas resultan. No sucede lo propio con las que se dan segun el otro systhema de las resistencias, porque producen en los Navíos velocidades bien apartadas de las que la práċtica manifiesta. El aumento de la velocidad direċta que procede de la mayor razon en que pueden estar las resistencias lateral y por la Proa, se hace ver que no se extiende á la que resulta de aliviar ò calar mas el Navío; pues aunque efeċtivamente se halla en esto alguna diferencia, es tan corta, que no merece la menor atencion. La total expresion de la misma velocidad, reducida á serie, facilita el modo de especular las medidas principales que deben darseles á las Embarcaciones para que tomen el mayor andar posible: alargar su longitud, y disminuir á

pro-

proporcion su profundidad, aumenta la velocidad; pero esto se verá que tiene sus perjuicios: sucede lo propio aumentando la longitud, y disminuyendo á proporcion el ancho; pero en caso de darse la longitud constante, y de variar solamente el ancho y la profundidad, es ventajoso para ir á Popa, ó viento muy largo aumentar aquel, y disminuir esta; pero al contrario yendo á volina, ó vientos escasos: particularidad que en la práctica se observa, y que no produce el antiguo systhema de las resistencias. Despues de esto se concluye el Capítulo demostrando por las mismas fórmulas, que con vientos suaves deben andar las Embarcaciones chicas, siendo semejantes, mas que las grandes; y al contrario, que estas andan mas con vientos fuertes.

El Cap. 2. trata de los ángulos que deben formar las Velas y el viento con la Quilla, para conseguir el máxîmo andar: asunto que se ha separado del Capítulo precedente á que pertenecia, por su extension, y particulares circunstancias, y atenciones que encierra. Se da primeramente una fórmula que expresa el valor del ángulo que debe formar la Vela con la Quilla, para que el Navío ande lo mas que sea posible, supuesto constante el ángulo que forme el viento con la misma Quilla. Esta fórmula manifiesta, que aquel ángulo de la Vela no es constante, ni aun en el propio Navío, como hasta ahora lo han creido los Geómetras generalmente, porque no solo depende de la relacion entre las resistencias del costado y de la Proa, sino tambien de la cantidad de Velámen que se largue, y de la curvidad de las Velas: de suerte, que quanto mayor

sea

sea aquella razon, y la cantidad de velámen, menor debe ser el ángulo, y asimismo quanto menor sea la curvidad de las Velas. Se dan de ello algunos exemplos, y en el de ir á bolina un Navío de 60 Cañones con todo su aparejo, se halla el ángulo de 28° 47′; y si solo fuese con las dos Mayores, resulta de 40° 42′, próxîmamente el que en todos casos usan los Marineros. Se busca despues, qué viento es el que hará andar á un Navío lo mas que sea posible, y se demuestra que no es siempre el mismo, ni aquel en que vaya en Popa, no obstante que hasta ahora se ha creido generalmente que lo era, siempre que sirviesen las mismas Velas; no habiendose persuadido nadie á que el viento largo podia ser mas ventajoso, sino solo porque á Popa se tapan el viento unas Velas á las otras: se halla la fórmula que expresa el valor de dicho ángulo ventajoso que debe formar el viento, y por ella se manifiesta que es variable, porque depende de la razon en que estubieren las resistencias del costado y de la Proa del Navío; como tambien de la cantidad de Velámen que llevare, y de la curvidad de las Velas: de suerte, que quanto mayor sea aquella razon, y la cantidad de Velámen, mas avierto es el ángulo de viento que se necesita para hacer andar el Navío lo mas que es posible; y al contrario, quanto menor sea la curvidad de las Velas ó violencia del viento. En un Navío de 60 Cañones se halla que no llevando mas que 8065 pies quadrados de Velámen, es el viento en Popa el que mas le hará andar: que luego que largue mas, ya no será sino otro viento mas avierto; y que llevan-

do

do 17680 pies, es el viento avierto de $41^{\circ} 56'$ el que mas velocidad le dará. Se substituyen despues estos ángulos ventajosos en la fórmula que dá la velocidad, y se halla la máxîma de máxîmas, ó la mayor que de innumerables casos puede resultar: en un Navío de 60 Cañones se halla esta de $\frac{74}{100}$ de la velocidad del viento: y en un Xabeque, de $\frac{163}{100}$ de la misma: de suerte, que la velocidad de este es $\frac{63}{100}$ mayor que la del viento. Para hallar la máxima velocidad con que se puede salir á barlovento, y la relacion entre los ángulos que la deben producir, resulta una fórmula muy complicada: esta manifiesta, que los ángulos no deben ser los mismos que los que hacen andar al Navío lo mas que es posible, sino distintos, y que dependen, como en los demas casos, no solo de la relacion entre las resistencias del costado y Proa, sino tambien de la cantidad de Velámen que se largue, y de la curvidad de las Velas ó ímpetu del viento: de suerte, que quanto mas Velámen se lleve, y menos fuerza tenga el viento, mas agudos deben ser los ángulos, que han de formar el viento y las Velas con la Quilla, para ganar lo mas que sea posible barlovento. Hallados, ultimamente, los valores de estos ángulos, y substituidos en la fórmula que da la velocidad con que sale á barlovento, se halla la máxîma de estas: en el Navío de 60 Cañones se encuentra de $\frac{164}{1000}$ de la velocidad del viento, quando en el méthodo que usan los Marineros solo es de $\frac{125}{1000}$: de suerte, que se puede ganar una tercera parte de mas barlovento de lo que hoy se consigue.

El Cap. 3. se estiende sobre la inclinacion que de-

ben tomar las Embarcaciones obligadas por el impulso del viento en las Velas: pues teniendo ya exàminado en el Cap. 6. del Libr. 2. lo momentos con que resisten sus costados la inclinacion, y en el primero del Libr. 3. los que el viento causa en las Velas, la igualacion de estos, produce la inclinacion que debe resultar. Se da, por este medio, la fórmula que expresa su valor, y aunque se advierten en ella varias cantidades en el caso de algunas Embarcaciones, se reducen á solo una, por ser despreciables las demas. Se aplica despues esta fórmula á varios exemplos, y se concluyen las mismas inclinaciones que en la práctica se observan diariamente. Al contrario en el antiguo systhema de las resistencias resultan las inclinaciones muy apartadas de la realidad, y manifiestan los absurdos que resultan de sus falsas suposiciones, y aun de experiencias autorizadas. Se explica tambien lo que se ha entendido por *punto vélico*, y la colocacion que se ha deseado de este para conseguir que el Navío no se incline, manifestando la imposibilidad de este proyecto. Se da tambien el cálculo y exemplo del caso, no bien temido aun, que los Marineros llaman *tomar por alúa*, y se demuestra el gran riesgo que en él se tiene de perecer. Las fórmulas que expresan la inclinacion que un Navío debe tomar, se extienden despues á los casos en que se le dé alguna variacion al Buque, ya sea en su peso, ó en su volúmen sumergido en el fluido: y de ellas se deduce, que el Navío aguantará mas la Vela si el peso añadido se colocare mas baxo que la superficie del agua, y al contrario si se colocare mas alto;

sien-

siendo el mayor ó menor aguante proporcional á la distancia que se colocare de dicha superficie: y asimismo que aguantará mas la Vela, si el volúmen que se le añadiere estubiese mas alto que el que se le quitare; y al contrario: y si fuesen peso y volúmen los que se añadiesen, aguantará mas la Vela, si el volúmen estubiere mas alto que el peso. Ultimamente se demuestra, que en Navíos enteramente semejantes, los aguantes de Vela son en razon inversa de sus dimensiones lineares: y que en las inclinaciones de Popa á Proa, muy lexos de sumergirse estas, por la accion ó fuerza de las Velas, se levantan mas sobre el fluido, en el caso de los Buques que hoy se estilan.

El Cap.4. trata del govierno del Navío: esto es, de la combinacion de las fuerzas que actuan continuamente á hacer girar el Navío, de las quales el Timon es solo una de ellas, y en ocasiones no la mas eficaz. Se demuestra que el exe de la fuerza motriz, supuestas las Velas planas, y el Navío sin inclinacion, no concurre con el exe de las resistencias, y que solo se unen á causa de la curvidad que toman aquellas, y la inclinacion que en este resulta: y como uno y otro depende de la mayor ó menor violencia del viento, y de la mas ó menos cantidad y altura de las Velas: se sigue, que variando qualquiera de estas cantidades, varia el exe de la fuerza motriz, y se perderá el equilibrio en el govierno, que por consiguiente será muy inconstante, sin embargo de lo que hasta ahora se nos ha enseñado. Se evidencian todos los casos en que el Navío debe orzar y arribar, ya porque se altere

el viento, ó porque aumente ú disminuya la altura ó amplitud de las Velas, asi como por qualquiera variacion que se haga en la estiva del Buque, ó en las dimensiones de este, particularmente en sus lanzamentos, que son una de las principales causas de que depende el buen govierno, no obstante que algunos celebrados Constructores no lo han creido hasta ahora: y por ultimo se trata de la colocacion de los Palos, en que tambien consiste el perfecto govierno en todos los casos que pueden darse de variaciones de Velas, y esfuerzos del viento, verificados con exemplos prácticos; concluyendo con la fórmula general que encierra el todo de ellos.

El Cap.5. trata del balance y cabezada, asuntos en que, aun mas que en otros, se han padecido hasta ahora grandes equivocaciones, pues solo se han considerado dependientes del estado y disposicion del Buque, y en ninguna manera del volúmen y velocidad de la ola, que es la principal causa. Se dan primero las fórmulas, ó valor, no solo del tiempo en que da el Navío el balance, considerado como un simple péndulo, segun se ha hecho hasta aqui por todos los Autores, sino tambien de la velocidad, y de la accion que en él padecen los Palos y Buque. Se manifiesta que esta accion, que es la única á que se debe atender, no es precisamente en razon inversa de los tiempos, pues depende tambien de la magnitud del balance, y esta, considerado el Navío como péndulo, no resulta en modo alguno del tiempo; pero, lo que es mas, se hace evidente que la accion de los Palos y

el



el Buque está tan apartada de depender del tiempo en que se da el balance, que al contrario la máxîma que padecen es precisamente quando ya no se mueve el Navío, y está al punto de reponerse, ó de volverse á drisar. Se exâmina despues el balance que ocasiona la ola, y el tiempo en que esta debe pasar por debaxo del Navío: se manifiesta lo que contribuye la velocidad de aquella, y lo poco que alteran sus efectos las Velas. Se hace ver que aquel tiempo es grande con las olas chicas, que disminuye hasta un mínimo, y que despues vuelve á aumentar en olas mayores: de suerte, que en un Navío de 60 Cañones la ola que pasa mas prontamente por debaxo de él, es la de poco mas de 3 pies de alto; todas las demas, sean mayores ó menores, emplean mas tiempo. Se hace ver tambien la diferencia que hay entre las olas agitadas por un viento constante, y las que llaman los Marineros de *Leba*, que son las que subsisten despues de calmado el viento que las causó; y se evidencia el error á que indugeron estas, haciendo creer á *Mr. Bouguer* que los balances que daba la Fragata el *Triton* duraban siempre $4\frac{1}{2}$ segundos. Se demuestran despues los perjuicios que se siguieran de separar mucho del centro de gravedad los varios pesos de que se compone la carga del Navío, para dilatar el tiempo del balance, por motivo de que con ello se aumenta su velocidad y magnitud: y tambien, aunque resulta que fuera conveniente para lo mismo disminuir la distancia desde el centro de gravedad al metacentro, se concluye lo muy perjudicial que esto seria para que las olas pasaran

 por

por encima de la Embarcacion y la anegasen; punto que hasta ahora no se ha tenido presente, siendo sin embargo de los mas importantes, y que merecen el mayor cuidado. Con esto se exâmina despues la verdadera theórica del balance: se deduce el tiempo legítimo en que debe darle el Navio, combinando entre sí el que diera como tal péndulo, y como si sola la ola actuase; y se halla que el verdadero tiempo toma un medio entre aquellos dos: el Navío de 60 Cañones, por exemplo, se halla que diera su balance como péndulo en $2\frac{3}{4}$ segundos: y que por sola la causa de una ola de 9 pies de alto, fuera en 3, de lo que resulta el verdadero tiempo en que le dará con la misma ola de $2\frac{6}{7}$. Suponiendo que en el mismo Navío se separaran los pesos del centro, ó exe sobre que gira el Navío, de $\frac{2}{5}$ mas de lo que se suponen, solo aumentará el tiempo de medio segundo; y disminuyendo la distancia desde el metacentro al centro de gravedad á los $\frac{2}{3}$, solo aumentará el mismo tiempo de $\frac{1}{3}$ de segundo. Se determina despues la magnitud del balance, y se halla, que en el segundo caso en que se separasen los pesos, aumentara el balance de $\frac{2}{5}$ partes mas de lo que fuera en el primer caso: y en el tercero, en que se disminuyera la distancia desde el metacentro al centro de gravedad, aumentará asimismo la magnitud del balance de $\frac{1}{5}$ mas de lo que fue antes: ambas cantidades, que producen mas perjuicio que el beneficio que se logra por aumentar tan poco el tiempo. En efecto, hallada despues la fórmula que expresa la accion que padecen los Palos en el balance, y por ella la mí-

mínima que deben padecer, variando el tiempo en que como péndulo puede el Navío oscilar, se halla, que este tiempo debe ser igual al que emplea la ola en pasar por debaxo del Navío, ó en que diera este el balance por la sola causa de la ola. De esto se infiere, que para ganar esta ventaja fuera necesario variar la estiva para cada ola; lo que seria muy expuesto, sino imposible, en la práctica: por tanto se juzga que conviene disponer la estiva para un caso medio de olas que, por su magnitud, amenacen las arboladuras. Asi como se buscó la accion mínima que deben padecer estas por medio de variar el tiempo en que oscile el Navio como péndulo, se solicita tambien por medio de variar la distancia desde el centro de gravedad al metacentro, y se halla, que en esto no hay límite, y que quanto mayor sea aquella distancia, mas padecerán las arboladuras. Esto nos habia de inducir á disminuirla lo mas que fuera posible; pero á mas de que seria perjudicial para el aguante de Vela, hay tambien otro inconveniente no menos esencial á que atender, y es, que las mares pasaran por encima del Buque con mas facilidad. En efecto, buscando despues la altura á que llegarian las aguas en los costados, se da la fórmula que expresa esta elevacion, y se halla que será mayor, quanto menor sea la distancia entre el centro de gravedad y el metacentro; ó en una palabra, que dichas alturas serán como los quadrados de los tiempos en que los Navíos dieren sus balances: nuevo motivo porque no se deben aumentar estos con demasia. Para el Navìo de 60 Cañones, estivado en su regular, se halla

halla que la ola de 36 pies de alto se elevará sobre el costado $15\frac{1}{2}$ pies : apartando los pesos $\frac{2}{5}$ mas del exe de rotacion, se elevará de $21\frac{1}{3}$ pies ; y disminuyendo la distancia desde el centro de gravedad al metacentro á los $\frac{2}{3}$, se elevarán de 19 pies : con que no teniendo la borda ó costado del Navío sino solos 16 á 17 pies de alto, bien se ve, que en estos dos últimos casos las aguas pasaran por encima del Buque, anegandole de agua cada ola ; inconveniente grandísimo, que se hace forzoso precaver, renunciando un poco á la mayor seguridad de las arboladuras, pues si estas piden que el balance dure 4 ú 5 segundos, la elevacion de las olas no lo requieren, quando mas, sino de 3. Se halla que las Fragatas padecen aun mucho mas estas inundaciones, y por ello requieren que á proporcion tengan mayor la distancia entre el centro de gravedad y el metacentro : se dan exemplos de la ninguna atencion que á esto se tiene ; y se concluye dando reglas para asegurarse en punto tan principal, y con especificar casos en que pueden ser aun mucho mas extraordinarios y temibles los mismos balances. Sigue despues el Capítulo tratando de la cabezada. Con los mismos principios se halla el tiempo en que debe darla el Navío, considerado como péndulo, y se encuentra que es casi el mismo que aquel en que da el balance ; resulta por la qual parece que debieran inferirse en aquella las mismas conseqüencias que en este ; pero en la primera no fue necesario hacer atencion á la velocidad del Navío, como se hace preciso ahora. Se exâmina con ello el verdadero tiempo en que dará la cabezada,

y se halla que esta será menor, quanto mayor sea la velocidad del Navío: de suerte, que el de 60, navegando de bolina con 10 pies de velocidad, y siendo la ola de 9 pies de alto, dará su cabezada en una tercera parte de tiempo menos que la daria considerado como péndulo, y que fuera de 2 ¼ segundos. Se exâmina tambien despues la magnitud de la cabezada, su máxîma velocidad, y por fin, la accion que en ella padecen los Palos. La mínima que pueden padecer es en el caso de que el tiempo en que el Navío dé su cabezada, considerado como péndulo, sea igual al tiempo en que la diera por solo la causa de la ola: lo mismo que resultó en el balance; pero en este, el primer tiempo se halla menor que el segundo, y en la cabezada al contrario, el segundo es menor que el primero; por cuyo motivo, si en aquel se necesita separar los pesos del exe de rotacion para aliviar las arboladuras, en esta se necesita que se aproxímen, aliviando quanto fuere posible el peso de las cabezas. Igualmente se demuestra, que la accion de los Palos en las cabezadas es como los quadrados de las longitudes de los Navíos, y por tanto se evidencia la necesidad de no alargarlos mucho, por solo el fin de que anden algo mas. El disminuir la distancia desde el centro de gravedad al metacentro tambien conduce para lo propio; pero del mismo modo que en el balance, las elevaciones de las aguas en la Proa fueran en tal caso mayores: y tanto mas, quanto en estas acciones la velocidad del Navío contribuye mucho á producir mayor efecto. En el de 60 Cañones, navegando de bolina con 10 pies

de

de velocidad , se halla , que una ola de 9 pies de alto se eleva en la Proa mas de 9 pies , quando si no andara , no llegaria ni á 6. En el mismo caso , y con ola de 36 pies de alto , se elevaria el agua de 16 $\frac{3}{4}$ pies , supuesto el Navío parado ; y con el andar de 15 pies por segundo se elevara hasta 20 $\frac{4}{27}$: esto es, 3 pies mas que toda la altura del Buque. Esto concluye la necesidad de acortar Vela con vientos forzados, segun lo pra&ctican los Marineros , y la imposibilidad de llevar todo el Velámen, como lo pretende *Mr. Bouguer*. Quando las olas chocan por la Popa , la velocidad del Navío a&ctua todo al contrario , y conduce á disminuir la elevacion de las aguas : en el mismo caso de la ola de 36 pies , y velocidad del Buque de 15 por segundo , se halla , que solo deben elevarse las aguas de 10 $\frac{1}{2}$ pies ; quando allá se hallaron 20 $\frac{4}{5}$: cinco pies de mas velocidad en el Navío , solo disminuyeran lo altura de las aguas de $\frac{1}{2}$ pie ; lo que concluye la poca necesidad que hay yendo á Popa, de largar mucha Vela , por solo huir de las olas : basta haber largado la suficiente para llegar á lograr la velocidad de 15 , ó pocos mas pies. De la precisa mayor elevacion de las aguas que por estos motivos han de resultar en la Proa , se deduce claramente , que la altura del metacentro sobre el centro de gravedad , correspondiente á la parte de Proa , debe ser mayor que la correspondiente á la de Popa : ó porque dichas alturas dependen de las anchuras de los extremos , se hace conseqüente la precisa necesidad de que la Proa sea mas amplia ó voluminosa que la Popa : lo que siempre han practi-

ticado los Marineros, contra el general dictamen de los Geómetras, que siempre han querido Proas agudas para andar, sin reflexîonar que pueden ser la ruina de los Buques, y aun quizás pérdida de la misma perfeccion que solicitan. Despues de esto se concluye el Libro, tratando sobre la colocacion de la mayor anchura del Navío, y sobre la figura que deben tener sus Quadernas, para lograr igualmente la mayor perfeccion en los movimientos de las cabezadas.

El Libro 5, y último de la Obra, contiene una recopilacion de todos los antecedentes, abstraccion hecha de cálculos analíticos, á fin de poner el todo, en quanto sea posible, al alcance de los Marineros. El Cap. 1. trata de la fortaleza de los Navíos, del grueso de sus maderas, y de las medidas principales con que se deben construir: se demuestra la debilidad con que se construyen los Navíos, y la demasiada fortaleza que se da á las Fragatas, sin embargo de que á proporcion estan aquellos mucho mas sobrecargados de Artillería: y se dan reglas para construir con la debida proporcion; concluyendo con el méthodo de reglar los gruesos, pesos y fuerzas de las maderas quando se hicieren de distintos materiales.

El Cap. 2. trata de la magnitud de los Navíos: se hace patente lo que se ha aumentado modernamente sin gran necesidad, y las ventajas que de unas y otras medidas resultan; dando reglas para proporcionarlas, segun la Artillería que deban montar los Buques: de que se infiere lo mucho que conviene el que esta sea corta y ligera, no solo

para su mejor manejo, y desahogo del Navío, sino para su mayor fortaleza y duracion.

El Cap. 3. se estiende sobre el aguante de Vela, explicando lo ya dicho antecedentemente: se evidencia el error en que se cayera aumentando los aparejos de los Navíos grandes, como lo han pretendido algunos Marineros theóricos, por sola la razon de que es mayor su aguante de Vela. Se inquiere tambien la variacion del mismo aguante que debe resultar, variando qualesquiera medidas, peso, ó Buque del Navío: y el todo se ilustra con los exemplos necesarios.

El Cap. 4. trata del andar y rumbo que siguen las Naves: y como las fórmulas por donde se dedugeron las demostraciones, resultaron tan complicadas, se procura explicar el todo por construcciones geometricas, que se hacen muy facilmente inteligibles. El Cap. 5. se estiende sobre el govierno, explicando todas sus fuerzas, como ventajas en la colocacion de los Palos con igual méthodo: y ultimamente el 6 trata del balance y cabezada, con el aumento de varios exemplos, y atenciones para suavizarlos. Si sobre el todo se cuidare de consultar la práctica, se verá patentemente su legítima correspondencia con nuestra theórica: unico medio para acreditar la certeza de los principios sobre que se funda.

TA-

TABLA

De los Capítulos y asuntos.

LIBRO I.

CAPITULO I.

CAPITULO 2.

CAPITULO 3.

de

CAPITULO 4.

De los Péndulos.

Error

De

Ha-

CAPITULO 7.

ca-

CAPITULO 8.

CAPITULO 9.

Del

Del exe en peritrochîo.

Del Carrucho ó Moton.

LIBRO 2.

CAPITULO I.

La

CAPITULO 2.

CAPITULO 3.

De

CAPITULO 4.

CAPITULO 5.

Ha-

CAPITULO 6.

CAPITULO 7.

£

CAPITULO 8.

CAPITULO 9.

una

CAPITULO 10.

CAPITULO 11.

CAPITULO 12.

Re-

ER-

ERRATAS.

Pag.	*linea.*	*dice.*	*diga.*
10	6	corrieren	corriere
23	1	$(\int \alpha dt)^2 (\int \beta dt)^2$	$(\int \alpha dt)^2 + (\int \beta dt)^2$
36	19	$W^2 \int (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \&c) dg$	$W^2 = \frac{2\int (\alpha + \beta + \delta + \&c) dg}{M}$
40	5	B*u*	B*v*
48	15	la suma los	la suma de los
50	8	$\frac{B^2}{A^2}$	$\frac{B^2}{A^2}B$
64	22	GA	CA
71	13	*Cor.*2. *Prop.*18.	*Cor.*2. *Lema* 1.
75	15	ds	de
101	16	$m - v$	$u - v$
143	26	*Prop.*48.	*Cor.*2.
167	8	*Cor.*6.	*Cor.*5.
267	13	*Cor.*10.	*Cor.*5.
173	2	$\sqrt{1 - S^2}$	$\sqrt{1 - cof.\Sigma^2}$
192	20	*Cor.*6.	*Cor.*5.
241	18	EHIG	FHIG
245	28	*Propos.*14.	*Propos.*18.
341	10	*Prop.*48.	*Prop.*48. *Lib.*1.
402	2	G el centro	C el centro
307	20	conforme	uniforme

Apendice 1. pag. 409. lin. 5.

dice.

$$\left(\frac{P(Rue - Pg)(Rub + Pg) - P^3 (b+e)^2}{(Rue - Pg)^2 + P^2 (b+e)^2} - kh\right)^1$$

diga.

$$\left(\frac{P(Rue - Pg)(Rub + Pg) - P^3 (b+e)^2}{(Rue - Pg)^2 + P^2 (b+e)^2} - kh\right)^2$$

NOTA. En la Fig. 9. falta la K en la intersección de la perpendicular baxada desde *g* sobre FI.





EXAMEN MARITIMO THEORICO PRACTICO, ó TRATADO DE MECHANICA, aplicado á la CONSTRUCCION, CONOCIMIENTO, y manejo de los Navíos, y demas Embarcaciones.

LIBRO PRIMERO.

DE MECHANICA.

CAPITULO PRIMERO.

De las Definiciones, Axîomas, y principios del movimiento.

DEFINICION 1.

L*Ugar de un cuerpo* es el sitio, ó espacio que ocupa. Todos tenemos una idea clara, distinta y simple de él, y no puede explicarse mejor por voces: qualesquiera que se empleen en definirle, parece que confunden mas su inteligencia. Se divide el lugar en *absoluto*, y *relativo*.

DEFINICION 2.

Lugar absoluto es el que ocupa un cuerpo, respecto de todo el Universo, y sin relacion á los lugares que ocupan los demas. *Lugar relativo* es el que ocupa un cuerpo, respecto de los lugares que los otros cuerpos ocupan. En una Embarcacion que se mueve, sus cámaras y sus palos ocupan el propio lugar relativamente al todo de la Embarcacion; pero no relativamente á la costa, ó tierra: y así se dice, que el lugar relativo de las cámaras y palos es el mismo; pero no el absoluto, porque varía respecto del Universo.

DEFINICION 3.

Movimiento es la translacion de un cuerpo de un lugar á otro, ó la continua mutacion del lugar que tubiere. De esta suerte se dice, que un cuerpo se mueve, ó que está en movimiento, quando pasa de un lugar á otro, ó que continúa en mudar de lugar. Si permanece siempre en el mismo lugar, se dice, que está en reposo.

DEFINICION 4.

Como el lugar puede ser absoluto, ó relativo; tambien el movimiento puede ser absoluto, ó relativo. Quando el lugar, respecto del qual se hace el movimiento, es absoluto, el movimiento es tambien absoluto: y si el lugar fuere relativo, tambien lo será el movimiento. De esta suerte, un movimiento absoluto puede ser un reposo relativo. Las cámaras y palos de la Embarcacion tienen un movimiento absoluto, si esta se mueve; pero están en reposo relativamente á la misma Embarcacion.

DE-

DEFINICION 5.

Si el cuerpo se moviere conservandose siempre en una misma línea recta, se llama á esta línea, *direccion del movimiento.*

DEFINICION 6.

A la prontitud, ó acceleracion, con que executa su movimiento, se llama *velocidad*: y un cuerpo se dice, que tiene mas, ó menos velocidad, segun se moviere con mas, ó menos prontitud, ó acceleracion.

DEFINICION 7.

Como la velocidad depende del movimiento, y este es absoluto, ó relativo, tambien la velocidad es absoluta, ó relativa. Si el movimiento fuere absoluto, ó se hiciere respecto de un lugar absoluto, la velocidad será absoluta: y si relativo, relativa. De suerte, que una velocidad absoluta, puede ser un reposo relativo, ó ninguna velocidad relativa. Si la velocidad absoluta del cuerpo *A*, fuere *V*, y la del cuerpo *B*, en la misma direccion, fuere *u*, será la velocidad relativa de estos dos cuerpos $V \mp u$: el signo negativo quando se mueven ambos cuerpos hacia la misma parte, y el positivo quando se mueven hacia partes opuestas.

DEFINICION 8.

El movimiento se llama *uniforme*, quando la velocidad con que se mueve el cuerpo es siempre la misma. Se llama *accelerado*, quando la velocidad va en aumento, y *retardado*, quando disminuye, ó va á menos.

DEFINICION 9.

A la distancia que anduviere ó corriere el cuerpo con su movimiento, se llama *espacio corrido*. Puede ser en línea recta ó curva, segun las fuerzas que actuaren sobre él, y le obligaren á ponerse en movimiento, como se dirá mas adelante.

DEFINICION 10.

Si el movimiento fuere absoluto, tambien lo será el espacio corrido, y si relativo, relativo. Que sea E el espacio corrido por el cuerpo A, y e el corrido por el cuerpo B en una misma direccion ó línea, y tendremos $E \mp e$ por el espacio relativo: el signo menos quando se mueven ambos cuerpos hacia la misma parte, y el positivo quando se mueven hacia partes opuestas.

DEFINICION 11.

A la materia de que consta un cuerpo se dice *masa*: y el cuerpo se compone de mas, ó menos masa, segun tuviere mas, ó menos materia.

DEFINICION 12.

El cuerpo que, en iguales volúmenes, encierra iguales cantidades de masa, se llama igualmente denso: y si dos, ó mas cuerpos, encierran la misma masa en iguales volúmenes, se llaman de una misma densidad. Mas denso se llama el cuerpo que encierra mas masa en igual volúmen, ó que necesita menos volúmen para encerrar la misma cantidad de masa: y así, las densidades de los cuerpos, serán como sus masas,

en

en iguales volúmenes : ó en razon inversa de los volúmenes, en iguales cantidades de masa.

DEFINICION 13.

La fuerza que se imprime en qualquiera cuerpo, es la accion que se exerce en el mismo cuerpo para sacarle del estado en que se halla : ya sea de el de reposo al de movimiento, segun qualquiera direccion, ú de un movimiento á otro mayor ó menor, segun la direccion en que se mueve el cuerpo. A esta fuerza, qualquiera que sea, se llama *potencia*. Puede ser constante, ó variable; positiva, ó negativa.

DEFINICION 14.

Fuerza innata de la materia es la propiedad que tienen los cuerpos de resistir á mudar el estado de reposo, ú de movimiento en que se hallan.

Un cuerpo, que está en reposo, no puede ponerse en movimiento por una fuerza, qualquiera que sea, sin que se experimente otra opuesta procedente, como quiera, del cuerpo. No pudiera actuar la impelente sin resistencia, pues sin esta, sobre qué habia de exercerse? El cuerpo se pusiera en movimiento sin fuerza alguna, ó por sí mismo; lo que es imposible. Del mismo modo, no puede aumentarse, ó disminuirse el movimiento de un cuerpo, sin que la fuerza causal experimente su opuesta, por las propias razones. La experiencia manifiesta esta fuerza aun mas claramente : no hay mas que impeler, ó tirar un cuerpo, para sentir una accion semejante á la que exerciera una fuerza, qualquiera, opuesta. De qualquiera causa que dependa, ú de qualquiera suerte que actue, nos consta que existe, y esto basta para que la tomemos por principio. El Cavallero *Newton* le aplicó, asimismo,

el

el nombre de *inercia*, ú de *inaccion*; pero advirtiendo, que no le conviene propiamente este nombre, sino en el caso de pasar el cuerpo del reposo al movimiento, en que resiste tomar este, ó en el de aumentar qualquiera que tuviere; no en aquel en que, moviendose el cuerpo, una fuerza qualquiera actua para detenerle: la materia, en este caso, resiste á disminuir su movimiento, y por consiguiente, no le corresponde la inaccion. En general, esta fuerza innata es de resistir el mudar el estado en que se halla el cuerpo, y es una efectiva resistencia en caso de que al cuerpo se le impela para darle mayor movimiento; pero, al contrario, será impulso, quando qualquiera fuerza actue á disminuir el mismo movimiento.

DEFINICION 15.

La *cantidad de movimiento* es la medida que resulta del producto de la masa movida, por su velocidad.

Consistiendo el movimiento de un cuerpo, en la translacion de su masa, quando mayor fuere esta, mayor será su movimiento. Al mismo tiempo, tambien ha de ser mayor este, quanto mayor sea la velocidad con que se moviere: luego será la cantidad de movimiento en razon directa de su masa, y de su velocidad, ó como el producto Au, denotando A la masa, y u la velocidad.

Axioma I.

Todos los cuerpos perseveran en su estado de reposo, ú de movimiento uniforme, en la direccion, ó linea por donde se dirigen desde el principio, á menos que alguna fuerza ó potencia no los obligue á mudar de estado. El cuerpo no puede por sí mismo determinarse al movimiento, ó producir fuerza alguna para

mo-

moverse si estuviere en reposo ; al contrario, (*Def.* 14.) resiste al movimiento con su fuerza innata ú de inercia. Del mismo modo, no puede producirla, aun estando en movimiento, en qualquiera direccion, y la inercia le conserva en el propio estado, sin aumentar, ni disminuir su velocidad, ni sin desviarse por la propia razon de la primera direccion: luego debe perseverar en su estado de reposo, ú de movimiento uniforme en la direccion ó línea por donde se dirige el cuerpo desde el principio.

Corolario.

El cuerpo que se moviere con movimiento acelerado, ó retardado, será, pues, porque una potencia qualquiera actúa sobre él: positivamente, ó segun la direccion del mismo movimiento, en caso de ser este accelerado; y negativamente, ó en direccion opuesta, en caso de ser el movimiento retardado: de suerte, que del movimiento accelerado, al retardado, no hay mas diferencia, que actuar la potencia en el primero positivamente, y negativamente en el segundo: ó ser la misma potencia positiva, ó negativa.

Axîoma 2.

La alteracion, ú diferencial del movimiento, es siempre proporcional al producto de la potencia que la produce, por el tiempo que durare la accion: y se executa en la direccion que la potencia actúa. Si la potencia α, actuando la diferencial de tiempo dt, altera la velocidad que tubiere el cuerpo A de la diferencial du, de suerte que la alteracion, ú diferencial de movimiento sea Adu, otra potencia 2α, producirá la alteracion ú diferencial de movimiento $2Adu$: porque, por la suposicion, la sola α produce la diferen-

rencial du, y la otra α, nueva du relativa á la primera, cuya suma es $2du$, y por consiguiente, la alteracion ú diferencial de movimiento será $2Adu$. Por igual razon, 3α producirá la alteracion, ú diferencial $3Adu$; y asi en adelante. Del mismo modo, $\frac{1}{2}\alpha$ producirá $\frac{1}{2}Adu$, $\frac{1}{3}\alpha$, $\frac{1}{3}Adu$, y como antes asi en adelante: luego las alteraciones, ú diferenciales del movimiento, son siempre proporcionales á la potencia que las produce. Por otro lado, la diferencial de velocidad du es mayor, ó menor, segun el tiempo dt que la potencia actua, y lo mismo la alteracion de movimiento Adu: luego será esta alteracion ú diferencial en razon compuesta de la potencia α, y del tiempo dt, ó como el producto αdt. Que se execute en la direccion por donde se dirige la potencia consta del primer Axioma del movimiento.

Corolario.

Puesto que es Adu proporcional á αdt, tendremos $\alpha dt = Adu$.

Escolio 1.

Aunque hasta ahora no hayamos deducido sino la proporcionalidad entre Adu y αdt, se puede formar perfecta igualacion entre las dos cantidades, respecto que, aunque sea mayor ó menor la potencia, se puede disminuir, ó aumentar, en razon inversa la diferencial dt. Por la experiencia resulta despues la verdadera relacion entre estas cantidades.

Escolio 2.

Hay Autores que ponen en duda la proporcionalidad entre la fuerza, ó potencia actuante, y la diferen-

rencial de la velocidad, sin embargo que no es necesario para la evidencia si no considerar, como se ha dicho, que una potencia dupla es preciso que actue como dos simples, la segunda relativa á la primera. Todo su fundamento consiste en que se ignora la naturaleza de la causa, y el modo con que se actua. Pero escusaremos entrar en el exámen de esta diferencia, pues los mismos, aunque por distinta via, vienen á concluir con las propias equaciones que hemos dado, y son el principio de toda la Mechánica. Pretenden que el conocimiento de la potencia debe resultar de los efectos de ella; pero que no pueden concluirse los efectos por la potencia impulsiva determinada. Se hará, sin embargo, ver de donde puede depender el tropiezo.

Axioma 3.

La accion, y la reaccion, son iguales, ó las mutuas acciones de dos cuerpos, uno sobre otro, son iguales, y se dirigen á partes opuestas. Un cuerpo no puede impeler á otro, sin que este no impela á aquel con igual fuerza ó accion hacia la parte opuesta. Si se impele con cierta fuerza un obstáculo, este con contraria accion impele al agente: y si se tira otro con igual fuerza, el agente es igualmente tirado por el obstáculo en direccion contraria: es un Axioma que todos los dias se prueba con la experiencia.

PROPOSICION I.

Si un cuerpo se mueve uniformemente, ó con velocidad uniforme, los espacios corridos tienen entre sí la razon directa de los tiempos en que se corrieron.

No aumentando, ni disminuyendo el cuerpo su velocidad, correrá siempre el mismo espacio en el propio tiempo, duplo en duplo tiempo, triplo en triplo;

y asi en adelante: luego los espacios corridos tendrán la razon direĉta de los tiempos en que se corrieron.

PROPOSICION 2.

Si las velocidades con que se moviere un cuerpo uniformemente, fueren distintas, estarán los espacios que en iguales tiempos corrieren, en razon direĉta de las velocidades.

Porque si un cuerpo corre cierto espacio con cierta velocidad, ha de correr duplo con dupla velocidad, por consistir esta en el mayor espacio corrido en igual tiempo: correrá triplo espacio con tripla velocidad; y asi en adelante: luego los espacios corridos estarán en razon direĉta de las velocidades.

PROPOSICION 3.

Los espacios corridos por cuerpos que se mueven uniformemente, están en razon compuesta direĉta de los tiempos que corrieren, y de sus velocidades.

Sean dos cuerpos A y B, que se mueven uniformemente, aquel con la velocidad u, el tiempo t, y el espacio a: y este con la velocidad v, el tiempo T, y el espacio b: y respeĉto de que los espacios corridos en iguales tiempos, son como las velocidades, tendremos $u : v = a : \frac{av}{u}$, espacio que corriera el cuerpo B, en el tiempo t, que corrió el cuerpo A: y porque tambien están los espacios que se corren con iguales velocidades, en razon direĉta de los tiempos, será $t : T = \frac{av}{u} : b$: luego $aTv = btu$, ó $a : b = tu : Tv$: esto es, los espacios están en razon compuesta direĉta de los tiempos, y de las velocidades.

Corolario 1.

Será, asimismo, $\frac{b}{Tv} = \frac{a}{tu}$: con que si hacemos $\frac{b}{Tv} = 1$, suponiendo que sean cantidades constantes b, T, y v, tendremos $1 = \frac{a}{tu}$: lo que dá $u = \frac{a}{t}$: esto es, la velocidad de un cuerpo estará en razon directa del espacio corrido, y en inversa del tiempo.

Corolario 2.

Del mismo modo $t = \frac{a}{u}$: esto es, estará el tiempo en que corre un cuerpo el espacio a, en razon directa de este espacio, y en inversa de la velocidad.

Corolario 3.

Si se expresa el tiempo t por segundos, y se toma uno de ellos por la unidad, será, en el caso de $t = 1$, $u = a$: esto es, la velocidad igual al espacio corrido en un segundo de tiempo: por lo que, expresando el tiempo por segundos, la medida de la velocidad será el espacio corrido en un segundo de tiempo.

Corolario 4.

El movimiento accelerado, ó retardado, se puede suponer uniforme por un instante ó diferencial de tiempo dt: pues en este instante, la acceleracion de velocidad, siendo una diferencial, es cero, respecto de la velocidad adquirida u. Si fuere, pues, da la diferen-

cial del espacio corrido en este instante de tiempo dt, tendremos (*Prop.*3. *Cor.*1.) $u = \frac{da}{dt}$: y $da = udt$.

PROPOSICION 4.

El exceso, ú defecto de velocidad, con que se mueve un cuerpo á qualquiera instante de su carrera, es $= \frac{1}{A}\int \alpha dt$. respecto á la velocidad primitiva

á contando desde el primer instante de la accion ó del tiempo, t, en que empieza el movimiento á mudarse la velocidad, por razon de una fuerza acelerativa qualquiera.

Que sea V la velocidad primitiva con que se mueve el cuerpo al primer instante de la accion ú del tiempo t: é integrando la igualacion $\frac{\alpha dt}{A} = du$, (*Cor.Ax.*2.) tendremos $\frac{1}{A}\int \alpha dt = u - V$: esto es, el exceso, ú defecto de velocidad, será siempre $= \frac{1}{A}\int \alpha dt$.

Corolario 1.

Si fuere la potencia α constante, será $\frac{\alpha t}{A} = u - V$: esto es, el exceso, ú defecto de velocidad, será en razon compuesta directa de la potencia y el tiempo, y en inversa de la masa.

$u - V = t$

Corolario 2.

Si fuere $V = o$: esto es, si el cuerpo estuviere en reposo al primer instante de tiempo, ó empezare su carrera desde el reposo, será $\frac{1}{A}\int \alpha dt = u$: y si fuere α constante $\frac{\alpha t}{A} = u$.

$u = t$

CO-

Corolario 3.

Si al contrario, el cuerpo, despues de puesto en movimiento, llegare al estado del reposo, como puede suceder en el movimiento retardado, será $u = o$: luego $\frac{\alpha t}{A} = -V$: ó mudando el signo á la potencia, por ser el movimiento retardado, será $\frac{\alpha t}{A} = V$.

Corolario 4.

La velocidad adquirida en el movimiento accelerado que empieza desde el reposo es $u = \frac{\alpha t}{A}$, y la perdida enteramente en el retardado $V = \frac{\alpha t}{A}$: luego serán estas iguales, si iguales potencias α actuan el propio tiempo t, sobre iguales masas A.

PROPOSICION 5.

El espacio corrido por un cuerpo desde el primer instante de su carrera, será $= Vt + \frac{1}{A}\int dt \int \alpha dt$.

Siendo (*Prop.* 3. *Cor.* 4.) $u = \frac{da}{dt}$, será tambien (*Prop.* 4.) $\frac{1}{A}\int \alpha dt = \frac{da}{dt} - V$, que dá $\frac{da}{dt} = V + \frac{1}{A}\int \alpha dt$, ó $da = Vdt + \frac{dt}{A}\int \alpha dt$: é integrando $a = Vt + \frac{1}{A}\int dt \int \alpha dt$: esto es, el espacio corrido desde el primer instante de tiempo, será $= Vt + \frac{1}{A}\int dt \int \alpha dt$.

Corolario 1.

Si la potencia α fuere constante, será $a = Vt + \frac{\alpha t^2}{2A}$.

Corolario 2.

Si el cuerpo empezare su carrera desde el reposo, será $V = o$, y $a = \frac{1}{A}\int dt \int \alpha dt$; ó si fuere α constante $a = \frac{\alpha t^2}{2A}$: esto es, los espacios corridos serán como los quadrados de los tiempos; y al contrario, si los espacios fueren como los quadrados de los tiempos, las potencias serán constantes.

Corolario 3.

Substituyendo en este caso $u = \frac{\alpha t}{A}$, que hallamos, (*Prop.* 4. *Cor.*2.) será tambien $a = \frac{1}{2}tu$: esto es, los espacios corridos desde el reposo, son en razon directa de los tiempos, y de las velocidades adquiridas.

Corolario 4.

El espacio corrido por una velocidad uniforme u, en el tiempo t, es (*Prop.* 3. *Cor.* 1.) $a = tu$: luego el espacio corrido en el mismo tiempo por una velocidad uniforme, es duplo del espacio corrido por un movimiento accelerado que empieza desde el reposo, quando la velocidad adquirida en este es la misma.

CO-

Corolario 5.

En el movimiento accelerado, que empieza desde el reposo, siendo la potencia α constante, es $a = \frac{\alpha t^2}{2A}$: y en el retardado $a = Vt - \frac{\alpha t^2}{2A}$, ó si llega este hasta el reposo, á causa de ser en este caso (*Cor.* 4. *Prop.* 4.) $V = \frac{\alpha t}{A}$, es $a = \frac{\alpha t^2}{A} - \frac{\alpha t^2}{2A} = \frac{\alpha t^2}{2A}$: luego el espacio corrido con el movimiento accelerado, que empieza desde el reposo, y el corrido en el retardado, que llega al mismo reposo, serán iguales si iguales y constantes potencias α actuan el mismo tiempo t, sobre iguales cuerpos A.

PROPOSICION 6.

El espacio corrido por un cuerpo desde el primer instante de su carrera es $A\int\frac{udu}{\alpha}$.

Siendo (*Cor.* 4. *Prop.* 3.) $\frac{da}{dt} = u$, y (*Cor. Ax.* 2.) $\frac{\alpha dt}{A} = du$, será, multiplicando estas dos igualaciones, $\frac{\alpha da}{A} = udu$: que dá $da = \frac{A}{\alpha}udu$: y $a = A\int\frac{udu}{\alpha}$.

Corolario 1.

Si la potencia α fuere constante, será $a = \frac{A}{2\alpha}(u^2 - V^2)$.

Corolario 2.

Si el movimiento hubiere empezado á contarse desde el reposo, ó fuere $V=o.$, será $a=\frac{Au^2}{2\alpha}$: esto es, quando la potencia α es constante, los espacios corridos desde el reposo, son como los quadrados de las velocidades.

1. Principio de experiencia.

Han manifestado estas, que los cuerpos graves en distancias cortas, próxîmas á la superficie de la tierra, corren, cayendo desde el reposo, espacios, que son como los quadrados de los tiempos en que los corren.

Corolario 1.

La potencia ó fuerza que anima á los cuerpos graves, en las proxîmidades á la superficie de la tierra, y que llamamos gravedad, es por consiguiente (*Cor.* 2. *Prop.* 5.) constante.

Corolario 2.

Tendremos, pues, en el caso de los cuerpos graves, que caen desde el reposo, $u=\frac{\alpha t}{A}$, $a=\frac{\alpha t^2}{2A}=\frac{Au^2}{2\alpha}$.

2. Principio de experiencia.

Ha manifestado tambien esta, que todos los cuerpos graves, grandes, ó chicos, en las proxîmidades á la superficie de la tierra, corren iguales espacios en iguales tiempos.

CO-

Corolario 1.

Si fueren, pues, α y β las potencias constantes que animan los cuerpos A, y B, será, segun esta experiencia $\frac{\alpha t^2}{2A} = \frac{\beta t^2}{2B}$, ó por suponerse los tiempos iguales $\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B}$: que dá $\alpha : \beta = A : B$: esto es, en los cuerpos graves las potencias ó gravedades son como las masas.

Corolario 2.

Siendo, asimismo, (*Def.* 12.) las densidades, en iguales volúmenes, como las masas, serán tambien las densidades, en iguales volúmenes, como las gravedades: con que se puede expresar la densidad de los cuerpos graves por el peso de un pie cúbico de ellos.

Corolario 3.

Será siempre constante la cantidad $\frac{\alpha}{A}$; y podemos poner en su lugar la constante ξ: con lo que serán en los cuerpos graves $u = \xi t$, $a = \frac{1}{2}\xi t^2 = \frac{u^2}{2\xi}$.

3. Principio de experiencia.

Ha enseñado, asimismo esta, que el espacio que corren los cuerpos graves, cayendo verticalmente desde el reposo en las proximidades á la superficie de la tierra; es, con muy corta diferencia, de 16 pies Ingleses en un segundo.

Corolario 1.

Midiendo el tiempo de las caidas por segundos, y los espacios corridos por pies, tendremos para el caso de $t = 1$, $a = 16$: lo que produce (*Cor.* 3. *Prin.* 2.) $16 = \frac{1}{2}\xi$, ó $\xi = 32 = \frac{a}{A}$. Este valor substituido en las equaciones (*Cor.* 3. *Prin.* 2.) las reduce á $u = 32t$, $a = 16t^2 = \frac{u^2}{64}$: de que resultan $\sqrt{a} = 4t = \frac{1}{8}u$, y $8\sqrt{a} = u = 32t$.

Corolario 2.

Si, mas exâcta y generalmente, se supone K igual al espacio corrido por un cuerpo grave desde el reposo, cayendo verticalmente en el tiempo de un segundo, será $K = \frac{1}{2}\xi$, ó $\xi = 2K$. Este valor substituido en las equaciones (*Cor.* 3. *Prin.* 2.) las reduce á $u = 2Kt$, $a = Kt^2 = \frac{u^2}{4K}$: de que resulta $\sqrt{a} = \frac{u}{2\sqrt{K}} = t\sqrt{K}$, y $2\sqrt{aK} = u = 2Kt$.

Escolio.

Ya se deducirá á su tiempo el verdadero espacio que corren los cuerpos graves cayendo libremente, y se verá, que es algo mayor que el asignado de los 16 pies Ingleses por segundo; no obstante, como la diferencia es corta, y no produce error considerable en los cálculos que necesitamos, se puede hacer uso de este número quadrado, que facilita mucho las operaciones.

este espacio es de 16,095 mui poco menos en pies ingleses o [illegible] valuado en pies franceses, siendo [illegible]

CA-

CAPITULO 2.

Del movimiento compuesto.

DEFINICION 16.

Movimiento compuesto es el que resulta en un cuerpo, por la accion de dos, ó mas potencias, que actuan sobre él en distintas direcciones.

PROPOSICION 7.

El movimiento por una direccion, no se altera por las acciones que se le impriman á un cuerpo, segun qualesquiera otras direcciones: y á cada instante de tiempo describe el cuerpo pequeños espacios, paralelos á cada una de las direcciones.

Si el cuerpo A está sobre un plano EF, puede moverse sobre él en la direccion AG, y al mismo tiempo moverse el plano segun el EH, GI, sin perturbarse una accion á la otra; porque no suponiendose potencia alguna que perturbe el movimiento segun AG, debe, en virtud de la inercia, continuar sin alteracion. Lo mismo que se dice de dos acciones, se puede decir de muchas mas: luego el movimiento por una direccion no se altera por las acciones que se le impriman á un cuerpo, segun qualesquiera otras direcciones: y á cada instante de tiempo describe el cuerpo espacios, segun AG y EH, paralelos á cada una de estas direcciones. Fig. 1.

PROPOSICION 8.

Si dos potencias actuan á un tiempo en el cuerpo A, la primera segun la direccion AE, y la segunda Fig. 2.

segun la AF, el cuerpo correrá por una línea media AGH: cuya equacion se deducirá de la igualacion de los valores del mismo tiempo en que corriera el cuerpo libremente por cada una de las dos direcciones.

En qualquiera tiempo de su carrera debe moverse el cuerpo paralelamente á AE en virtud de la primera accion, y asimismo paralelamente á AF en virtud de la segunda, por espacios GI, IH iguales á KE, LF, que son las diferenciales de los que corriera libremente con cada accion separada; pero la suma de los KE, es la abcisa AK, y la suma de los LF = IH, es la ordenada EH: luego si igualamos los dos valores del tiempo, por ser el mismo, en que el cuerpo corriera cada espacio AK, EH libremente, esta igualacion nos dará la equacion á la línea AGH que el cuerpo correrá.

Exemplo 1.

Supongamos que el movimiento del cuerpo A se componga de dos que, separados, hubieran resultado uniformes: uno cuya direccion fuera AE, expresandose los espacios corridos por a, y la velocidad por u: y otro cuya direccion fuera AF, expresandose los espacios corridos por b, y la velocidad por v. Con esto tendremos (*Cor.* 2. *Prop.* 3.) $t = \frac{a}{u} = \frac{b}{v}$, que da $av = bu$, cuya equacion, siendo las velocidades constantes, por ser en movimientos uniformes, es á la línea recta: y así el movimiento compuesto que en este caso tomará el cuerpo será por una línea recta.

Exemplo 2.

Supongamos que el movimiento AE, no fuera uniforme, sino procedido de una potencia constante. En

este

este caso tenemos (*Cor.* 1. *Pro.* 5.) $a = Vt + \frac{at^2}{2A}$, ó subs-tituyendo $t = \frac{b}{v}$, y ordenando $\frac{2Av^2}{a} \cdot \left(a - \frac{Vb}{v}\right) = b^2$: equacion á la parábola, cuyo parámetro es $\frac{2Av^2}{a}$: y así esta será la curva que describirá el cuerpo con el movimiento compuesto.

Corolario 1.

De lo dicho se sigue, que el cuerpo con el movimiento compuesto correrá en el mismo tiempo la AG, que corriera la AK, ó AL, en virtud de la accion de una sola potencia.

Corolario 2.

La direccion compuesta AGH debe hallarse en el mismo plano en que están las dos direcciones AK, AL: porque si de qualquiera punto de esta direccion se tira una paralela á la AK, todas estas compondrán el plano en que se hallan las dos direcciones: y como el cuerpo debe hallarse siempre en estas paralelas, sin poderse desviar de ellas, (*Axio.* 1.) se sigue, que debe conservarse en el plano en que están las dos direcciones.

Corolario 3.

Si fuerên tres las acciones y potencias que á un mismo tiempo concurran en distintas direcciones, la compuesta será una línea media entre las tres: cuya equacion se deducirá por la igualacion de los valores del mismo tiempo en que correrá el cuerpo libremente por cada direccion.

Es

Es evidente, pues, (*Cor.* 2.) que con dos direcciones se halla otra media que debe resultar, y con esta y la tercera, la que efectivamente seguirá el cuerpo.

Corolario 4.

Si las tres direcciones se hallasen en un mismo plano, tambien la resultante se hallará en el mismo plano: es evidente de lo dicho.

Corolario 5.

Lo mismo que se dice de tres, se debe entender de quatro, cinco, ó mas potencias que concurran en actuar sobre un cuerpo con distintas direcciones.

PROPOSICION 9.

La diferencial GH del espacio, que el cuerpo A describiera en virtud de la accion de dos potencias α y β, que lo animaran, segun las dos direcciones AE, AF, es $= \frac{dt}{A}\left((\int \alpha dt)^2 + (\int \beta dt)^2 \pm 2(\int \alpha dt)(\int \beta dt) Cos \Sigma\right)^{\frac{1}{2}}$ expresando Σ el ángulo EAF que forman entre sí las dos direcciones, siendo el radio la unidad.

Baxese del punto G, sobre la EH, la perpendicular GN, y será, por los elementos de Geometría, $NI = GI\, Cos\Sigma$, y $GH^2 = GI^2 + IH^2 \pm 2NI.\, IH = GI^2 + IH^2 \pm 2IH.\, GI\, Cos\Sigma$: el signo mas para quando fuese el ángulo EAF obtuso, y el signo menos para quando fuese agudo.

Substitúyanse en la equacion los valores de $GI =$ $da = $ (*Prop.* 5.) $\frac{dt}{A}\int \beta dt$, y será $GH^2 = \frac{dt^2}{A^2}(\int \alpha dt)^2 + \frac{dt^2}{A^2}(\int \beta dt)^2 \pm \frac{2dt^2}{A^2}(\int \alpha dt)(\int \beta dt)\, Cos\Sigma$: y $GH = \frac{2d}{A}$

$$\frac{dt}{A}\left((\int \alpha dt)^2 + (\int \beta dt)^2 \pm 2 (\int \alpha dt)(\int \beta dt) \, Cos \, \Sigma \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Escolio I.

En todo el discurso de la Obra, expondremos siempre el radio por la unidad, á fin de facilitar el cálculo.

Corolario I.

Si el ángulo EAF fuere $= o$: esto es, si las dos direcciones AE, AF concurriesen y formasen una misma direccion, quedará GH $=$ ------

$$\frac{dt}{A}\left((\int \alpha dt)^2 + (\int \beta dt)^2 \pm 2 (\int \alpha dt)(\int \beta dt)\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{dt}{A}\int dt \, (\alpha \pm \beta).$$

Corolario 2.

Si á mas de esta condicion fuere $\beta = \alpha$, será GH $= \frac{2dt}{A}\int \alpha dt$, en caso de ser el ángulo GIH obtuso, ú dirigirse las dos potencias hacia la misma parte; y GH $= \frac{dt}{A}\int dt. \, o = o$, en caso de ser el ángulo GIH agudo, ú dirigirse las dos potencias hacia partes opuestas, ó contrarias direcciones.

Corolario 3.

El cuerpo quedará, pues, en este ultimo caso, sin movimiento.

Corolario 4.

Si el cuerpo queda sin movimiento, será porque potencias iguales actuan en opuestas direcciones.

Es-

Escolio 2.

Del mismo modo que se halla el valor de *GH* quando actuan dos potencias, se halla quando actuan tres, ó mas.

DEFINICION 17.

Descomposicion del movimiento es la division que se hace de un movimiento, por suponer que proceda de varias acciones, quando en realidad no procede sino de una, ú de mayor número que el que se supone.

PROPOSICION 10.

Fig. 3. Si la accion de una potencia α sobre el cuerpo A, en la direccion AH, se supone que proceda de dos $m\alpha$, $n\alpha$ que actuen en las direcciones AE, AF, y que hagan igual efecto que la sola α, serán α, $m\alpha$ y $n\alpha$, como AH, AE y AF, líneas terminadas por las paralelas á las direcciones HE, HF, expresando m y n dos cantidades constantes.

Porque si dos potencias $m\alpha$ y $n\alpha$ actuan sobre el cuerpo A, segun las direcciones AE, AF, y son tales, que en igual tiempo conducen al cuerpo, la una de A á E, y la otra de A á F, las dos juntas le conducirán en igual tiempo de A á H, (*Prop.* 8.) que es el efecto que produce la sola potencia α, actuando en la direccion AH. Pero (*Propos.* 5.) es $AH = \frac{dt}{A}\int \alpha dt$, $AE = \frac{dt}{A}\int m\alpha dt$, y $AF = \frac{dt}{A}\int n\alpha dt$: luego serán AH, AE, y AF, como $\frac{dt}{A}\int \alpha dt$, $\frac{mdt}{A}\int \alpha dt$, y $\frac{ndt}{A}\int \alpha dt$, ó como 1, m y n; esto es, como α, $m\alpha$ y $n\alpha$.

CO-

Corolario 1.

La potencia que actua segun AE, será pues $\frac{\alpha.AE}{AH}$: y la que actua segun AF, $\frac{\alpha.AF}{AH}$.

Corolario 2.

Como en el triángulo AEH, los lados AH, AE, y EH=AF son entre sí, como los senos de los ángulos opuestos, serán tambien las potencias α, *ma*, *na*, como estos senos.

Corolario 3.

Como es arbitraria la descomposicion del movimiento, se pueden tomar como quiera las direcciones AE, AF, y tirando de un punto qualquiera H las paralelas HE, HF, si AH expresa la potencia que actua efectivamente, las AE, AF expresarán las dos en que se descompone aquella, y que producirán igual efecto.

PROPOSICION II.

Si la accion de una potencia que actua sobre un cuerpo A en la direccion AH, se supone que proceda de tres, que haciendo el mismo efecto actuen en las direcciones AF, AG, AE, serán las quatro potencias entre sí, como AH, AF, AG, y AE. Fig.4.

Porque si la potencia que actua segun AH, se representa por la misma AH, esta se puede descomponer (*Cor.* 3. *Prop.* 10.) en dos que hagan el mismo efecto AF, AI: y la que actua segun AI en otras dos que hagan el mismo efecto AG, AE, con lo que se habrá descompuesto la potencia AH en tres que hacen el mis-

mo efecto AF, AG, AE: por lo que las quatro potencias serán entre sí, como AH, AF, AG, y AE.

Corolario 1.

Las tres direcciones AF, AG, AE quedan arbitrarias (*Cor*.3. *Prop*.10.): pueden tomarse como quiera, y tirando de un punto qualquiera H, las paralelas HF, AI, HI, IG, IE, se tendrán las AF, AG y AE, que expresarán las potencias en que se descompone la primera AH.

Corolario 2.

De la misma manera se puede descomponer una potencia en quatro, cinco, ó las que se quieran, que hagan igual efecto.

CAPITULO 3.

Del centro de gravedad de un Systhema de cuerpos: y de su movimiento.

DEFINICION 18.

A Una coleccion de cuerpos, como *A, B, C* &c. se la ha dado el nombre de *Systhema de cuerpos*, por la semejanza que tiene con el Systhema del Mundo, compuesto de varios cuerpos, como el Sol, y Planetas, cuyos movimientos ha explicado con tanta propiedad el Cavallero *Newton* con solos los principios de Mechánica, y la ley de la atraccion general, que cada dia verifica mas y mas la experiencia.

PRO-

PROPOSICION 12.

Si dos cuerpos ó masas A y B se mueven desde el reposo por dos potencias α y β, cuyas direcciones AE, BF sean paralelas, la diferencial del espacio corrido por el punto G en la línea Gg, paralela tambien á las direcciones AE, BF de las potencias, será $= \frac{\text{A}Adt\int\beta dt + \text{B}Bdt\int\alpha dt}{\text{AB}.(A+B)}$: expresando A y B las distancias AG, GB, y t el tiempo. Fig. 5.

Tirada la FH, paralela á la BA, llamando a y b á los espacios corridos por los cuerpos A y B, y siendo AE y BF dos diferenciales de dichos espacios: será HE $= da - db$: y FH $(A+B)$: HE $(da-db) =$ Fh (B): hg $= \frac{B}{A+B}(da-db)$: de que se deduce Gg, diferencial del espacio corrido por el punto G, $= db + \frac{B}{A+B}(da-db) = \frac{Adb+Bda}{A+B}$: en cuya expresion, substituyendo (*Prop.* 5.) $db = \frac{dt}{\text{B}}\int\beta dt$, y $da = \frac{dt}{\text{A}}\int\alpha dt$, resulta Gg $= \frac{\frac{Adt}{\text{B}}\int\beta dt + \frac{Bdt}{\text{A}}\int\alpha dt}{A+B} = \frac{\text{A}Adt\int\beta dt + \text{B}Bdt\int\alpha dt}{\text{AB}.(A+B)}$.

Escolio.

Se supone, por ahora, que la masa de cada cuerpo sea infinitamente pequeña, ó que esté toda congregada en un punto: y que sobre este se exercite la potencia.

Corolario 1.

Si fuere $AA = BB$, será Gg, diferencial del espacio corrido por el punto $G = \frac{dt\int(\alpha + \beta)\, dt}{A + B}$: pues substituyendo $BB = AA$, es $Gg = \frac{AAdt\int\beta dt + BBdt\int\alpha dt}{AB.\,(A + B)} = \frac{AAdt\int\beta dt + AAdt\int\alpha dt}{A.\,(AB + AA)} = \frac{dt\int(\alpha + \beta) dt}{A + B}$.

Corolario 2.

Como en esta expresion se hallan excluidas las distancias *A* y *B*, no alteran estas el valor de la expresion, que siempre será la misma, disten los cuerpos A y B lo que se quisiere del punto G, con tal que se mantengan las distancias *A* y *B* en razon inversa de las masas A y B.

Corolario 3.

Puédense suponer disminuidas al infinito las cantidades GA, GB; esto es, suponerse iguales á cero, y quedará la expresion la misma. En este caso los dos cuerpos estarán unidos en el punto G, y correrán por la Gg: y lo mismo las dos potencias que actuan como una $= \alpha + \beta$, sobre el cuerpo $A + B$: luego el mismo espacio correrá el punto G en la Gg paralela á las direcciones AE, BF, quando los cuerpos A y B fueren animados por las potencias α y β, que quando los cuerpos unidos en G fueren animados por la Gg con la potencia $\alpha + \beta$.

PROPOSICION 13.

Fig. 6. Si fueren tres los cuerpos ó masas, como A, B, C, im-

impelidos por las potencias α, β y γ, segun las paralelas AE, BF, CH: la diferencial corrida por el punto G, tomado de suerte que sean A. Ag = B. gB y (A + B). gG = C. GC, será $= \frac{dt\int(\alpha+\beta+\gamma)dt}{A+B+C}$.

Tomado el punto g de suerte que sea A.Ag = B.gB, la diferencial corrida por el punto g es la misma que resultara si estando en g el cuerpo A + B, fuera animado por la potencia $\alpha + \beta$, segun la direccion gh, paralela á las AE, BF y CH: con que para el efecto se reduce el caso al mismo que si los dos cuerpos C y A + B, el uno en C, y el otro en g, fueran animados por las potencias γ, y $\alpha + \beta$, segun las direcciones paralelas CH, gh: y asi la diferencial corrida por el punto G en la paralela GI á las otras direcciones, tomado de suerte que sea (A + B). gG = C. GC, ó las distancias gG, GC en razon inversa de las masas A + B y C, será la que expresa la fórmula $\frac{dt\int(\alpha+\beta)dt}{A+B}$, substituyendo en ella $\alpha + \beta$ por α, A + B por A, γ por β, y C por B: será, pues, la diferencial corrida por el punto G en la paralela GI á las direcciones AE, BF, CH, $= \frac{dt\int(\alpha+\beta+\gamma)dt}{A+B+C}$.

Corolario I.

No hallandose tampoco en la expresion $\frac{dt\int(\alpha+\beta+\gamma)dt}{A+B+C}$ las distancias Ag, gB, gG, GC: se sigue, que tampoco alterarán estas distancias la expresion; y que quedará siempre la misma, con tal que sean Ag, gB en razon inversa de las masas A y B: y lo mismo gG, GC en razon inversa de las masas A + B y C.

CO-

Corolario 2.

Puédense disminuir las distancias Ag, gB, gG, GC al infinito, ó quedar cero, sin que se haya alterado el valor de la expresion $\frac{dt\int(\alpha+\beta+\gamma)dt}{A+B+C}$: y como en este caso los tres cuerpos A, B, C quedarian unidos en G, y lo mismo las tres potencias α, β y γ: se sigue, que el mismo espacio correrá el punto G, en la GI paralela á las direcciones AE, BF, CH, quando los cuerpos A, B y C fueren animados por las potencias α, β, y γ, que si los tres cuerpos unidos en K fueran animados por la KI con la potencia $\alpha+\beta+\gamma$.

PROPOSICION 14.

Fig. 7. Si fueran los cuerpos ó masas quatro, como A, B, C, D, impelidos por las quatro potencias α, β, γ, δ, cada una á su correspondiente, segun las paralelas AE, BF, CH, DL: la diferencial corrida por el punto G, tomado de suerte que sean $A.Ag = B.Bg$, $(A+B)gK = C.KC$, y $(A+B+C).KG = D.DG$, será $\frac{dt\int(\alpha+\beta+\gamma+\delta)dt}{A+B+C+D}$.

La diferencial corrida por el punto K, en virtud de las tres potencias $\alpha+\beta+\gamma$ que animan los cuerpos A, B y C, es, por lo dicho en el número antecedente, la misma que corriera si los tres cuerpos unidos en K fueran animados por la potencia $\alpha+\beta+\gamma$ segun la direccion KI paralela á las otras: luego para el efecto se reduce el caso al mismo que si solos dos cuerpos D y $A+B+C$, el uno en D, y el otro en K, fueran animados por las potencias δ y $\alpha+\beta+\gamma$, segun las direcciones paralelas á las otras: y asi, la diferencial corrida por el punto G, tomado de suerte que sea $(B+A+C).KG = D.DG$, ó las distancias KG,

KD

GD en razon inversa de las masas ($A+B+C$) y D, será la que expresa la fórmula $\frac{dt\int(\alpha+\beta)dt}{A+B}$, subs-tituyendo en ella $\alpha+\beta+\gamma$ por α, $A+B+C$ por A, δ por β, y D por B: será, pues, la diferencial corrida por el punto G en la paralela GH á las otras direcciones $\frac{dt\int(\alpha+\beta+\gamma+\delta)dt}{A+B+C+D}$.

Corolario 1.

Lo mismo se concluirá, aunque sean cinco, seis, ó infinitos los cuerpos ó masas: de suerte que, en general, la diferencial corrida por el punto G, tomado en la conformidad expresada, será $=\frac{dt\int(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&)dt}{A+B+C+D+\&}$: la misma que resultará si, unidos todos los cuerpos ó masas en el punto G, fueran animados por la potencia $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&$; pues en la expresion no se hallan las distancias de unos cuerpos respecto de otros, y estas se pueden disminuir al infinito, ó hacerlas cero, sin que por ello se altere la expresion.

Corolario 2.

Si hacemos la suma de las potencias $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&=\pi$: y la suma de las masas $A+B+C+D+\&=M$: tendremos tambien la diferencial corrida por el punto G, tomando en la conformidad expresada, (*Prop.* 12. 13. 14.) $=\frac{dt\int\pi dt}{M}$.

PROPOSICION 15.

Si el punto G está tomado de suerte que sea Fig. 8.
A.

$A.AG = B.BG$; y á un plano qualquiera FE se baxan las perpendiculares AE , Gg , BF , será $gG = \frac{A.AE + B.BF}{A + B}$.

Tirado por G , el plano HI paralelo al EF , será el producto $A.AE = A.(Gg + HA)$, y el producto $B.BF = B.(Gg - IB)$: con que los dos productos $A.AE + B.BF$ serán iguales á $(A + B).Gg + A.HA - B.IB$; pero la semejanza de los triángulos AHG, BIG, dá $AG : AH = GB : IB$: luego $IB = \frac{AH.GB}{AG}$, cuyo valor substituido en la equacion antecedente , dá $A.AE + B.BF = (A + B).Gg + A.HA - \frac{B.AH.GB}{AG}$: que se reduce , poniendo en lugar de B.BG su igual A.AG, á $A.AE + B.BF = (A + B).Gg + A.HA - A.AH = (A + B).Gg$: luego $gG = \frac{A.AE + B.BF}{A + B}$.

Corolario I.

Si en lugar de las masas A y B , se toman las potencias α y β de suerte que sea $\alpha.AG = \beta.BG$, tambien será $Gg = \frac{\alpha.AE + \beta.BF}{\alpha + \beta}$.

PROPOSICION 16.

Fig. 9. Si fueren tres los cuerpos ó masas como A , B, C, tirado el plano qualquiera FI , y baxadas á él las perpendiculares BF , AE , CI , &c , si se tomare el punto G de suerte, que sean $A.Ag = B.Bg$, y $(A + B).gG = C.CG$, será $GH = \frac{A.AE + B.BF + C.CI}{A + B + C}$.

Sien-

Siendo $(A+B)$. $gG = C.CG$, es (*Prop.* 15.) $(A+B)\,gK + C.CI = (A+B+C).\,GH$: y siendo $A.Ag = B.Bg$, es $A.AE + B.BF = (A+B).gK$: conque, substituyendo en la equacion antecedente este valor, será $A.AE + B.BF + C.CI = (A+B+C).GH$, y $GH = \frac{A.AE + B.BF + C.CI}{A+B+C}$.

Corolario 1.

Si en lugar de las masas A,B,C,se colocan las potencias α,β y γ,siendo $\alpha.Ag = \beta.Bg$, y $(\alpha+\beta).gK = \gamma.CG$, tambien será $GH = \frac{\alpha.\,AE + \beta.\,BF + \gamma.\,CI}{\alpha+\beta+\gamma}$.

Corolario 2.

Lo mismo se demonstrará de quatro, cinco, ó infinitos cuerpos y potencias: de suerte, que la distancia perpendicular desde el punto G, tomado como se previno (*Prop.* 15. 16.), á un plano qualquiera, será siempre igual á la suma de los produćtos de cada cuerpo ó potencia, por su distancia perpendicular al mismo plano, dividida por la suma de los cuerpos ó potencias.

Corolario 3.

Si la distancia perpendicular de un punto G, á un plano qualquiera, es igual á la suma de los produćtos de cada cuerpo, por su distancia perpendicular al mismo plano, dividida por la suma de los cuerpos: el punto tomado G será el que se previno (*Prop.* 12, *hasta* 16) y por consiguiente tendrá las propiedades asignadas en las mismas Proposiciones y sus Corolarios.

DEFINICION 19.

Al punto G, tomado de la forma que se ha dicho (*Prop.* 12, *hasta* 16) se le dá comunmente el nombre de *centro de gravedad*, ú *de la gravedad.*

Escolio.

Este nombre no le es propio, sino en tanto que las potencias que actuan son las gravedades de los cuerpos ó masas; pero como suelen actuar tambien sobre el cuerpo potencias que no son las gravedades, y que los centros de estas no son los de las masas, como se verá despues, distinguió con acierto *Daniel Bernoulli* un centro del otro: llamó al uno *centro de las potencias*, y al otro *centro de las masas*. Como en los cuerpos graves concurren los dos centros, por ser las potencias ó gravedades como las masas (*Cor.*1. *Prin.* 2.), es propio llamar, indistintamente á uno ú otro, centro de gravedad: y así, tratandose de esta, lo mismo será decir, centro de las masas, que el de gravedad.

PROPOSICION 17.

Con qualesquiera y distinta velocidad que se muevan los cuerpos que componen un systhema, como todos corran por direcciones paralelas, tambien se mantendrá el centro de las masas moviendose por la misma y paralela direccion.

Fig. 10. Que sean A, B, C, &c. los cuerpos que se mueven en las direcciones AE, BF, CI, paralelas entre sí. Tómese un plano qualquiera LK paralelo á dichas direcciones, y siendo G el centro de las masas, será $GH = \frac{A.Ae + B.Bf + C.Ci + \&c.}{A + B + C + \&c.}$. En esta expre-

sion

sion todas las masas quedan constantes, de la misma suerte que las perpendiculares A*e*, B*f*, C*i*, &c, y esto con qualquiera ó distinta velocidad que se muevan, puesto que se suponen dirigirse por paralelas á la LK: luego queda constante toda la expresion, y por consiguiente, la GH, y el centro de las masas G, se moverá paralelamente á las demas direcciones.

Corolario 1.

Lo mismo sucederá al centro de las potencias, si estas fueren constantes, como sucede con la gravedad.

Corolario 2.

Segun lo dicho, el centro de las masas de un systhema de cuerpos se dirigirá siempre paralelamente á las direcciones de las potencias, si estas fueren paralelas entre sí: y la diferencial corrida por aquel (*Cor.*2.*Prop.*14), será siempre $= \frac{dt\int(\alpha + \beta + \nu + \delta + \&c)\, dt}{A + B + C + D + \&c} = \frac{dt\int \pi dt}{M}$: la misma que corriera sí, unidos los cuerpos ó masas en su centro, fueran animados por la suma de las potencias π en la direccion de estas.

Corolario 3.

La distancia perpendicular desde el centro de las masas á un plano qualquiera, será (*Cor.*2.*Prop.*16.) igual á la suma de los productos de cada masa, por su distancia perpendicular al mismo plano, dividida por la suma de las masas.

Corolario 4.

Asimismo la distancia perpendicular desde el centro de las potencias que actuan en un systhema á un plano

qualquiera, será (*Cor.* 2. *Prop.* 16) igual á la suma de los productos de cada potencia, por su distancia perpendicular al mismo plano, dividida por la suma de las potencias.

Corolario 5.

Si suponemos el espacio corrido por el centro de las masas $= g$, y su velocidad $=$ W, será (*Cor.* 4. *Prop.* 3, *y Cor.* 1. 2. *Prop.* 14.) $dg = Wdt = \frac{dt\int(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&)dt}{A+B+C+D+\&} = \frac{dt\int\pi dt}{M}$: luego

$$W = \frac{\int\alpha dt + \int\beta dt + \int\gamma dt + \&}{A+B+C+\&} = \frac{\int\pi dt}{M}$$

$$dW = \frac{\alpha dt + \beta dt + \gamma dt + \&}{M} = \frac{\pi dt}{M}$$

$$dt = \frac{MdW}{\alpha+\beta+\gamma+\&} = \frac{MdW}{\pi}.$$

Corolario 6.

Siendo (*Cor.*4.*Prop.*3.) $dg = Wdt$, ó $W = \frac{dg}{dt}$, y asimismo (*Cor.*5.), $dW = \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&)dt}{M} = \frac{\pi dt}{M}$; multiplicando estas igualaciones, tendremos tambien $WdW = \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&)dg}{M} = \frac{\pi dg}{M}$: é integrando $\frac{1}{2}W^2 = \frac{\int(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&)dg}{M} = \frac{1}{M}\int\pi dg$: ó $W^2 = \frac{2}{M}\int(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&)dg = \frac{2}{M}\int\pi dg$.

Co-

Corolario 7.

Del mismo modo, si substituimos en la equacion $W = \frac{\int \alpha dt + \int \beta dt + \int \gamma dt + \&}{A+B+C+\&}$, $\alpha dt = A du$, (*Cor. Ax.* 2) $\beta dt = B dv$, &, tendremos $W = \frac{\int A du + \int B dv + \&}{A+B+\&} = \frac{Au + Bv + \&}{A+B+\&}$: esto es, la velocidad del centro de las masas, igual á la suma de los produćtos de cada masa, por su velocidad, dividida por la suma de las masas.

Corolario 8.

Si las potencias que animan los cuerpos no se dirigiesen segun líneas paralelas, se puede descomponer cada una de aquellas en dos ó en tres, que se dirijan por líneas perpendiculares entre sí, siendo paralelas cada una de estas respećtivas perpendiculares. La suma de todas aquellas que se dirigen segun líneas paralelas darán el movimiento del centro de las masas, segun aquella direccion: y lo mismo se hallará segun las otras direcciones: con que se tendrá el movimiento compuesto del centro de las masas.

Corolario 9.

Respećto de que con esta descomposicion de potencias se tiene el movimiento compuesto del centro de gravedad, bastará para qualquiera caso resolver solo aquel en que se dirigen las potencias por líneas paralelas: y es lo que haremos por ahora.

Corolario 10.

Si desde el principio de la accion, la suma de las po-

potencias positivas que actuan en un systhema, fuere igual á la suma de las negativas, el centro de las masas quedará inmovil: porque es $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \&c = o$.

Corolario 11.

Como las direcciones de las potencias que no son paralelas se descomponen en otras que lo son, puede ser el espacio corrido por el centro de las masas, segun una, ó dos direcciones, cero; sin embargo que, segun las otras, no lo sea: basta para ello que la suma de las potencias positivas, que actuan segun aquella direccion, sea igual á la suma de las negativas al principio de la accion.

Corolario 12.

Si los cuerpos que componen un systhema, en lugar de hallarse libres, estubieren ligados ó unidos entre sí por líneas inflexibles, de suerte que esto les impida correr por la direccion que actuan las potencias, pueden considerarse como animados cada uno por dos potencias, una la que realmente los mueve, y otra la que procede de la tension ó fuerza con que se tiran mutuamente los cuerpos; pero qualquiera de estas positiva tiene su igual negativa, porque la accion y reaccion son iguales: luego, desde el principio de la accion, será $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \&c = o$, y el centro de las masas del systema quedará inmovil, por lo que toca á las fuerzas con que mutuamente se tiran los cuerpos.

Corolario 13.

Quedará, pues, el movimiento del centro de las masas de un systhema como si no actuasen sobre él si no las solas potencias que ponen en movimiento los cuer-

cuerpos, y asi, el centro de las masas del systhema se moverá del mismo modo, estando los cuerpos libres, que estando ligados entre sí por líneas inflexíbles.

Corolario 14.

Un cuerpo qualquiera es lo propio que un systhema de cuerpos infinitamente pequeños ligados entre sí: con que el centro de la masa total de un cuerpo qualquiera se moverá del mismo modo animado de qualesquiera potencias, que si cada partícula de materia de las que lo componen estubiera separada y libre: ó como si fuera un systhema de cuerpos libres.

Corolario 15.

Lo mismo se debe entender de un systhema de cuerpos ligados entre sí, aunque su masa no se considere reunida en su centro.

Corolario 16.

Con que tendremos, generalmente, para qualquiera cuerpo, ó número de cuerpos libres ó ligados entre sí, $dg = \frac{dt(\int \alpha dt + \int \beta dt + \int \gamma dt + \&)}{M} = \frac{dt}{M}\int \pi dt$

$$W = \frac{\int \alpha dt + \int \beta dt + \int \gamma dt + \&}{M} = \frac{1}{M}\int \pi dt$$

$$dW = \frac{\alpha dt + \beta dt + \gamma dt + \&}{M} = \frac{\pi dt}{M}$$

$$dt = \frac{M dW}{\alpha + \beta + \gamma + \&} = \frac{M dW}{\pi}$$

$$W^2 = \frac{2}{M}\int (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \&) dg = \int \pi dg \times \frac{2}{M}$$

$$W = \frac{Au + Bv + \&}{M}.$$

CO-

Corolario 17.

Si fuere $W=o$, será tambien $Au+Bv+\&=o$: y si el systhema se compusiere de los dos cuerpos solos A y B, actuará el uno positivamente, y el otro negativamente: de suerte que será $Au=Bv$; ó $u:v=\frac{1}{A}:\frac{1}{B}$: esto es, en qualquiera systhema, ó máchina compuesta de dos cuerpos, las velocidades que estos tienen, quando el centro de las masas está fixo, son en razon inversa de las masas.

Corolario 18.

En los cuerpos graves, las potencias son como las masas: luego en toda máchina donde la gravedad actua, las velocidades que toman los dos cuerpos de que se compone la máchina, serán en razon inversa de las potencias ú de las gravedades, si el centro de gravedad estubiere fixo. Si al contrario, este centro se moviere, la razon en que estubieren las potencias no será igual á la que tubieren las velocidades.

Corolario 19.

Si fuere la suma $\alpha+\beta+\gamma+\&=o$, será $dW=o$, ó al contrario, para que sea $dW=o$, ha de ser la suma de las potencias $\alpha+\beta+\gamma+\&$ que animan el cuerpo, ó el systhema, igual cero: y asi el centro de las masas de un cuerpo, ú de un systhema, no puede moverse con velocidad ó movimiento uniforme, á menos que todas las potencias que lo animan no se destruyan, ó que ninguna actue.

Co-

Corolario 20.

Como el estar ligados entre sí los cuerpos de un systhema nada altera la demonstracion dada (*Cor.*2. 3. *Prop.*16.) sobre la distancia perpendicular de su centro de las masas á un plano qualquiera : se sigue, que tambien la distancia perpendicular del centro de las masas de un cuerpo qualquiera á un plano, será igual á la suma de todos los produćtos de cada partícula de la masa que lo compone, por su distancia perpendicular al mismo plano, dividida por la suma de las masas, ú de todo el cuerpo : y del mismo modo, la distancia perpendicular del centro de las potencias que actuan sobre un cuerpo á un plano qualquiera, será igual á la suma de todos los produćtos de cada potencia, por su distancia perpendicular al mismo plano, dividida por la suma de las potencias.

Corolario 21.

Como en los cuerpos igualmente densos es (*Def.* 12.) la masa proporcional al espacio que ocupan ; se sigue, que puede tomarse en ellos para el cálculo el espacio por la masa : y la distancia perpendicular de su centro de masas á un plano qualquiera, será igual á la suma de los produćtos de cada espacio diferencial por su distancia perpendicular al mismo plano, dividida por todo el espacio que ocupa el cuerpo.

Corolario 22.

Si un cuerpo de estos se puede dividir en dos partes iguales y semejantes por qualquiera tres planos que se corten entre sí perpendicularmente, el centro de las masas estará en el punto comun donde se cruzan

los planos: porque los productos de los espacios diferenciales de un lado de qualquiera de los tres planos, por sus distancias perpendiculares al mismo plano, serán iguales á los productos correspondientes del otro lado: y siendo los unos negativos, y los otros positivos, la suma se destruirá, y la distancia perpendicular desde el centro de las masas al plano, será cero: ó lo que es lo mismo, el centro de las masas se hallará en el mismo plano. Hallándose tambien en los otros dos, por la propia razon, se hallará en el concurso de ellos.

Corolario 23.

El centro de la masa de una esphera igualmente densa, será pues su centro de magnitud ú de figura: y de la misma manera, el centro de la masa de una elipsóide, de un paralelepípedo, de un cylindro, y de qualesquiera otros cuerpos que pueden dividirse en dos partes iguales por tres planos que se crucen perpendicularmente.

Escolio.

Para hallar el centro de las masas de otro qualquiera cuerpo igualmente denso, no habrá sino suponer que pase un plano por qualquiera punto, que llamamos *plano primitivo*, dividir el cuerpo por dos planos paralelos á aquel, é infinitamente cercanos entre sí, para que estos encierren un espacio diferencial que diste igualmente por todas partes del plano primitivo: multiplicada la distancia perpendicular desde este espacio diferencial al plano, integrando el producto, y dividido por todo el espacio que ocupa el cuerpo, el quociente será la distancia perpendicular desde el plano al centro de la masa total: repetido esto en tres planos que se crucen perpendicularmente, la comun seccion será el centro de la masa total.

Pe-

Pero muchos cuerpos se pueden dividir en dos partes iguales y semejantes por dos planos perpendiculares entre sí, ya que no en tres, como son las parabolóides, las hyperbolóides, y todos los demas formados por la revolucion de una curva qualquiera: en este caso es cierto, por lo dicho (*Cor.*22.), que el centro de las masas, siendo igualmente densos los cuerpos, está en la comun seccion de los dos planos, ó en el exe de la revolucion: no habrá, pues, mas para hallar el preciso punto ó centro de la masa total, que suponer un plano perpendicular al exe, y obrar como antes. Puede, para mayor facilidad, suponerse, que el plano primitivo pasa por el origen de las abcisas ó extremo del exe: y llamando estas x, las ordenadas á la curva y, y la circunferencia de un círculo c, siendo el radio la unidad, tendremos cy por la circunferencia que describirá la ordenada en su revolucion, y $\frac{1}{2}cy^2$ por el area del círculo ó plano paralelo al que se supone pasar por el extremo del exe: por lo que $\frac{1}{2}cy^2dx$ será el espacio diferencial que dista igualmente de dicho plano primitivo, y $\frac{1}{2}cy^2xdx$ el produćto del mismo espacio por su distancia perpendicular al plano. La suma de los produćtos será $\frac{1}{2}c\int y^2xdx$: y siendo $\frac{1}{2}c\int y^2dx$ la suma de los espacios ó el cuerpo total, tendremos la distancia desde el plano, ú desde el extremo del exe al centro de la masa total $= \frac{\frac{1}{2}\int y^2xdx}{\frac{1}{2}\int y^2dx} = \frac{\int y^2xdx}{\int y^2dx}$: fórmula general para hallar el centro de las masas de todos los cuerpos de igual densidad, que se forman por la revolucion de una curva qualquiera al rededor de un exe.

Exemplo I.

Que se haya de hallar el centro de la masa de una semiesphera. Su equacion, tomando su centro por origen, es $y^2 = r^2 - x^2$, siendo r su radio. Substitu-

yendo este valor de y^2 en la fórmula, será la distancia desde el centro de la esphera, ú del origen, al centro de la masa $=\frac{\int(r^2-x^2)xdx}{\int(r^2-x^2)dx}=\frac{(\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}x^2)x}{r^2-\frac{1}{3}x^2}$: ó, poniendo $x=r$, para comprehender toda la semiesphera, será esta distancia $=\frac{\frac{1}{4}r}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{8}r$.

Exemplo 2.

Que se haya de hallar tambien el centro de la masa de una parabolóide. Su equacion es $y^2=px$. Substituyendo este valor de y^2 en la fórmula, será la distancia desde el origen de las abcisas al centro de la masa $=\frac{\int px^2dx}{\int pxdx}=\frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2}=\frac{2}{3}x$: y así de los demas cuerpos.

Corolario 24.

De la misma manera se hallará el centro de gravedad de las potencias.

CAPITULO 4.

De la rotacion de un Systhema.

DEFINICION 20.

Rotacion de un Systhema se llama al acto de girar este sobre un punto ó exe qualquiera movible, ó inmovible: y al ángulo que con este movimiento de rotacion describe el systhema se llama *ángulo giratorio*, ó de *rotacion*.

PRO-

PROPOSICION 18.

Si dos cuerpos A y B, ligados por una linea inflexible AB, se mueven impelidos por las potencias α y β, en las direcciones paralelas AF, BG, de suerte que en un instante de tiempo dt tomen las situaciones E y I, el ángulo giratorio que describirán en este instante de tiempo será $= \frac{A dt \int \alpha dt\, sen.\Sigma - B dt \int \beta dt\, sen.\Sigma}{A^2 A + B^2 B}$: denotando A y B las distancias desde los cuerpos A y B al centro de las masas N, y Σ el ángulo KAB, que forman las direcciones con la A B. Fig. 11.

Puesto que el centro de gravedad N ha de seguir la linea NHM paralela á las direcciones (*Prop.* 17.), las dos distancias HE, HI han de ser iguales á NA, NB: y FE, GI serán los espacios que correrán los cuerpos en virtud de las fuerzas con que se tiran mutuamente; pero estas fuerzas exerciendose siempre segun las líneas AB, EI que unen los cuerpos, no alteran (*Cor.* 12, *Prop.* 17.) las fuerzas ó potencias que animan estos cuerpos perpendicularmente á las mismas líneas AB, EI. Las fuerzas ó potencias segun AF, BG son (*Cor.* 2. *Prop.* 10.) á las perpendiculares, como el radio, á $sen.\Sigma$: luego la potencia que anima el cuerpo A, perpendicularmente á AB, será $\alpha\, sen.\Sigma$, y la que anima el cuerpo B, $\beta\, sen.\Sigma$: la diferencial del espacio corrido por el cuerpo A, perpendicularmente á AB, será pues (*Prop.* 5.) $\frac{dt}{A} \int \alpha dt\, sen.\Sigma$, y el corrido por el cuerpo B será $\frac{dt}{B} \int \beta dt\, sen.\Sigma$, y el exceso LE de uno á otro espacio será $\frac{dt}{A} \int \alpha dt\, sen.\Sigma - \frac{dt}{B} \int \beta dt\, sen.\Sigma$.

El ángulo giratorio LIE es, segun la Geometría,

tría, $= \frac{LE}{LI} = \frac{LE}{AB}$: con que será este ángulo $=$

$$\frac{\frac{dt}{A}\int \alpha dt\ sen.\Sigma - \frac{dt}{B}\int \beta dt\ sen.\Sigma}{AB}$$: ó poniendo AB $=$

$A + B$, $= \frac{\frac{dt}{A}\int \alpha dt\ sen.\Sigma - \frac{dt}{B}\int \beta dt\ sen.\Sigma}{A+B}$; pero (*Corol.* 1. *Propos.* 12.) es $AA = BB$: luego será este

ángulo $= \frac{\frac{dt}{A}\int \alpha dt\ sen.\Sigma - \frac{Bdt}{AA}\int \beta dt\ sen.\Sigma}{A+B} = \ldots\ldots$

$\frac{Adt\int \alpha dt\ sen.\Sigma - Bdt\int \beta dt\ sen.\Sigma}{AA.(B+A)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{Adt\int \alpha dt\ sen.\Sigma - Bdt\int \beta dt\ sen.\Sigma}{A^2A + B^2B}$.

DEFINICION 21.

A este ángulo giratorio descrito en el instante de tiempo dt, se suele llamar tambien *velocidad angular.*

Corolario 1.

Siendo la diferencial corrida por el cuerpo A (*Cor.* 4. *Prop.* 3.) $udt = LE$: y el ángulo giratorio, ó velocidad angular $= \frac{LE}{LI}$: será tambien esta velocidad angular $= \frac{udt}{LI}$: y la del cuerpo A, $u = \frac{LE}{dt} = \frac{LE}{LI} \cdot \frac{LI}{dt}$; esto es, será la velocidad $u =$ á la velocidad angular multiplicada por $\frac{LI}{dt}$.

DE-

DEFINICION 22.

A los produćtos $A\alpha$, $B\beta$, $a\alpha$, $b\beta$ de las potencias α y β por sus distancias $A = AN$, $B = BN$, ó $a = AO$, y $b = BQ$ á un plano QM que pasa por el centro de las masas N, se llaman *momentos de las mismas potencias*.

DEFINICION 23.

Del mismo modo á los produćtos AA, BB se llaman momentos de las masas, ú de la gravedad.

DEFINICION 24.

A los produćtos $A^2A + B^2B$ de las masas por el quadrado de su distancia al centro de ellas, llama *Leonardo Eulero* (§. 165 de su *Ciencia naval*) *momentos de inercia*, y nos conformarémos con esta voz en la sucesivo.

Lema 1.

Las cantidades $A sen.\Sigma$, y $B sen.\Sigma$ son iguales á las perpendiculares AO, BQ tiradas desde los cuerpos á la NM que, pasando por el centro de las masas N, es paralela á las direcciones AF, BG.

Los ángulos ANO, QNB son iguales á KAB, luego su seno será tambien $sen.\Sigma$: y siendo los triángulos ANO, BNQ rećtángulos, será $1 : sen.\Sigma = AN\ (A) : AO = A sen.\Sigma$, y tambien $1.\ sen.\Sigma = BN\ (B)$; $BQ = B sen.\Sigma$: por lo que &c.

Corolario 1.

Llamando, pues, las perpendiculares AO, BQ, a y b, será igualmente el ángulo giratorio producido en

en el instante de tiempo $dt = \frac{dt\int\alpha a dt - dt\int\beta b dt.}{A^2 A + B^2 B}$.

O porque la línea BQ es negativa, respecto de la AO, por estar al lado opuesto del centro de las masas; quedando en variar los signos á las cantidades que no fueren positivas, será la expresion del ángulo giratorio ó velocidad angular, producida en el instante de tiempo $dt = \frac{dt\int dt.(a\alpha + b\beta)}{A^2 A + B^2 B} = \frac{dt\int dt sen. \Sigma (A\alpha + B\beta)}{A^2 A + B^2 B}$

Escolio.

Se supone, por ahora, que los cuerpos A y B son infinitamente pequeños, ó que sus masas estén reunidas enteramente en dichos puntos.

Corolario 2.

Puesto que el ángulo giratorio es $= \frac{dt\int dt\, sen. \Sigma (A\alpha - B\beta)}{A^2 A + B^2 B} = \frac{dt\int dt (a\alpha - b\beta)}{A^2 A + B^2 B}$, si desde el principio de la accion fuese la suma los momentos $A\alpha - B\beta = o$, ó $a\alpha - b\beta = o$, el systhema no girará.

Corolario 3.

Respecto que los dos cuerpos A y B se suponen impelidos constantemente segun las direcciones AF, BG, la rotacion se hará (*Cor.* 2. *Prop.* 8.) por el plano que coincida con ellas, y con la AB, que pasa por el centro de las masas.

DEFINICION 25.

A este plano, para mas inteligencia, llamaremos *plano giratorio*, ú *de la rotacion*.

Le-

Lema 2.

Si uno de los cuerpos se supone infinito, quedará sin movimiento, y coincidirá con él el centro de las masas: quedando asimismo este sin movimiento, ó fixo.

Siendo B el cuerpo infinito, la equacion $\frac{dt}{B}\int \beta dt = db$ manifiesta que su movimiento es cero: y la $B = \frac{AA'}{B}$, que su distancia B al centro de las masas es tambien cero: luego si uno de los cuerpos, &c.

Corolario 4.

En este caso, tanto la cantidad $Bdt \int \beta dt \, sen.\Sigma$, como B^2B de la expresion del ángulo giratorio son cero: con que quedará en $\frac{Adt \int \alpha dt \, sen.\Sigma}{A^2A} = \frac{dt \int \alpha dt sen.\Sigma}{AA}$, ó en $\frac{dt \int \alpha adt}{A^2A}$: esto es, quando un solo cuerpo A está obligado á girar sobre un punto fixo, distante de él la cantidad A, el ángulo giratorio, producido en el instante de tiempo dt, será $= \frac{dt \int \alpha dt \, sen.\Sigma}{AA} = \frac{dt \int \alpha adt}{A^2A}$.

Corolario 5.

Si fuere una sola la potencia que actuare, y dos los cuerpos: esto es, si fuere $\beta = o$, quedará el ángulo giratorio $= \frac{Adt \int \alpha dt \, sen.\Sigma}{A^2A + B^2B} = \frac{dt \int \alpha adt}{A^2A + B^2B}$.

Si no hai punto fixo la A del numerador significa la distancia de la potencia al centro de las masas y la A y B del denominador las distancias de los cuerpos A y B al mismo centro.

Pero si hai punto fixo, la A del numerador y la A y B del denominador expresan las distancias de la potencia y de los cuerpos A y B a este punto fixo; de todos modos la expresion del corol.º 5.º es la del angulo giratorio.

Corolario 6.

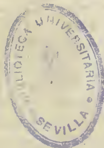
Esta expresion se reduce á $\frac{Adt\int \alpha dt\ sen.\ \Sigma}{A^2\left(A+\frac{B^2}{A^2}B\right)} = \frac{dt\int \alpha adt}{A^2\left(A+\frac{B^2}{A^2}B\right)}$: y es la misma que resultara (*Cor.* 4.) si supusieramos que el cuerpo $A+\frac{B^2}{A^2}B$ girara, obligado de la potencia α, sobre un punto fixo distante de él la cantidad A: luego el mismo ángulo giratorio produce la potencia α, moviendo un solo cuerpo $A+\frac{B^2B}{A^2}$, distante de un punto fixo la cantidad A, que moviendo dos cuerpos A y B, distantes del mismo punto fixo las cantidades A y B.

Corolario 7.

Como se ha desvanecido la cantidad $B\,sen.\Sigma$, ó perpendicular b en la expresion $\frac{dt\int \alpha \lambda dt}{A^2A+B^2B}$: se sigue, que es indiferente, para el efécto del ángulo giratorio, el lugar del cuerpo B, como diste siempre del punto fixo la cantidad B.

Corolario 8.

Podemos suponer que en lugar de dos cuerpos A y C que agita la potencia α á las distancias A y C del centro de gravedad, es solo el cuerpo $A+\frac{C^2}{A^2}C$ el que agita á la distancia A: y puesto su valor en la expresion $\frac{dt\int \alpha adt+dt\int \beta bdt}{A^2A+B^2B}$, en lugar de A solo, resul-



tará el ángulo giratorio que producen, en el mism instante de tiempo dt, dos potencias α y β, que ac tuan sobre tres cuerpos A, B y C, que están en el mis mo plano de la rotacion $= \frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt}{A^2\left(A + \frac{C^2}{A^2}C\right) + B^2 B} = \frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt}{A^2 A + B^2 B + C^2 C}$.

Corolario 9.

Del mismo modo, el ángulo giratorio que produciría la sola potencia α que actúe sobre los tres cuerpos A, C y D, será $\frac{dt\int\alpha a dt}{A^2 A + C^2 C + D^2 D} = \frac{dt\int\alpha a dt}{A^2\left(A + \frac{C^2}{A^2}C + \frac{D^2}{A^2}D\right)}$; el mismo que produgera la propia potencia si actuara sobre el solo cuerpo $A + \frac{C^2}{A^2}C + \frac{D^2}{A^2}D$: cuyo valor puesto en lugar de A en la expresion------ $\frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt}{A^2 A + B^2 B}$: se tendrá el ángulo giratorio que producirán las dos potencias α y β que actúaren sobre los quatro cuerpos A, B, C y D, que están en el mismo plano de la rotacion $= \frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt}{A^2\left(A + \frac{C^2}{A^2}C + \frac{D^2}{A^2}D\right) + B^2 B} = \frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt}{A^2 A + B^2 B + C^2 C + D^2 D}$.

Corolario 10.

Lo mismo se dirá de 5, 6, ó mas cuerpos: de suerte, que el ángulo giratorio que producen, en el instante de tiempo dt, las dos potencias α y β, que ac-

actuan sobre qualquiera número de cuerpos que están en el mismo plano de la rotacion, es $=$

$$\frac{dt\int \alpha a dt + dt\int \beta b dt}{A^2B + B^2B + C^2C + D^2D + \&c}$$

Corolario 11.

Si fuere solo un cuerpo, y dos las potencias: esto es, si fue $B = o$, se reducirá la expresion á

$$\frac{dt\int \alpha a dt + dt\int \beta b dt}{A^2A} = \frac{dt\int a dt.\left(\alpha + \frac{b}{a}\beta\right)}{A^2A}.$$

Corolario 12.

Esta misma expresion resultara si la potencia $\alpha + \frac{a}{b}\beta$ actuára sobre el cuerpo A á la distancia perpendicular a de la direccion que pasa por el centro de las masas: luego el mismo ángulo giratorio producen dos potencias con direcciones paralelas que actuen á las distancias perpendiculares a y b de la direccion que pasa por el centro de las masas, que una sola potencia $\alpha + \frac{b}{a}\beta$ á la distancia a.

Corolario 13.

Podemos poner en la expresion $\frac{dt\int \alpha a dt + dt\int \beta b dt}{A^2A + B^2B + C^2C + D^2D + \&c}$, en lugar de dos potencias α y γ que actuen á las distancias a y c, una sola potencia $\alpha + \frac{c}{a}\gamma$ que actue á la distancia a; y se reducirá el ángulo giratorio producido de tres potencias que actuan paralelamente sobre qualesquiera cuerpos

pos que están en el mismo plano que las tres direcciones de las potencias, á $\frac{dt\,(\int\alpha a dt + \int\gamma c dt) + dt\int\beta b dt}{A^2 A + B^2 B + C^2 C + D^2 D + \&} = \frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt + dt\int\gamma c dt}{A A + B^2 B + C^2 C + D^2 D + \&}$.

Corolario 14.

Del mismo modo, si colocamos en esta ultima expresion $\int a dt. \left(\alpha + \frac{d}{a}\delta\right)$, en lugar de $\int\alpha a dt$ solo, tendremos el ángulo giratorio que producen quatro potencias que actuan paralelamente sobre qualesquiera cuerpos que están en el mismo plano de la rotacion $= \frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt + dt\int\gamma c dt + dt\int\delta d dt}{A^2 A + B^2 B + C^2 C + D^2 D + \&}$.

Corolario 15.

Lo mismo se dirá de qualquiera número de potencias que actuen paralelamente sobre qualesquiera número de cuerpos que están en el mismo plano de la rotacion: luego, en general, el ángulo giratorio que producen en el instante de tiempo dt, qualesquiera número de potencias que actuan paralelamente sobre qualesquiera número de cuerpos ligados entre sí por líneas inflexibles que están en el mismo plano de la rotacion, será $= \frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt + dt\int\gamma c dt + dt\int\delta d dt + \&}{A^2 A + B^2 B + C^2 C + D^2 D + \&}$; en cuya expresion se pondrán negativas las perpendiculares a, b, c, d, &, y las potencias α, β, γ, & que lo fueren.

Corolario 16.

Si llamamos p la distancia perpendicular desde el cen-

centro de las potencias á la direccion que pasa por el centro de las masas, y π la suma de las potencias, tendremos (*Co*.4.*Pro*.17.) $p\pi = a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + \&$ suma de los momentos : y $dt\int p\pi dt = \text{---} dt\int dt\,(a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + \&)$: lo que dá el ángulo giratorio, que producen, en el instante de tiempo dt, qualesquiera número de potencias que actuan paralelamente sobre qualquiera número de cuerpos ligados entre sí por líneas inflexibles que están en el mismo plano de rotacion $= \frac{dt\int p\pi dt}{A^2A + B^2B + C^2C + D^2D + \&}$.

Corolario 17.

La expresion $p\pi$ manifiesta que no se alterará la del ángulo giratorio, aunque se coloquen como quiera en el mismo plano de rotacion las potencias particulares, ni que se dividan, ni unan como quiera, con tal que la suma de las que se substituyeren en su lugar sea la misma π, y la distancia perpendicular desde el centro de ellas, á la direccion que pasa por el centro de las masas, sea igualmente la misma p.

Corolario 18.

La expresion del denominador ---------- $A^2A + B^2B + C^2C + D^2D + \&$ manifiesta tambien, que no se alterará el valor del ángulo giratorio, porque se coloquen los cuerpos en otros sitios del plano de rotacion, con tal que se conserven á la misma distancia del centro de las masas; ó aunque se varien tambien estas del mismo modo que los cuerpos, con tal que la suma $A^2A + B^2B + C^2C + D^2D + \&$ se conserve siempre la misma.

Co-

Corolario 19.

Si suponemos que sean los momentos de inercia $A^2A + B^2B + C^2C + D^2D + \& = S$, será tambien el ángulo giratorio, que producen, en el instante de tiempo dt, qualesquiera número de potencias, que actuan paralelamente sobre qualesquiera número de cuerpos, ligados entre sí por líneas inflexibles, que están en un mismo plano de rotacion $= \frac{dt \int p \pi dt}{S}$.

Corolario 20.

Si llamamos, asimismo, P la distancia desde el centro de las masas al de las potencias, y Σ el ángulo que formare la línea tirada por estos dos centros con las direcciones, tendremos $1 : sen.\Sigma = P : p = P sen.\Sigma$: luego tambien podremos expresar el mismo ángulo giratorio por $\frac{\int dt \int \pi dt P sen \Sigma}{S}$: ó si fuere P constante, por $\frac{P \int dt \int \pi dt\, sen.\Sigma}{S}$.

PROPOSICION 19.

El systhema girará del mismo modo estando libre, que si su centro de masas estubiere fixo.

Supóngase, que en el mismo centro de las masas actue una nueva potencia, igual á la suma de todas las demas, y en direccion contrária: con esto el centro de las masas (*Cor.* 10. *Prop.* 17.) quedará en reposo ó fixo; pero esta nueva potencia, por estár aplicada en el centro de las masas, no altera el numerador del ángulo giratorio: luego el systhema girará del mismo modo estando su centro de masas fixo; que quando esté libre. quanto menos el denominador.

PRO-

PROPOSICION 20.

Las expresiones y fórmulas dadas del ángulo giratorio se extienden aun al caso en que no están todos los cuerpos y potencias en el mismo plano de rotacion.

Fig. 12. Sea el systhema de los tres cuerpos unidos por líneas inflexibles B, C, D, agitados por las tres potencias β, γ, δ, con direcciones paralelas entre sí, y perpendiculares á la recta DC, que junta los dos cuerpos D y C. Sea BA perpendicular á DC: A el centro de las masas de los cuerpos C y D, y G el de los tres cuerpos, ó el de los dos B y A, si se hallasen en este punto A unidos, y como uno solo, los dos cuerpos C y D, de tal suerte que el cuerpo supuesto en A, sea $A = C + D$. Que el centro de las dos potencias γ y δ se halle asimismo en A, á fin de que el systhema de los dos cuerpos solos C y D no gire, y la DC se conserve siempre en su movimiento perpendicular á las direcciones de las potencias. Tírese, por el centro de las masas G, la IH, paralela á la DC, y las perpendiculares DH, CI, que llamaremos D y C: así como AG, A: con lo que son $A = C = D$: y ultimamente supongase $\gamma + \delta = \alpha$.

Colóquense ahora todos estos valores en el ángulo giratorio que produce el systhema de los dos cuerpos B y A, $\frac{dt \int dt \, sen. \Sigma \, (A\alpha + B\beta)}{A^2 A + B^2 B}$, y quedará en $\frac{dt \int dt \, sen. \Sigma \, (C\gamma + D\delta + B\beta)}{C^2 C + D^2 D + B^2 B}$, que es el ángulo giratorio que produce el systhema de los tres cuerpos B, C y D, y el mismo que produgeran, si los tres estubieran en un mismo plano de rotacion AB colocados á las distancias B, C y D del punto G: puesto que esta expresion del ángulo es idéntica con las que antes se dieron.

Co-

Corolario 1.

De la misma suerte, el cuerpo B se puede dividir en otros dos cuerpos, colocarse estos en los extremos de una línea paralela á la DC, y agitarse por dos potencias iguales á la β: y así de quantos cuerpos contuviere un systhema, que se hallasen en el mismo plano de rotacion AB.

Corolario 2.

Asi como dos cuerpos A y B, colocados en el plano de rotacion AB, se pueden dividir, ó considerar divididos en varios, segun el método dicho; tambien los divididos se pueden reunir, ó considerar reunidos en el propio plano AB: en uno y otro caso el centro de las potencias se halla en este plano, y en él se expresa la medida del ángulo giratorio, ú de rotacion.

Corolario 3.

El plano giratorio ú de rotacion será, pues, en ambos casos aquel que, pasando por el centro de las masas, pasa tambien por el de las potencias, y es paralelo á la direccion de estas.

Corolario 4.

Puesto que el systhema girará del mismo modo que si estubiera fixo el centro de las masas G, girará ahora del mismo modo que si la línea HI estubiera fixa: pues por lo supuesto debe mantenerse constantemente paralela á DC, y esta perpendicular á las direcciones de las potencias.

DEFINICION 26.

A esta línea HI, sobre que, como fixa, gira el systhema, se llama *exe de la rotacion.*

Corolario 5.

Si se tira un plano paralelo á las direcciones de las potencias, que coincida con el exe de la rotacion HI: y á este se baxan perpendiculares de los puntos D, A y C, serán estas d, a y c, y todas tres iguales entre sí, y á $D sen. \Sigma$, $A sen. \Sigma$, y $C sen. \Sigma$: con que substituyendo en el numerador de la fórmula, ú expresion del ángulo, aquellos valores, en lugar de estos, se reducirá á $\frac{dt \int dt \, (c\gamma + d\delta + b\beta)}{C^2C + D^2D + B^2B}$, que es la misma dada para los systhemas de cuerpos que están todos en el mismo plano giratorio AB.

DEFINICION 27.

A este plano tirado paralelo á la direccion de las potencias, y que coincide con el exe, llamaremos *plano directorio.*

Corolario 6.

Puesto que d, c y b, denotan las distancias perpendiculares desde los puntos D, C, y B al plano directorio, si llamamos p la distancia perpendicular desde el centro de todas las potencias al mismo plano, y π la suma de las mismas potencias, será la suma de los momentos $c\gamma + d\delta + b\beta + \&= p\pi$: con que tambien tendremos la expresion del ángulo giratorio $= \frac{dt \int p\pi dt}{C^2C + D^2D + B^2B}$: ó por último, haciendo

$C^2C+D^2D+B^2B+\&=S$, será tambien $=\frac{dt\int p\pi dt}{S}$; denotando S los momentos de inercia.

Corolario 7.

Por las fórmulas se puede ver que estas no exígen que precisamente hayan de estar los centros de las masas de cada dos cuerpos, como D y C, en la línea AB, así como lo supusimos (*Propos.*20.): pueden suponerse colocados mas arriba, ó mas abaxo, en la misma línea CD, pues esto no alterará las distancias DH, AG y CI, y por consiguiente tampoco el denominador $C^2C+D^2D+B^2B+\&$, ni el ángulo giratorio. Lo único que se alterará será el centro de las masas G; pero siempre se mantendrá en la propia línea ó exe HI.

Corolario 8.

Tampoco exígen las fórmulas que precisamente hayan de estár los centros de las potencias de cada dos cuerpos como D y C en la línea AB, ni en el centro de las masas de estos, como supusimos (*Prop.* 20.): piden solo que la distancia p desde el centro de ellas al plano directorio sea, como antes, la misma: que esté colocado dicho centro en K, ó en qualquiera punto de la LKN paralela al exe, siempre resultará el mismo ángulo giratorio; puesto que se conserva y dá el mismo valor á la p.

PROPOSICION 21.

Quando el centro de las potencias se hubiese variado de suerte, que haya salido de la línea ó plano GA, que, pasando por el centro de las masas, es perpendicular al plano directorio HI, el systhema ya no gi-

girará sobre el exe fixo HI, sino sobre otro que, pasando por el centro de gravedad, sea perpendicular al plano paralelo á la direccion de las potencias, que pase por el centro de las masas, y el de las potencias.

Que las direcciones de las potencias sean perpendiculares al plano de la estampa ó papel, y que el centro de ellas se halle en O. Tírese el plano GO, paralelo á las direcciones, y del centro G levántese sobre este plano la perpendicular GQ, que será el exe fixo sobre que girará el systhema. Supóngase que tambien pudiera girar sobre la GO. En este caso los productos de las potencias de una parte y otra del plano GO, por su distancia perpendicular al mismo plano, habian de formar el numerador de la expresion del ángulo giratorio; pero estos productos son todos cero: luego no puede girar el systhema sobre la GO, ni tampoco la QT: y por consiguiente será esta el exe fixo sobre que debe girar el systhema.

Corolario 1.

Tirando un plano que, pasando por QGT, sea paralelo á las direcciones de las potencias, este será el directorio: p será igual á la perpendicular baxada desde el centro de las potencias O sobre el plano directorio QGT: y GO será el plano de rotacion que, pasando por el centro de las masas G, y el de las potencias O, es paralelo á las direcciones de estas.

Corolario 2.

Como un cuerpo qualquiera se puede dividir en otros muchos infinitamente pequeños, que por naturaleza están ligados entre sí: se sigue, que el ángulo giratorio que, en la diferencial de tiempo *dt*, producirán, sobre un exe, qualesquiera número de potencias, que

Observacion. qualquier plano que pasando por el centro de las potencias sea paralelo a las direcciones de estas, dara siempre cero para la suma de momentos de las potencias respecto a este plano; de donde no puede inferirse otra cosa sino que el exe de rotacion nunca puede pasar por el centro de las potencias, y aun que la ultima consecuencia es cierta, no se infiere suficientemente de los antecedentes. Esta proposicion se demuestra asi. Las potencias obran como si estuviesen todas reunidas en su centro y el de masa no tiene mas movimiento que el progresivo en linea recta paralela a la direccion de las potencias; si se unen estos dos centros por una recta, el movimiento giratorio por precision debera hacerse en un plano que pasando por esta recta sea paralelo a la direccion de las potencias, y por consiguiente el exe de rotacion sera aquel que pasando por el centro de masas sea perpendicular a este ultimo plano, guardando todos los cuerpos del sistema en su movimiento una distancia constante a este plano.

que aƈtuen paralelamente sobre un cuerpo, será $= \frac{dt\int p\pi dt}{S} = \frac{Pdt\int \pi dt\, sen.\Sigma}{S}$: denotando *P* la distancia desde el centro de las potencias al exe de rotacion, y Σ el ángulo que forma esta distancia ó línea con el plano direƈtorio.

Corolario 3.

Si uno de los cuerpos fuere infinito, quedará (*Lema* 2.) fixo, concurrirá con él el centro de gravedad, y sobre él girará el systhema: ó sobre un exe fixo que, pasando por él, sea perpendicular al plano paralelo á las direcciones, que pase por el punto fixo, y por el centro de las potencias.

Corolario 4.

La expresion del ángulo giratorio será en este caso, como antes, $= \frac{dt\int a\alpha dt + dt\int b\beta dt + \&c + dt\int e\varepsilon dt}{A^2A + B^2B + \&c + E^2E}$: que se reduce, siendo el cuerpo E el infinito, á $\frac{dt\int a\alpha dt + dt\int b\beta dt + \&c}{A^2A + B^2B + \&c} = \frac{dt\int p\pi dt}{S} = \frac{Pdt\int \pi dt\, sen.\Sigma}{S}$:

Escolio.

En este caso el centro de gravedad del systhema está en el exe fixo: las distancias *A*, *B*, *C*, & son las de los cuerpos al mismo exe fixo: p, a, b, & las perpendiculares tiradas desde las potencias al plano direƈtorio, que coincide con el mismo exe fixo: *P* la distancia perpendicular desde el centro de las potencias π al exe; y S la suma de los produƈtos de los cuerpos ó masas, por el quadrado de sus distancias perpendiculares al propio exe fixo.

Lema 3.

Si llamamos Z á la suma de los produćtos de los cuerpos ó masas, por el quadrado de su distancia á un exe que pase por el centro de ellas, paralelo al que pase por el punto fixo, y G la distancia desde el mismo centro de las masas al exe fixo, tendremos $S = G^2M + Z$.

Fig. 13. Porque, sea IKLN un cuerpo, que es lo mismo que un systhema de ellos ligados entre sí: H su centro de gravedad: O el exe fixo perpendicular al plano direćtorio, que supondremos sea el del papel; y Q un pesito, partícula, ó línea perpendicular al plano direćtorio, ó paralela á los exes. El quadrado de OQ, distancia perpendicular desde el exe fixo O al pesito Q, es igual á los quadrados de $OH = G$, y HQ juntos, mas dos rećtángulos de OH por HT: y lo mismo se tiene de qualquiera otro pesito de los infinitos en que se divida el cuerpo: luego la suma S de los produćtos de todos los pesos ó masas, por el quadrado de su distancia perpendicular al exe fixo O, será $= G^2M + \int HQ^2.Q + 2G\int HT.Q$: esto es, $S = G^2M + Z + 2G\int HT.Q$; pero $\int HT.Q$ es la suma de los produćtos de los pesos ó masas, por su distancia al plano direćtorio YX, y esta suma es igual (*Cor.* 20. *Prop.* 17.) al produćto de la masa total M, por la distancia desde el centro de las masas H al plano YX, que es cero: luego $\int HT.Q = 0$: lo que dá $S = G^2M + Z$.

Corolario 1.

Substituyendo este valor de S en las expresiones del

del ángulo giratorio, será esta en el caso del exe fixo $=\frac{\int dt \int p \pi dt.}{G^2 M+Z}=\frac{P\int dt \int \pi dt \, sen.\Sigma}{G^2 M+Z}$

Corolario 2.

Quando es G=o: esto es, quando el exe fixo está sobre el centro de las masas, ó que gira el systhema sobre su centro de masas, es S=Z: y en este caso se reducen las expresiones (*Cor.*19. 20. *Prop.*18.) á las mismas que se dieron: luego el systhema ó cuerpo libre gira del mismo modo que si girara sobre su centro de las masas fixo: lo mismo que ya se demostró (*Prop.*19.).

Corolario 3.

Quando el centro de las potencias concurre con el de las masas, como sucede en los cuerpos graves que descienden por sola la accion de su gravedad, es G=P: luego en este caso será el ángulo giratorio sobre un exe fixo $=\frac{\int dt \int p \pi dt}{P^2 M+Z}=\frac{P\int dt \int \pi dt \, sen.\Sigma}{P^2 M+Z}$.

PROPOSICION 22.

El centro de gravedad en los cuerpos graves, que descienden por sola la accion de su gravedad, girando sobre un punto ó exe fixo, no puede reducirse al reposo, sino baxando lo mas que le es posible.

Sea ABCD un cuerpo grave que, sobre el exe fixo E, haya de girar libremente por sola la accion de su gravedad. Sea G el centro de gravedad del cuerpo: HO un plano horizontal, y FI otro vertical, que pasa por el exe fixo E. Tirada la EG, perpendicular al exe, será esta $=P$, y Σ el ángulo GEI. El caso único en que este cuerpo puede quedar sin movimiento es Fig. 14.

so-

solo aquel en que, al principio de la accion, sea la diferencial del ángulo giratorio $\frac{Pdt\int\pi dt\,sen.\Sigma}{P^2M+Z}$ igual á cero; pero en qualquiera situacion que se coloque el cuerpo, nunca es esta cantidad igual á cero, sino quando es $Psen.\Sigma = GK = o$, ó $\Sigma = o$: luego á este estado ha de venir á reducirse para pararse. Este estado no resulta precisamente, sino consiguiendo el cuerpo el máximo $PCos.\Sigma =$ á la perpendicular GN, pues, diferenciando, tenemos $Pd\Sigma\,sen.\Sigma = o$, que dá $Psen.\Sigma = o$: luego el cuerpo es preciso que no pueda mantenerse en quietud, sino consiguiendo el centro G su máxima distancia de la horizontal HO, ó baxando lo mas que le es posible.

De los Péndulos.

DEFINICION 28.

Péndulo simple se llama á un cuerpo infinitamente Fig. 15. pequeño, ó enteramente reunido en el punto A, sostenido de un hilo infinitamente delgado, ó línea inflexible AC.

DEFINICION 29.

Si estando fixo el punto C, se aparta el cuerpo A de la vertical CB, como á GA, y se suelta, se mueve el péndulo en virtud de la gravedad, que es la potencia que lo anima, yendo á *Ca*; despues de nuevo á CA, y asi continuamente. A cada una de estas idas y venidas se llama *una oscilacion*.

Corolario I.

No hallandose en este systhema ó péndulo simple sino

sino un solo cuerpo, y una sola potencia que lo anime, todas las cantidades de la expresion del ángulo giratorio deben ser iguales á cero para este caso, excepto una: con que será el ángulo giratorio del péndulo simple $= \frac{dt\int \alpha dt}{A^2 A} = \frac{P dt \int \alpha dt \, sen. \Sigma}{A^2 A}$, ó por ser $P = CA$, $= \frac{dt \int \alpha dt \, sen. \Sigma}{CA.A}$.

Corolario 2.

Siendo, en los cuerpos que caen por la accion de la gravedad, la potencia α constante, y (*Cor.* 3. *Princ.* 2.) $\frac{\alpha}{A} = \xi$, será el ángulo giratorio del péndulo simple $= \frac{\xi dt \int dt \, sen. \Sigma}{CA}$: denotando Σ el ángulo BCA que forma el péndulo con la vertical CB á qualquiera instanre ó tiempo de su oscilacion: de suerte, que todo el ángulo, ú oscilacion entera, será $2\Sigma = \frac{\xi}{CA} \int dt \int dt \, sen \Sigma$.

DEFINICION 30.

A qualquiera otro péndulo, en quien el cuerpo ó hilo tenga alguna amplitud, ó que se componga de varios cuerpos unidos entre sí, como A, B, se llama *péndulo compuesto.* Fig. 16. 17.

Corolario 1.

Su ángulo giratorio será (*Corolario* 3. *Lema* 3.) $= \frac{P \int dt \int \pi dt \int \Sigma}{P^2 M + Z}$: ó por ser π constante, y $\frac{\pi}{M} = \xi$, $= \frac{P \xi M \int dt \int dt \int \Sigma}{P^2 M + Z}$.

Corolario 2.

Si un péndulo simple, y otro compuesto, cumplen sus oscilaciones al mismo tiempo, y estas fueren iguales: esto es, si fuere siempre Σ del uno, igual á Σ del otro, tendremos $\frac{\xi \int dt \int dt\, sen.\Sigma}{CA} = \frac{P\xi M \int dt \int dt\, sen.\Sigma}{P^2M+Z}$, ó por ser iguales las cantidades $\xi \int dt \int dt\, sen.\Sigma$ en uno y en otro miembro, por la condicion del problema,
Fig. 15. será $\frac{1}{CA} = \frac{PM}{P^2M+Z}$: lo que dá la longitud del péndulo simple isochrono, con el compuesto $CA = \frac{P^2M+Z}{PM} = P + \frac{Z}{PM}$.

Corolario 3.

Substituyendo en lugar de P^2M+Z su igual S, será tambien la longitud del péndulo simple isochrono con el compuesto $CA = \frac{S}{PM}$.

DEFINICION 31.

Si en un péndulo compuesto, se toma un punto en la línea que junta el centro de gravedad y el exe fixo, distante de este de toda la longitud del péndulo simple, que hace las oscilaciones de igual magnitud, y de igual duracion que el compuesto, se llama á este punto, *centro de oscilacion.*

Corolario 1.

El centro de oscilacion distará de el de gravedad la cantidad $\frac{Z}{PM} = P + \frac{Z}{PM} - P$, diferencia entre las dis-

distancias desde el centro de oscilacion y el de gravedad, hasta el exe fixo.

Corolario 2.

El centro de oscilacion distará siempre mas que el de gravedad del exe fixo: puesto que es $P + \frac{Z}{PM} > P$.

PROPOSICION 23.

La longitud del péndulo simple es, asimismo, $= \frac{(A^2A + B^2B + C^2C + \&) \, sen.\Sigma}{AA sen \alpha + BB sen.\beta + CC sen.\gamma + \&}$: denotando Σ el ángulo DCG que forma la vertical CD, ó plano vertical perpendicular á las direcciones, con la CG que pasa por el centro de gravedad G: y α, β, γ, & los ángulos DCA, DCB, & que forma la misma vertical ó plano con las líneas tiradas desde el punto fixo C, á qualquiera de los cuerpos; cada una á su correspondiente.

Fig. 16.

Siendo (*Cor.* 20. *Prop.* 18.) $P sen\Sigma = p$, ó $P = \frac{p}{sen\Sigma}$, substituyendo este valor en la fórmula (*Cor.* 3. *Def.* 30.) será la longitud del péndulo simple $= \frac{S sen.\Sigma}{pM}$: ó poniendo $S = A^2A + B^2B + C^2C + \&$, y $pM = aA + bB + cC + \& = AA sen.\alpha + BB sen.\beta + CC sen.\gamma + \&$, será la longitud del péndulo simple $= \frac{(A^2A + B^2B + C^2C + \&) \, sen.\Sigma}{AA sen.\alpha + BB sen.\beta + CC sen.\gamma + \&}$.

Corolario.

Si todos los ángulos α, β, γ, & fueren iguales: esto es, si todos los cuerpos A, B, & estubieren en una mis-

Fig. 17.

Esta proposicion 23 será verdadera, quando los cuerpos del pendulo compuesto esten en un mismo plano, pero si estan en diferentes planos, los angulos α, β, γ, no pueden ser ya lo que dice el texto; pero a saber lo que son estos angulos, por el punto fixo C y el centro de gravedad G de las masas se hará pasar un plano vertical; por el mismo punto fixo, se tirará una linea horizontal perpendicular a este plano, y será esta linea el exe de rotacion, y tirando desde cada cuerpo una perpendicular a este exe, los angulos formados entre estas perpendiculares y las verticales correspondientes son los valores de α, β, γ, &c que se deben emplear para que la propo. pueda aplicarse a todos los casos.

Tambien es la longitud del pendulo simple igual a la suma de momentos de inercia, partido por el producto de la suma de masas multiplicada por la distancia del punto fixo al centro de estas masas; lo que se prueva haciendo que

$$\frac{sen \Sigma}{AA.sen\alpha + BB.sen\beta + CC.sen\gamma + \&c} = \frac{1}{(A + B + C + \&c).G}$$; siendo G la distancia del punto fixo al centro de masas, es el corolario 2° al principio 30.

misma línea ó plano BAC que pase por el punto ó exe fixo C : y cada uno de por sí estubiere como reunido en un punto de la misma línea ó plano, se podrá partir numerador y denominador por el mismo seno, y quedará para este caso la longitud del péndulo simple $= \frac{A^2 A + B^2 B + C^2 C + \&}{AA + BB + CC + \&}$.

Escolio.

Esta fórmula, que muchos dieron por general, es solo cierta en este caso; en los demas, en que los cuerpos no estén reunidos en una línea que pase por el punto fixo, no tiene cabimento.

De las Palancas.

DEFINICION 32.

Fig. 18. 19. 20. Quando dos potencias α y β impelen, en las direcciones AD, BE, un cuerpo rígido AB, apoyado ó fixo en C, llaman á esta especie de instrumento, ó cuerpo rígido, *palanca*: y al apoyo ú punto fixo C, *hypomochlion*.

DEFINICION 33.

Fig. 18. Quando el hypomochlion está entre las dos potencias aplicadas en A y B, se llama *palanca del primer género*. Si está en un extremo, siendo la potencia β
Fig. 19. aplicada en B, ó la mas remota del hypomochlion, la que ha de vencer la otra α aplicada en A, y mas próxima al hypomochlion, se llama *palanca del segundo género*. Si está, asimismo, en un extremo, siendo la potencia mas próxima β la que ha de vencer la mas remota
Fig. 20. α, se llama *palanca del tercer género*.

Sien-

Corolario 1.

Siendo el ángulo CAD $=\Sigma$, y el CBE $=\sigma$, el ángulo giratorio, producido en la diferencial de tiempo dt, será, generalmente en las palancas, $=\frac{dt\int dt(CB.\beta sen.\sigma - CA.\alpha sen.\Sigma)}{S}$: denotando S la suma de todos los momentos de inercia, ú de todos los productos de cada partícula de masa de las que se pusieren en movimiento, por el quadrado de su distancia al punto fixo C.

Corolario 2.

Por ser CB. $sen.\sigma =$ á la perpendicular CF: y CA. $sen.\Sigma =$ á la perpendicular CG, será tambien el ángulo giratorio producido en la diferencial de tiempo $dt = \frac{dt\int dt(CF.\beta - CG.\alpha)}{S}$.

Corolario 3.

Quanto mayor fuere GF, tanto menor necesita ser la potencia β con que se hubiere de vencer la α: y lo mismo quanto menor fuere CG.

Corolario 4.

Conviene, pues, en la palanca, que la direccion BE sea perpendicular á la misma palanca, á fin de conseguir la máxima CF.

Corolario 5.

Conviene tambien que la masa de que se componga esta, sea la menos posible, ó que permita la fortaleza que requiere, á fin de disminuir las cantidades del denominador.

Corolario 6.

Si desde el principio de la accion fuere CB.$\beta sen.\sigma =$ CA.$\alpha sen.\Sigma$, ó CF.$\beta =$ BG.α, será el ángulo giratorio igual á cero, y la palanca quedará sin movimiento, ó en equilibrio.

Corolario 7.

Lo mismo que se ha dicho de dos potencias debe entenderse de varias que se apliquen á la palanca: pues por el (*Co.*4.*Pr.*17.) es $p\pi = a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + \&c$, y por consiguiente el momento de todas estas produce el mismo efecto que una sola π, colocada á la distancia del hypomochlion p.

Corolario 8.

Pudiendose expresar generalmente en la palanca su ángulo giratorio por $\frac{dt\int p\pi dt}{S}$, siendo π la potencia qualquiera que actue á la distancia del hypomochlion p, y S los momentos de inercia que padezca: y asimismo (*Cor.*1. *Prop.*18.) por $\frac{udt}{p}$, suponiendo u la velocidad del punto donde se coloque la potencia: será $\frac{dt\int p\pi dt}{S} = \frac{udt}{p}$, ó partiendo por dt, y diferenciando $p^2\pi dt = Sdu$; lo que da la potencia $\pi = \frac{Sdu}{p^2dt}$.

Corolario 9.

Quando una palanca gira sobre un punto qualquiera, la accion que padece es proporcional á Sdu: será, pues, en razon compuesta de los momentos de inercia S, y de la diferencial du.

Corolario 10.

Puesto que el ángulo giratorio, ó velocidad anguler es $=\frac{udt}{p}$: será *du* proporcional á la diferencial de la velocidad angular; por consiguiente tambien será la accion que padezca la palanca en razon compuesta de los momentos de inercia S, y de la diferencial de la velocidad angular.

Escolio 1.

Quando una palanca está firme en uno de sus puntos qualesquiera, sin poder girar sobre él, este punto se debe considerar como el hypomochlion sobre el qual tiende á girar la palanca. No girando, por suposicion, hay equilibrio de momentos (*Cor.* 2. *Prop.* 18.): con que si todos los que se emplearen resultaren positivos, es preciso que los haya negativos. Estos existirán en la misma masa de la palanca, ó en sus fibras, ó puntos, que actuan con direccion contraria, en virtud de sus fuerzas de atraccion, cohesion, ó qualesquiera que sean, como la experiencia las manifiesta. De esta suerte, si qualesquiera potencias actuaren sobre la palanca CA, fixa sobre la base KEDG, de conformidad que tienda á girar sobre el exe GE: todas las fibras ó puntos de la misma base resistirán, y el momento de cada una de ellas, será la fuerza efectiva que cada una exerciere, multiplicada por su distancia perpendicular al exe EG. Si llamamos, pues, *f* esta fuerza efectiva, y a, c, d, &c las varias distancias perpendiculares de las fibras al exe EG, será el momento *f*. (a+b+c+d+&c): luego, por la suposicion de no girar la palanca, será $p\pi=f(a+b+c+d+\&c)$: ó $f=\frac{p\pi}{a+b+c+d+\&c}$, denotando π la potencia Fig. 21.

que

que actuare sobre la palanca, y p la distancia perpendicular desde el exe EG á la direccion de la misma potencia. Pero f, en este caso, no solo denota la intensidad de la fuerza, sino el producto de esta, por la amplitud de la fibra: si suponemos esta $dydx$, y la intensidad que resultare f, será la fuerza de cada fibra $fdydx$, suponiendo CB $= x$, y FH, paralela al exe $= y$: será, pues, toda la fuerza de la diferencial HI $= fydx$, y su momento $= fyxdx$: luego, por lo dicho, será, en el caso de no girar la palanca, $f\int yxdx = p\pi$: ó $f = \frac{p\pi}{\int yxdx}$; bien entendido, que en $\int yxdx$ no solo se encierran positivos los momentos de las fibras del segmento GDE, sino tambien los del segmento GKE, pues aunque en este sean negativas las x, tambien lo son las fuerzas $fydx$ de las fibras, porque se comprimen estas, y no tiran á dilatarse como en el otro segmento. Los momentos que exercen cada uno de estos son iguales (*Cor.* 3. *Prop.* 17.) al producto de su area, por la intensidad f, y por la distancia de su centro de gravedad al exe GE: luego, si suponemos el area GDE $= A^2$, la GKE $= a^2$, la distancia del centro de gravedad de la primera al exe $=$ K, y la de la segunda $=$ k, será $\int yxdx = KA^2 + ka^2$: luego $f = \frac{p\pi}{KA^2 + ka^2}$.

Corolario 11.

Lo mismo se debe entender, aunque la palanca gire sobre un punto qualquiera, pues la accion que sobre ella actuare siempre ha de resultar sobre ella misma en qualquiera seccion como KD.

Corolario 12.

Siendo, en la rotacion de la palanca, (*Cor.* 8.) $\pi =$

$\pi = \frac{Sdu}{p^2 dt}$, será tambien en este caso $f = \frac{Sdu}{pdt(KA^2 + ka^2)}$: esto es, la accion que sobre las fibras resulte será como Sdu: ó como el producto de los momentos de inercia S, por la diferencial de la velocidad angular.

Corolario 13.

Si la total intensidad, ó fuerza efectiva de las fibras que componen la palanca, fuere pues mayor que $\frac{p\pi}{KA^2 + ka^2}$, ó que $\frac{Sdu}{pdt(KA^2 + ka^2)}$, la palanca resistirá; pero si fuere menor se romperá.

Corolario 14.

Suponiendo que la base KGDEK aumente en todas sus dimensiones lineares proporcionalmente, será $KA^2 + ka^2$, como $L^2 l$, expresando L el diámetro KD, y l el otro diámetro perpendicular á este: podemos hacer, pues, $KA^2 + ka^2 = nL^2 l$, denotando n un número qualquiera: luego tambien será $f = \frac{p\pi}{nL^2 l}$; ó $f = \frac{Sdu}{pdt\,(nL^2 l)}$.

Corolario 15.

Si suponemos en una palanca $f = \frac{p\pi}{nL^2 l}$, y en otra $F = \frac{P\varphi}{nL^2 l}$, será $f : F = \frac{p\pi}{L^2 l} : \frac{P\phi}{L^2 l}$.

Corolario 16.

Si las palancas fueren de un mismo material,

será $f = F$ y $\frac{p\pi}{L^2l} = \frac{P\phi}{L^2l}$: luego las fuerzas π y φ, que podrán aguantar estas palancas, serán como $\frac{P}{L^2l}$ á $\frac{p}{L^2l}$, ó como $\frac{L^2l}{p}$ á $\frac{L^2l}{P}$: esto es, en razon directa de L^2l, y en inversa de p; ó en directa de $KA^2 + ka^2$, y en inversa de p.

Corolario 17.

Lo mismo que se ha dicho de la seccion KD, se debe entender de otra qualquiera, como LM. La intensidad de las fibras en esta será, asimismo, $f = \frac{p\pi}{KA^2 + ka^2} = \frac{p\pi}{nL^2l}$: con sola la diferencia, que en este caso es $p =$ á la distancia desde el exe, en la seccion LM, á la direccion de la potencia. Luego si suponemos la intensidad de las fibras en $KD = F = \frac{P\varphi}{fL^2l}$, y la intensidad en $LM = f = \frac{p\pi}{fL^2l}$: siendo $F = f$, como sucederá en una palanca homogenea, tendremos $\frac{P\varphi}{L^2l} = \frac{p\pi}{L^2l}$, ó $\varphi : \pi = PL^2l : pL^2l$: y asi, para que la palanca sea igualmente fuerte en todos sus puntos ó distancias de la base, ó que pueda suportar con igual fortaleza la misma potencia $\varphi = \pi$, ha de ser $PL^2l = pL^2l$, ó $L^2l : L^2l = p : P$: esto es, las dimensiones lineares de la palanca, en los varios puntos, como KD, LM, han de ser como las raices cúbicas de sus distancias á la direccion de la potencia.

Corolario 18.

Para que la palanca sea igualmente fuerte en todos sus puntos, ha de ser una conoide, cuyos lados KL, ó DM serán parábolas del segundo grado : porque

que puesta y por una de las dimensiones lineares de las secciones KD, LM, x por la distancia de estas á la direccion de la potencia, y Q por el parámetro de la parábola, ha de ser constantemente $y^3 = Q^2 x$ para que la palanca sea en todos sus puntos igualmente fuerte.

Corolario 19.

Si en lugar de actuar sobre la palanca una sola potencia π, actuaren varias iguales, é igualmente distribuidas en toda la palanca, serán los momentos que estas exercerán, respecto de qualquiera de las secciones, como KD, LM, $= \frac{1}{2}x^2\alpha$, expresando α qualquiera de las dichas potencias iguales: luego en palancas homogeneas ha de ser constante la cantidad $\frac{x^2\alpha}{y^3}$ para que sea la palanca igualmente fuerte en todos sus puntos: esto es, ha de ser $y^3 = Qx^2$: equacion á la parábola del segundo grado, aunque de distinta especie que la primera.

Escolio 2.

La situacion del exe GE puede variar, ó distar mas ó menos del centro de la base KGDEK, segun la figura de esta, la calidad del material de que sea la palanca, disposicion en que se asegure esta, y de la direccion que tubiere la potencia. Esta situacion puede ser mas, ó menos ventajosa, ó dar mas, ó menos resistencia á la palanca. Supongamos que el exe GE se pueda colocar mas inmediato al extremo K de la cantidad z: en este caso serán los momentos del segmento GDE $= \int\int ydx(x+z)$: esto es, los primeros $\int\int yxdx + \int\int yzdx$, y los segundos $\int\int yxdx - \int\int yzdx$. La suma de estos momentos es mayor que la del primer caso, en que es $z=0$, de la cantidad $\int z\int ydx - \int z\int ydx$:

 es-

esto es, de fz Area GDE—fz Area GKE, y será mayor y menor quanto mayor sea z: luego quanto mayor sea z, mayor será KA^2+ka^2, ó su igual nL^2l, y por consiguiente menor la expresion $f=\frac{p\pi}{KA^2+ka^2}=\frac{n.L^2l}{p\pi}$: esto es, menos fuerza necesitan las fibras para resistir, ó mas resistirán en igual grado de fuerza: luego quanto mayor sea z, ó quanto mas diste el exe del punto que divide la base KGDEK en dos partes iguales, tanta mas resistencia tendrá la palanca.

Escolio 3.

En todo lo dicho se ha supuesto que la fuerza de las fibras en la seccion GKE, es igual á la que exercen las de la otra seccion GDE; pero actuando en aquellas por la compresion, y en estas por la dilatacion de las mismas fibras, no hay seguridad en que obre así la naturaleza de ellas; sin embargo puede suponerse, hasta que las experiencias manifiesten la verdadera ley con que exercitan sus fuerzas.

CAPITULO 5.

Del Exe y Radio de rotacion.

DEFINICION 34.

A La línea fixa en el systhema sobre la qual giran todos los cuerpos que la componen, describiendo pequeños arcos de círculo, aunque no sea sino por un instante ú diferencial de tiempo, llamamos *exe de rotacion*: y á la distancia perpendicular desde el centro de gravedad al exe, *radio de rotacion*.

PROPOSICION 24.

Hallar el exe de rotacion, ó punto sobre que gira el systhema.

Sea un systhema libre compuesto de qualesquiera número de cuerpos ligados entre sí por líneas inflexíbles que gire sobre el mismo plano del papel: C su centro de gravedad que, por la direccion CI, corrió el espacio CD en un instante ú diferencial de tiempo. Que un cuerpo qualquiera A pase en el mismo instante de A á B, y tiradas las líneas ACE, BDE, hasta que concurran en E, el ángulo AEB será el giratorio descrito por el systhema en el mismo instante ú diferencial de tiempo. Tómese $EH = ED$: tírese la DH: del punto F, que divide la CD en dos partes iguales, levántese la perpendicular FG, y haciendo el ángulo $CDG = EDH$, el punto G será donde se halle el exe, sobre el qual gira todo el systhema en el instante ú diferencial de tiempo que corrió el centro de gravedad de C á D. Fig. 22.

Los triángulos HED, CGD son semejantes, por construccion, y el ángulo $HED = CGD$. El ángulo $ACI = BDI + HED = BDI + CGD$, y el ángulo $IDG = DCG + CGD$. Sumando estas dos igualaciones, se tiene $ACI + DCG + CGD = BDI + CGD + IDG$: esto es, $ACI + DCG = BDI + IDG$, ó $ACG = BDG$: de suerte, que si con el movimiento se ajusta C sobre D, A sobre B, y toda la AC sobre la BD, por ser los ángulos ACG y BDG iguales, tambien se ajustará la CG sobre la DG, y el punto G habrá quedado inmóvil. A mas de esto, los triángulos ACG, BDG siendo iguales y semejantes, será $AG = BG$, y por consiguiente el cuerpo A, en la diferencial de tiempo, habrá descrito con el radio AG el pequeño arco AB.

Lo

es una proposicion de simple geometria y tiene lugar para un tiempo finito como para un infinitamente pequeño; su resolucion da generalmente la posicion del centro de rotacion de un sistema que giraria con sola la condicion de tener para dos instantes que le quiera la posicion de dos de sus puntos colocados en el plano giratorio ó en otro paralelo á este.

Lo mismo se demostrará de qualquiera otro cuerpo de los que compongan el systhema: luego el punto G en el plano directorio, y en la perpendicular FG á la direccion CI, levantada desde el centro de gravedad, será donde se halle el exe de rotacion.

Corolario 1.

A cada instante que muda el centro de gravedad de lugar, lo muda tambien el exe de rotacion: y no puede este quedar fixo, á menos que no quede tambien el centro de gravedad, y en tal caso gira sobre este el systhema.

Corolario 2.

Luego no hay exe fixo en el systhema, no siendo el que pasa por el centro de gravedad, sino por un instante ú diferencial de tiempo.

PROPOSICION 25.

Qualquiera de las líneas DG, CG, que es el radio de rotacion, es $= \frac{S\int \pi dt}{PM\int \pi dt\, sen.\Sigma}$.

El ángulo CGD $= \frac{CD}{CG}$ es (*Prop.* 24.) igual á AED,

veasе la nota al margen de la plana siguiente.

que es el de rotacion: luego será $\frac{CD}{CG} = \frac{Pdt\int \pi dt\, sen.\Sigma}{S}$:

ó substituyendo CD $= \frac{dt\int \pi dt}{M}$ (*Pro.* 5.) será $\frac{dt\int \pi dt}{M.CG} = \frac{Pdt\int \pi dt\, sen.\Sigma}{S}$: lo que dá CG $= \frac{S\int \pi dt}{PM\int \pi dt\, sen.\Sigma}$.

Corolario 1.

Como es $Psen.\Sigma = p$ (*Cor.* 20. *Lem.* 1.) tambien será el radio de rotacion $= \frac{S\int \pi dt}{M\int p\pi dt}$.

Co-

Corolario 2.

En los cuerpos que caen libremente por sola la accion de su gravedad, concurre el centro de las potencias con el de gravedad, ó es $p = 0$: luego el radio de rotacion será infinito, y por consiguiente los cuerpos que caen libremente por la sola accion de su gravedad, no pueden girar jamas: ni tampoco ninguno que estubiere animado con las potencias, cuyo centro concurra con el de gravedad.

Corolario 3.

Si la suma de las potencias π fuere igual á cero, ó quedare destruida por ser unas positivas y otras negativas, sin dexar de tener algun valor el integral $\int \pi dt \, sen. \Sigma$, ó $\int p \pi dt$, será tambien cero el radio de rotacion, y por consiguiente girará el systhema sobre su centro de gravedad.

Escolio 1.

Mr. Bouguer en su *Tratado del Navio* cap. 1. de la tercera seccion, dice: que si una línea recta es impelida perpendicularmente por dos potencias iguales de direcciones contrarias, aplicadas á los extremos de la línea, girará esta sobre su centro de gravedad. La proposicion no solo es cierta en este caso, sino en todos aquellos en que las potencias sean iguales, y de contraria direccion, aunque no impelan la línea perpendicularmente, ni estén aplicadas á los dos extremos, porque basta, como se ha dicho, que sea la suma de las potencias $\pi = 0$, como lo es, siendo las dos potencias iguales, y de contraria direccion, no haciendo al caso que estén colocadas donde se quiera, ni

[illegible] es de reparar que en la expresion $\frac{S\int \pi dt}{M\int p\pi dt}$ del angulo giratorio, la π del numerador es la suma de las potencias tomadas con sus signos atendiendo solo a su direccion y no a su posicion a uno y otro lado del hipomochlion; quando para la π del denominador que tambien es suma de potencias, para sumarlas se debe atender no solo a la direccion suya sino tambien a su posicion respecto del hipomochlion, de modo que donde este positivo el momento de una potencia respecto del hipomochlion, debe para el denominador mirarse como positiva esta potencia y donde negativo negativa, siendo asi distintas la π del numerador y la del denominador: en quanto a la distancia p de los dos centros es siempre igual a la suma de momentos de las potencias partida por la suma de estas tomadas con los mismos signos que tienen en los momentos [illegible]

ni que impelan con qualquiera ángulo, como no sea $\int \pi dt\, sen.\Sigma$, ó $\int p\pi dt = 0$. Bien es verdad que, exâminado mejor el caso, se hace imposible, ó no resuelve en él nada la fórmula, porque una línea tomada en rigor es inmaterial, y por consiguiente son en el caso tanto M, como S = 0; pero si se admite que ya no sea una línea, sino un paralelepípedo material, queda en su fuerza el reparo.

Escolio 2.

Juan Bernoulli en el tom. 4. de sus Obras *N.CLXXVII.* no determina el centro, ó exe de rotacion sino en el caso de ser $sen.\pi = 1$: esto es, de ser la línea tirada desde el centro de las potencias al de gravedad, perpendicular á la direccion: en él se reduce el radio de rotacion á $\frac{S}{PM}$, que es la expresion que hallamos (*Cor.* 3. *Def.* 30.) por la longitud del péndulo simple que hace las oscilaciones de igual magnitud y duracion que el péndulo compuesto, ó por la distancia desde el exe de rotacion al centro de oscilacion del péndulo ó systhema; lo que le hizo creer que el systhema giraba sobre su centro de oscilacion. En efecto si se considera que gire el systhema sobre su centro de gravedad fixo, y como si fuese un péndulo, su centro de oscilacion distaria, en este caso, del de gravedad de la cantidad $\frac{S}{PM}$, aunque del lado opuesto al que asignamos al exe de rotacion. *Mr. Bouguer*, en su *Maniobra de Navios* lib. 1. sec. 2. cap. 14, distingue bien que este punto está al lado opuesto de donde se coloca la potencia respecto del centro de gravedad; pero asigna, por regla general, que la distancia desde el centro de gravedad al exe de rotacion es en razon inversa de la que hubiere desde el mismo centro á la potencia,

Ó

ya hemos visto. Def.ª 25 lema 2.º y nota al margen q.e quando hai punto fixo, en $\frac{S}{PM}$ las distancias se cuentan desde el punto fixo, como centro de masas, pues el punto fixo hace la vez de una masa infinita colocada en el, y el valor de $\frac{S}{PM}$ es la distancia de este punto al de oscilacion. pero quando el sistema de los cuerpos [illegible] entre si es libre; las distancias se cuentan desde el centro de masas, y el valor de $\frac{S}{PM}$ es la distancia de este centro al de conversion ó rotacion, de modo que en ambos casos la $\frac{S}{PM}$ no tiene un mismo valor: en el caso de estar el punto fixo en el centro de masas [illegible] se deduce [illegible] sea en este caso PM = 0, la distancia de $\frac{S}{PM}$ de este centro al de oscilacion es infinita, pa[illegible] que entonces P, que para cada potencia representa su distancia al centro de masas, tiene siempre su [illegible]

Si se considera que gire el sistema sobre su centro de gravedad fixo, y como si fuera un pendulo, su centro de oscilacion distaria, en este caso, del de gravedad de la cantidad $\frac{S}{PM}$. advirtiase en primer lugar que por comparar el sistema a un pendulo, se supone que la unica potencia que obra es la gravedad en cuyo supuesto y de pasar el exe fixo por el centro de gravedad del sistema, expresa $\frac{S}{PM}$ una cantidad infinita; ademas se debe notar que en el mismo supuesto de ser el sistema un pendulo y de pasar el exe fixo de rotacion por el centro de masas; los dos centros de masas y de fuerzas coinciden en este mismo punto y el centro de oscilacion tanto por esto como por distar infinitam.te del de masas no puede decirse estar al lado opuesto del centro de masas respecto del de fuerzas.

ó como $\frac{S}{PM}$: quando no es sino como $\frac{S\int\pi dt}{PM\int\pi dt\ sen.\Sigma}$, que solo conviene con su regla, quando es $sen.\Sigma = 1$ y constante: en todos los demas casos será, en razon inversa de la distancia P, y en la directa de $\frac{\int\pi dt}{\int\pi dt\ sen.\Sigma}$. Esta diferencia procede de que, tanto *Mr. Bouguer*, como *Juan Bernoulli*, no indagaron el lugar del centro, ó exe de rotacion, sino en el primer instante que se pone en movimiento el systhema. En este instante es cierto que se puede suponer $sen.\Sigma$ constante, aunque no lo sea en lo succesivo, lo que reduce $\frac{\int\pi dt}{\int\pi dt\ sen.\Sigma} = \frac{1}{sen.\Sigma}$ constante, por lo que queda la distancia desde el centro de gravedad al exe de rotacion, solo en razon inversa de la distancia P.

CAPITULO 6.

De la Percusion.

DEFINICION 35.

PErcusion es el choque, ó golpe, que se dan los cuerpos, quando, movidos con distintas velocidades, ó direcciones, se encuentran.

DEFINICION 36.

Si despues de cumplido el choque, prosiguen los cuerpos unidos impeliendose, no se llama esta accion, sino *presion*.

En la expresion $\frac{S\int\pi dt}{PM\int\pi dt\ sen\Sigma}$ — $\frac{S\int\pi dt}{M\int\pi dt}$ reparasemos en primer lugar que para un instante qualquiera es siempre licito hacer sen Σ = 1; para esto no hai mas que hacer pasar por el centro de masas un plano perpendicular a la direccion de las potencias, y tomar por los momentos de estas potencias sus productos por sus distancias perpendiculares al exe de rotacion tomadas en este plano. En segundo lugar que aun en el caso de ser sen Σ = 1 no es consequencia forzosa que $\frac{S\int\pi dt}{PM\int\pi dt}$ se reduzca a $\frac{S}{PM}$ porque la $\int\pi dt$ del numerador partida por M es la expresion del movimiento del centro de gravedad en que las potencias se toman con los signos que corresponden a sus direcciones sin atender a su colocacion de uno u otro lado del centro de gravedad. Quando la $P\int\pi dt$ del denominador partida por S pertenece al angulo giratorio, en que entra la suma de momentos de potencias, y luego siendo P la distancia del centro de masas al de potencias, cada potencia en $\int\pi dt$ tendrà el signo no correspondiente a su direccion sino correspondiente al lado a que tiende a hacer girar al sistema, esto es que cada potencia por si tendrà en el denominador el mismo signo que su producto por su distancia al centro de masas, luego la $\int\pi dt$ del numerador y del denominador son dos cantidades distintas que no permiten reduccion a expresion mas simple.

DEFINICION 37.

Si alguno de los cuerpos en el acto del choque no se determina á la rotacion, se dice *centro de percusion* á aquel punto en donde se executa el choque.

Del mismo modo que en los cuerpos graves se llama centro de gravedad á aquel punto sobre que, apoyado el cuerpo, queda en equilibrio, sin determinarse á girar, ni por un lado, ni por otro: así tambien en la percusion se llama centro de ella al punto en que, chocado el cuerpo, queda en equilibrio, sin determinarse á la rotacion, ni por un lado, ni por otro.

Axîoma 4.

Los cuerpos son impenetrables, ó no pueden penetrarse ocupando al mismo tiempo el propio lugar.

Aunque veamos que un cuerpo se introduce en otro, no por ello las partículas de materia del primero ocupan el própio lugar que las del segundo: las de este ceden el suyo á las de aquel, y cada partícula ocupa su lugar separado, tanto antes, como despues, y aun en el mismo tiempo que se executa el choque; de suerte, que nunca pueden dos partículas ocupar el propio lugar.

Axîoma 5.

La Naturaleza obra por instantes, y por movímientos succesivos.

Esto es lo que algunos han llamado *ley de la continuidad.* Un cuerpo que corre por una direccion no puede pasar de un punto á otro, sin pasar antes por todos los intermedios: no puede pasar de una velocidad á otra mayor ó menor, sin haber tenido antes y succesivamente las intermedias: y asi de otros infinitos casos.

DE-

DEFINICION 38.

Si un cuerpo encuentra ó choca á otro, como (*Axio.* 4.) no se pueden penetrar, y el primero tira, con su inercia, á mantener su grado de velocidad, ha de impeler, poco á poco, y por grados succesivos, al segundo, que no tiene tanta, y la inercia de éste ha de exercitarse, con direccion contraria, á cada instante de la accion de aquel; debe por consiguiente experimentar cada uno de los cuerpos en el punto ó parage del contacto una fuerza ó potencia de reaccion en el impelente, y de accion en el impelido, igual (*Axio.* 1.) á la inercia de los cuerpos. A esta fuerza, qualquiera que sea, se llama *fuerza de percusion.*

Escolio 1.

No pudiera el primer cuerpo impeler al segundo, poco á poco y por grados succesivos, si ambos fueran perfectamente sólidos ú densos; esto es, si no tubieran poros ó intersticios entre las partículas de materia: era preciso entonces que todo el segundo cuerpo tomara repentinamente toda la velocidad del primero, lo que seria contra lo dicho (*Ax.* 5.).

Esta dificultad ha obligado á algunos á no admitir en la Naturaleza cuerpo perfectamente sólido; pero la consideracion de que en la division contínua de los cuerpos es preciso que se llegue á los primeros átomos de que se componen, y que en estos ya no haya poros, hace que no puedan excluirse de la Naturaleza los cuerpos sólidos. Otras dificultades se ofrecen tambien siempre que se vayan á exâminar las propiedades de las primeras partículas de la materia; pero no es esto de nuestro asunto, porque nos reducimos á tratar de los cuerpos ya compuestos de aquellas partículas,

y de estos no se conoce en la Naturaleza alguno que no tenga poros ó intersticios.

DEFINICION 39.

Con motivo de los poros ó intersticios, ceden las primeras partículas de los cuerpos su lugar al impulso del golpe ó percusion, y pasan á ocupar los intersticios mas remotos: en unos ceden menos, y en otros mas, y es lo que hace que los cuerpos se denominen mas ó menos duros, ó blandos; de suerte que el cuerpo será mas duro quanto menos cedieren las partículas su lugar al impulso del golpe ó percusion.

Escolio 2.

De esto proceden los huecos, cabidades, ó impresiones que se forman en los cuerpos por medio de los choques, y aun las introducciones, ó por decirlo asi, penetraciones de unos cuerpos en otros, y decimos, aunque con impropiedad, que una bala penetró en una pared, un clavo en una tabla, y así de otros cuerpos.

Escolio 3.

Es menester no confundir la dureza de los cuerpos con la densidad: el oro es mas denso que el acero; pero este es mas duro que el oro: el azogue es mas denso que la plata, y aquel no es duro: y así de otros muchos cuerpos. No por esto se pretende persuadir á que la dureza esté enteramente independiente de la densidad: el mismo oro batido con el martillo, y reducido á menor volúmen, y por consiguiente á mayor densidad, admite mayor dureza. Si un cuerpo no tubiera poros, ó fuera infinitamente denso, ninguna de sus partes pudiera ceder al golpe, con que seria asi-

asimismo infinitamente duro. Puede, por consiguiente, depender la dureza de la densidad; pero puede asimismo depender de la cohesion de las mismas partes: la experiencia es la que por ahora nos puede manifestar el grado de dureza de cada uno de ellos.

DEFINICION 40.

A los cuerpos que, al ceder las partes su lugar, no se separan unas de otras, ó no se rompen, llaman *tenaces*: y la tenacidad es mayor, quanto mas resistieren las partes la separacion.

DEFINICION 41.

A los cuerpos que no pueden ceder las partes su lugar sin romperse, llaman *fragiles*: y la fragilidad es mayor, quanto mas facilmente se separaren ó rompieren las partes que reciban el choque.

DEFINICION 42.

Elasticidad es la fuerza que la experiencia ha manifestado residir en los cuerpos, con la qual las partes forzadas, ó que cedieron al impulso de un golpe, ó presion, tienden á restituirse á su lugar respectivo que antes del golpe ó presion ocupaban. Esta es la fuerza, con la qual una pelota vuelve á elevarse quando cae en el suelo: la misma con que un muelle, despues de forzado, tiende á restituirse á su primera situacion: con que el arco dispara la flecha; y asi de otros muchos casos. Esta fuerza permanece en qualquiera de las particulas de materia que ceden al impulso del golpe, á menos que en la accion no se rompan ó separen totalmente ó en parte algunas de ellas; pues por este medio pierden asimismo totalmente ó en parte su elas-

elasticidad. Actua esta fuerza á qualquiera instante del choque , concurriendo con la de percusion de quien hace la parte ó el todo , y tiende á separar los cuerpos con direcciones opuestas.

Corolario I.

La elasticidad aumenta , segun aumentan las partes forzadas , ó que cedieron al impulso del golpe ; ó lo que es lo mismo , segun aumente la impresion : y se tendrá la mayor fuerza de elasticidad quando se tenga la mayor impresion , ó impresion total.

Corolario 2.

En este estado de la mayor impresion , la fuerza de elasticidad existe , puesto que habiendo ido en aumento , no puede (*Ax.*5.) llegar á desvanecerse sin pasar por todos los grados de disminucion: con que el cuerpo impelente debe continuar en disminuir su velocidad , y en aumentarla el impelido hasta que las partes forzadas regresen enteramente ó en parte al lugar que antes ocuparon.

DEFINICION 43.

Si el regreso de las partes forzadas es total , se dice que la elasticidad es perfecta , ó que el cuerpo es perfectamente elástico; sino es mas que en parte , el cuerpo no será de perfecta elasticidad ; y si no hubiere regreso en todo el discurso del choque, el cuerpo no será elástico.

Escolio 4.

La experiencia manifiesta , que el efecto que procede de la percusion ó choque, excede mucho al que pro-

produce la presion. Es muy trivial y manifiesta esta experiencia para que no se hiciese en todo tiempo digna de reparo. *Aristóteles*, en la qüestion 20. de su Mechánica pregunta, por qué una hacha con el golpe divide, y no lo executa quando solo se comprime, ó empuja? No fue mucho que este Philosopho se contentase con hacer la interrogacion, quando hasta nuestros tiempos ha durado la dificultad, y ha sido motivo de varias disputas. *Leibnitz*, atendiendo á esta disparidad de efectos, distinguió la fuerza que produce la percusion, de la que actua en la presion: llamó *fuerza viva* á la primera, y *fuerza muerta* á la segunda. Esta distincion ha tenido, y quizas tiene hoy, grandes partidos. *Juan Bernoulli*, en la Definicion 2. del cap. 3. de su discurso sobre las leyes de la comunicacion del movimiento, define las dos fuerzas en estos términos. La fuerza viva *es aquella que reside en un cuerpo quando está en un movimiento uniforme: y la fuerza muerta, aquella que recibe un cuerpo sin movimiento, quando está solicitado ó impelido para moverle, ó para moverle con mas ó menos velocidad quando el cuerpo está ya en movimiento.* Esta definicion no constituye la fuerza viva dependiente del choque, puesto *que reside en un cuerpo quando está en un movimiento uniforme*, y sin expresar que sea, ó no, en la accion del choque. El propio Autor aclara aun mas esto en su Disertacion sobre la verdadera nocion de las fuerzas vivas N.CXLV. parrafo 1, donde dice: *Vis viva non consistit in actuali exercitio, sed in facultate agendi: subsistit enim, etiamsi non agat, neque habeat in quod agat.* La facultad de actuar que conocemos en los cuerpos es la fuerza de inercia, ó por mejor decir, fuerza innata de la materia: y por esto, todos quantos se han inclinado y adherido á esta distincion de las fuerzas vivas, no han distinguido estas de las de inercia que obran en el choque, como ya diximos, ó á lo me-

menos han convenido que son las que las producen. En esto conviene el mismo *Bernoulli*, pues, en el cap. 3. parr. 3. del discurso ya citado, dice, hablando de la fuerza viva, *su naturaleza es enteramente diferente, no puede ni nacer ni perecer en un instante como la muerta; es menester mas ó menos tiempo para producir una fuerza viva en un cuerpo que no la tenia; es menester tambien tiempo para destruirla en un cuerpo que la tenia. La fuerza viva se produce en un cuerpo succesivamente quando, estando en reposo, una presion qualquiera aplicada al mismo cuerpo le imprime poco á poco y por grados un movimiento local. Este movimiento se adquiere por grados infinitamente pequeños, y monta á una velocidad determinada que permanece uniforme al instante que la causa que puso al cuerpo en movimiento cesa de actuar sobre él: y asi la fuerza viva producida en un cuerpo en un tiempo determinado -------- es equivalente á la parte de la causa que se consumió en producirla.* En un cuerpo que choca otro que está en reposo, la inercia de aquel es, como diximos antes, la que poco á poco y por grados imprime á este segundo cuerpo un movimiento local, que monta á una velocidad determinada: y por consiguiente la inercia es la presion que, aplicada al primer cuerpo, ó residiendo en él, produce la fuerza viva en el segundo. No es preciso, sin embargo, segun esta definicion, que sea el choque el que produzca la fuerza viva: puede resultar de una potencia qualquiera. La gravedad, por exemplo, en un cuerpo libre, actua sobre él, y poco á poco le imprime un movimiento local, ó una fuerza viva, que reside despues en el cuerpo. En fin, la fuerza viva reside en los cuerpos, segun estos Autores, y procede de una presion ó potencia qualquiera; pero no es la misma presion ó potencia que la produce, sino otra cosa, que no han acabado aún de definirnos ni explicarnos qual sea. Por esta duda se persuadió natu-

ral-

ralmente *Eulero*, tom. I. de las *Memorias de la Academia Real de Berlin*, á que la fuerza viva era la fuerza de percusion; pero esta, segun la definicion que de ella dimos, es una potencia que actua; y no puede ser, segun los Autores citados, quando mas, sino la que produce la fuerza viva. Tan lexos están los parciales de esta de suponerla la de percusion, ú de qualquiera otra presion, que repiten, no ser comparable esta con la otra, de la misma suerte que no lo es lo finito con lo infinito, ó una línea con una superficie, como dice el mismo *Bernoulli*. Mas si no nos dan una perfecta definicion ó conocimiento de las fuerzas vivas, á lo menos nos aseguran en general, que son proporcionales á los efectos que producen: esto es, á la impresion que resulta en el choque; esta nocion tan clara, como parece, no hace sino arrojarnos en mayores dificultades. Una presion qualquiera produce asimismo una impresion que se hace bien sensible en los cuerpos blandos: y siendo así, cómo se puede afirmar, que la fuerza de la presion, y la viva son incomparables, de la misma manera que lo finito con lo infinito? Es verdad que la presion produce su impresion con relacion al tiempo: esto es, á cada instante aumenta su impresion de una pequeña diferencial; lo que en las fuerzas vivas parece que sus parciales no quieren que suceda. Para esto era preciso que la impresion se hiciera simultanea, lo que fuera contra lo dicho (*Ax.* 5.): de haber de ser en un tiempo determinado, por corto que sea, ya es preciso que la fuerza viva actue como la presion, y no puede diferenciarse de ella. Pero de qualquiera suerte que sea, la fuerza viva mas es qüestion de nombre que otra cosa, y nombre aplicado á objeto que aun no sabemos qual sea; pero en ninguna manera conduce á variar la theórica ni cálculo del movimiento: pues que se admita ó no esta fuerza viva, el movimiento procede de

la potencia que actua, sea la que fuere, y las velocidades que resultaren, los espacios que se corrieren, y el tiempo que durare la accion serán, tanto de un modo como de otro, siempre los mismos. Toda la diferencia consiste en saber, á qué se debe dar el nombre de fuerza viva, cuya dificultad parece que aun existe entre los que fueron Autores de ella. Aquí no entenderemos, segun se dixo (*Def.* 13.), por fuerza sino á una accion ó potencia qualquiera, á fin de evitar dudas: y mas adelante se verá, que si solo por la gran diferencia de efectos se introduxo la fuerza viva, bien podemos desde ahora desprendernos de ella, porque basta la fuerza de percusion para satisfacer, como se demonstrará, á quantos phenómenos de esta naturaleza manifieste la experiencia.

DEFINICION 44.

Llamaremos *profundidad de la impresion* á lo mas profundo de esta, tomada la medida segun la direccion del movimiento: y *amplitud de la misma impresion* á la mayor seccion de esta, hecha perpendicularmente á la direccion del movimiento.

PROPOSICION 26.

La fuerza de percusion es en razon compuesta directa de la dureza de los cuerpos, y amplitud de las impresiones.

El cuerpo es mas duro (*Def.* 39.), quanto menos cedieren sus partículas al impulso del golpe: esto es, quanto mayor fuere la diferencial de la velocidad corrida en un instante dt del choque. Al mismo tiempo quando mayor fuere el número de partículas chocadas, ó mayor fuere la amplitud de la impresion, tambien será mayor la misma diferencial: luego será esta en

Sin embargo de verse con claridad que al paso que aumentan la dureza y amplitud de las impresiones, aumenta tambien la fuerza de percusion, no se ve con tanta evidencia que estos aumentos sigan una misma razon. con efecto hagase igual á uno el producto de las durezas y amplitudes de impresiones de dos cuerpos que van chocan, como tambien la fuerza de percusion que resulta del choque; y despues quedando lo mismo todo lo demas, duplíquese la dureza de uno de los dos cuerpos v.g. del chocado, claro está que siguiendo el principio establecido en esta proposicion, debe ser doble la fuerza de percusion ~~en este caso que en el primero~~: sin embargo si se atiende bien al modo de obrar de los cuerpos, se verá que el efecto del aumento de dureza en uno de los cuerpos (aqui en el chocado) es por una parte aumentar la diferencial de velocidad en ambos

en razon compuesta directa de la dureza de los cuerpos, y amplitud de las impresiones; pero la fuerza, que actua, es (*Ax.* 2.) como dicha diferencial: luego tambien será la fuerza de percusion, en razon compuesta de la dureza de los cuerpos, y amplitud de las impresiones.

Corolario 1.

Luego no cabe en la Naturaleza cuerpo absolutamente blando: porque no habiendo alteracion en el movimiento, no hay fuerza que resista; y donde no hay resistencia no hay cuerpo.

Corolario 2.

No cabe tampoco cuerpo que no sea elástico: porque consistiendo esta fuerza en la reaccion de una potencia que puede comprimir el cuerpo, no puede llegar esta compresion á desvanecerse sin pasar por todos los grados de disminucion, y por consiguiente sin dar lugar á las partes forzadas á que se rehagan, segun la direccion con que impelen en su reaccion. Solo pudiera dificultarse el caso de los cuerpos perfectamente duros; pero ya se ha dicho que estos no caben en caso de duda sino en los primeros átomos, de que no pretendemos tratar.

Escolio 1.

No impide para lo demonstrado que las bases de las impresiones no sean planas y paralelas á las amplitudes de estas: de qualquiera manera no caben en la accion mas puntos que resistan, segun el movimiento, que los comprehendidos en la amplitud: y para resistir, lo mismo es que todos estén igualmente profundos, que si no lo estubieran, con tal que la dureza por este motivo no varíe. M2 Es-

cuerpos, es a saber positivam.te en el chocado y negativam.te en el chocante, y por otra aumentar la profundidad de impresion en el chocante y tal vez su amplitud; por consiguiente el efecto de este aumento de dureza, repartiendose entre los dos cuerpos, chocante y chocado, no puede emplearse todo en aumentar la diferencial de velocidad en el chocado, a lo que es lo mismo, la fuerza de percusion; luego se debiera decir que la fuerza de percusion es como una funcion de la dureza de los cuerpos y amplitud de sus impresiones. En la proposicion 27 se verá como la consideracion del extremo de dureza en uno de los cuerpos da por el valor de esta funcion el producto de durezas y amplitudes de ambos cuerpos, partido por suma de productos de durezas y amplitudes de cada cuerpo; formula de la qual nos havremos de contentar hasta que venga el tiempo en que se nos aclare este misterio, descubriendonos el modo de obrar de la naturaleza en lo efectivo y finito.

Escolio 2.

No obstante la facilidad con que se ha demonstrado la razon en que actua la fuerza de percusion, se hace bien dificil la averiguacion de su precisa medida: porque aunque algunos han supuesto generalmente que la impresion se hace de la misma figura del cuerpo chocante, no puede mantenerse esta opinion en los cuerpos duros y tenaces. En mucho número de estos la amplitud ha de ser siempre mucho mayor. Como si
Fig. 23. el cylindro AB muy duro é incapaz de impresion sensible, la hace por medio del choque sobre otro cuerpo CD, esta, en los cuerpos tenaces, no será de la misma figura EFBG del cylindro, sino como HFBI: porque no rompiendose con facilidad las partes contiguas á los puntos F, y B, sin embargo que estos cedan, es preciso que aquellas tambien cedan, las inmediatas á estas tambien, y asi succesivamente: de suerte, que se forma el hueco HFE todo al rededor del cylindro, haciendose la amplitud de la impresion del diámetro HI, en lugar de FB: lo que dificulta la medida de la precisa impresion. Pero no se puede tampoco admitir esto sin alguna variacion, pues si en lugar de cylindro, fuera el cuerpo AB una esphera, un cono, ú otro cuerpo, cuya base FB no fuese paralela á HI, puede, en tal caso, disminuir mucho el hueco, y aun quizas desvanecerse enteramente, si el cuerpo CD no fuere de mucha tenacidad y dureza. A mas de esto, aunque el cuerpo chocado sea todo de una misma densidad ó dureza, esta puede variar con motivo de aproxîmarse mas las particulas superiores á las inferiores, y contener ya mas número de ellas la base FB al fin de la impresion que al principio, particularmente en los cuerpos tenaces y elásticos: de suerte que, por qualquiera de estos motivos, aunque la base FB es

cons-

constante, y por consiguiente se hubiera creido, sin ellos, que la fuerza de percusion habia de serlo tambien, ya dexa de ser asi.

PROPOSICION 27.

Hallar la relacion entre la fuerza de percusion, la dureza de los cuerpos, y amplitud de las impresiones.

Si expresamos la amplitud de la impresion HI por H, y la dureza del cuerpo CD, á qualquiera instante dal choque, por D, será la fuerza de percusion, como DH; pero esto no cabe, sino en quanto sea el cylindro AB muy duro, ó incapaz de impresion. Si la relacion de la dureza de este, á la del cuerpo CD, no es infinita, las partículas del cylindro, en la base FB, deben ceder tambien, y la diferencial de la velocidad dependerá asimismo de la base FB, y de la dureza del cylindro. Llamando aquella *H*, y esta *D*, dependerá dicha diferencial de los productos DH y *DH*: ó será en razon compuesta DH*DH* de los dos; pero quando sea *DH* infinito, respecto de DH, ó este cero, respecto de aquel, ha de quedar la impresion en DH: luego será dicha diferencial de la velocidad, y por consiguiente la fuerza de percusion, como $\frac{DH\mathit{DH}}{DH + \mathit{DH}}$

Escolio I.

Quando las primeras partículas del cuerpo CD llegan por su fragilidad á romperse, suelen por su fuerza elástica, comprimir los lados AG, FB del otro cuerpo AB, y las escabrosidades de aquel forman en ellos otras tantas pequeñas impresiones laterales. Estas se deben considerar, por lo dicho, como otras tantas pequeñas amplitudes de impresiones, que, unidas con la de la base GB, harán el todo de la amplitud H. Despues de cumplida la impresion total, la elasticidad que actua en la base GB, tiende á hacer regresar al cuer- Fig. 24.

cuerpo AB; pero las pequeñas impresiones laterales resisten al regreso. Esta accion dependerá, pues, del exceso de la fuerza elástica en GB, sobre la que fuera necesaria para vencer las pequeñas impresiones laterales: si aquella fuere mayor que esta, el cuerpo AB regresará; y si menor, quedará en reposo desde el instante que hubiere perdido toda su velocidad positiva. Pero es preciso que la elasticidad en GB, al instante que el cuerpo AB queda parado, sea mayor que la fuerza necesaria para vencer las pequeñas impresiones laterales: porque aquella es igual á la de inercia del cuerpo AB, y esta vence, no solo la resistencia de las partes en GB, sino tambien la de las pequeñas impresiones: y asi es preciso que el cuerpo AB vuelva siempre hacia atras despues de quedar parado. Puede, no obstante, ser de muy corta cantidad, porque la elasticidad de GB irá disminuyendo al paso que el cuerpo regrese, y puede llegar el caso en que no sea suficiente para vencer las pequeñas impresiones laterales. Lo mismo se debe entender en los cuerpos conglutinosos, ya sea porque estos formen tambien algunas escabrosidades laterales, ya sea porque la misma conglutinacion, ó cohecion de las partes, los detenga. Si el cuerpo AB llegase á penetrar enteramente el CD, el número de las pequeñas impresiones laterales quedará constante. En este caso, no variando la dureza, ni la amplitud de la impresion principal, ya no puede dexar de ser constante la fuerza de percusion.

Escolio 2.

Supondremos generalmente en el cálculo, que los dos cuerpos que se han de chocar se mueven en la misma direccion, ó en direcciones opuestas; pues si se movieren en distintas direcciones, facil es descomponer sus movimientos, y hacer el cálculo para cada fuerza separadamente. Supondremos tambien, para ma-

mayor facilidad, que los cuerpos son igualmente densos y regulares, como dos cylindros, dos espheras, dos paralelepípedos, &c. á fin que, movidos segun la direccion de sus exes, la fuerza de la percusion ú del choque, impela en la misma direccion: pues teniendo los cuerpos igual y semejante figura por todas partes al rededor del punto donde se executa el golpe ó choque, y siendo igualmente densos, no hay motivo para que se incline mas á un lado que á otro la fuerza de percusion, porque por todas partes debe ser de igual longitud la impresion, y por consiguiente igual la fuerza, y asi no puede producir otra direccion que la que tienen los cuerpos.

Tambien supondremos, que si algunas potencias animaren los cuerpos, estén estas colocadas en sus centros de gravedad, á fin que no redunde rotacion, ó que el choque se haga en los centros de percusion para evitar lo mismo.

Por ultimo supondremos, que los cuerpos sean de suficiente magnitud para que las impresiones no penetren, ó alcancen hasta los centros de gravedad, á fin que el movimiento de estos no quede alterado, por alterarse su sitio respectivo á las demás partes del cuerpo.

Estableceremos en general, que sean ------

A y B los dos cuerpos que se hubieren de chocar.

z x las longitudes de las impresiones que en ellos se hicieren.

α β las potencias constantes que los animen.

U V las velocidades con que empiezen el choque.

u v las velocidades á qualquier tiempo del mismo choque.

a b los espacios corridos en el mismo tiempo.

D D las densidades.

H H las amplitudes de las impresiones.

t el tiempo.

π la fuerza de percusion $= \frac{\mathrm{DH}DH}{\mathrm{DH}+DH}$.

Se

Se supone que el cuerpo A siga y choque al B, y que la velocidad U sea mayor que V; sin ello no se podría efectuar el golpe, á menos que V no fuese negativa; pero, para mayor facilidad en el cálculo, pondremos siempre, tanto las potencias α y β, como las velocidades U y V positivas, pues es facil colocar negativa la cantidad de estas que lo fuere.

PROPOSICION 28.

Hallar la relacion entre las impresiones, y los espacios corridos por los cuerpos.

Puesto que el cuerpo A sigue al B, y que en ellos se forman las impresiones de las longitudes z y x, el espacio a corrido por el cuerpo A, debe ser igual al espacio b corrido por el cuerpo B, con mas las longitudes z y x de las impresiones, que es el espacio que las partes de los mismos cuerpos ceden: será, pues, $a = b + z + x$, ó $a - b = x + z$.

Corolario I.

Al fin de la percusion, si con el motivo de casi una perfecta elasticidad se llegan á separar los cuerpos despues del choque, es $x + z = 0$: luego tambien será $a - b = 0$, ó $a = b$: esto es, al fin de la percusion de los cuerpos casi ó perfectamente elásticos, el espacio corrido, durante el choque, por el cuerpo A, es siempre igual al espacio corrido por el cuerpo B.

PROPOSICION 29.

Hallar el valor de la diferencial de tiempo dt.

De la equacion $a - b = x + z$, tenemos tambien $da - db = dx + dz$; pero (*Corol.* 4. *Propos.* 3.) son $udt = da$, y $vdt = db$, que dan $(u - v) dt = da - db$: lue-

luego $(u-v)\,dt = dx + dz$: de que resulta --- $dt = \frac{dx+dz.}{u-v}$.

Corolario.

Al tiempo de cumplirse las máxîmas impresiones x y z, si en efecto se cumplieren, es $dx + dz = o$: con que será $u-v = o$, ó $u = v$: esto es, al cumplirse las máxîmas impresiones, los cuerpos correrán con iguales velocidades.

PROPOSICION 30.

Hallar la relacion entre las velocidades de los cuerpos.

Las fuerzas ó potencias que animan al cuerpo A, para variar su movimiento son α y π, y esta negativa: con que (*Cor. Ax.* 2.) es $(\alpha-\pi)\,dt = A\,du$.

Las dos potencias que animan al cuerpo B, son β y π, y ambas positivas, que dan $(\beta+\pi)\,dt = B\,dv$.

Sumando estas dos equaciones, tenemos $(\alpha+\beta)dt = A\,du + B\,dv$, é integrando $(\alpha+\beta)t = A(u-U) + B(v-V)$: que dá $Au + Bv = (\alpha+\beta)t + AU + BV$: y $v = \frac{(\alpha+\beta)t + AU + BV - Au}{B}$.

Corolario I.

El tiempo t en que sucede el choque es muy corto, como enseña la experiencia, y despues se verá demonstrado: luego si las velocidades U y V, ó qualquiera de ellas, fuese de un valor infinito respecto de t, será la cantidad $(\alpha+\beta)t$ cero, respecto de las demas, á menos que no sea $\alpha+\beta$ infinito, y quedará $AU + BV = Au + Bv$.

Corolario 2.

$AU + BV$ es la suma de los movimientos de los cuerpos antes ó al principio del choque, y $Au + Bv$ es la suma de los movimientos de los mismos cuerpos á qualquiera instante del choque: luego la suma de los movimientos á qualquiera tiempo del choque, es igual á la suma de los movimientos antes ó al principio del choque.

Escolio 1.

Esta proposicion se dá por general en todas las Mechánicas; pero yá se vé que no es cierta, sino quando $(\alpha + \beta)t = 0$, ó quando esta cantidad es despreciable, respecto de U ó V. No habiendo esta condicion, será $AU + BV + (\alpha + \beta)t = Au + Bu$: donde se ve que, habiendo potencias que actuen, el movimiento, á qualquiera tiempo del choque, no es el mismo que antes, ó al principio del choque.

Escolio 2.

Se ofrece una qüestion, que ha sido muy controvertida entre los Philosophos, sobre si se conserva, ó no, la misma cantidad de movimiento. Por lo demonstrado parece que sí. El defenderse que no, consiste en que, siendo V negativa, será, suponiendo α y β cero, $AU - BV = Au + Bv$: donde se vé, que en este caso la diferencia de los dos movimientos AU y BV es la igual á la suma de Au y Bv: luego tomando BV como positivo, como lo toman los que siguen este dictamen, no hay duda que será $AU + BV > Au + Bv = AU - BV$; de suerte, que la perdida del movimiento será 2BV. Esto no obstante, no quita el rigor de nuestra demonstracion, pues quando hablamos

mos de la suma de los movimientos es habiendose de tomar negativo el que lo fuere, sin suponerle positivo: y en tal caso la ley ó principio es cierto.

Corolario 3.

Al tiempo de suceder la máxîma impresion, se halló (*Corol. Propos.29.*) $u-v=0$; ó $u=v$: luego substituyendo uno ú otro valor en la equacion $Au+Bu=(\alpha+\beta)t+AU+BV$, resulta $u=v=\frac{(\alpha+\beta)t+AU+BV}{A+B}$, velocidad de los cuerpos al tiempo de suceder la máxîma impresion.

Corolario 4.

Si la cantidad $(\alpha+\beta)t$ fuere despreciable, respecto de las otras, quedará $u=v=\frac{AU+BV}{A+B}$.

Escolio 3.

Los cuerpos de poquísima, ó ninguna elasticidad, han de continuar corriendo con la velocidad adquirida en la máxîma impresion, por no haber fuerza alguna que pueda alterarla: con que esta será la velocidad con que los cuerpos de poca, ó casi ninguna elasticidad, corren despues del choque.

Escolio 4.

Ahora es tiempo que desatemos la dificultad que se ofreció (*Esc.2. Ax.2.*) sobre si es aplicable la equacion $\alpha=\frac{Adu}{dt}$ al caso de impeler la potencia α al cuerpo A. Un Autor, digno de los mayores elogios, y de

los mas respetables de la Europa supone, para poderlo dudar, que dos cuerpos se choquen, estando el uno en reposo, y dice: que la mutacion ó alteracion del movimiento de este, será, por lo demonstrado $Bu = Bv = \frac{AUB}{A+B}$, supuesto $V = o$, en lo que no tenemos duda y convenimos; y añade: que para que el efecto sea proporcional á la potencia, como se supone en la equacion $\alpha = \frac{Adu}{dt}$, era preciso que en este caso fuese la causa que produxo la mutacion $\frac{AUB}{A+B}$ proporcional á esta misma mutacion, quando no se puede demonstrar que en efecto lo sea. A mi me parece que todo el efecto producido $\frac{AUB}{A+B}$ ha de ser proporcional á la suma de todas las acciones de la potencia durante todo el tiempo de la accion; pero no á una sola accion instantánea. El efecto que debe ser proporcional á esta, es la diferencial de movimiento, ó alteracion instantánea de este. Si es el cuerpo A el que choca al B, la potencia del primero es su inercia, que es proporcional á Adu: con que será en qualquiera instante $-Adu = Bdv$. Integrando será $A(U-u) = Bv$, suponiendo $V = o$: con que luego que se llegue en la accion hasta ser $u = v$, quedará $u = \frac{AU}{A+B}$, y $Bu = \frac{AUB}{A+B}$: esto es, todo el movimiento producido en el cuerpo B, durante la accion, hasta ser $u = v$, será proporcional á $\frac{AUB}{A+B}$; pero esto no prueba que la accion instantanea Adu no sea proporcional á Bdv; antes, al contrario, prueba que efectivamente lo es, pues de su suposicion redunda la verdad que se manifiesta.

PRO-

PROPOSICION 31.

Hallar la relacion entre las diferenciales de las velocidades, y las de las impresiones.

De la equacion $(\alpha-\pi)dt = Adu$, tenemos $\frac{(\alpha-\pi)dt}{A} = du$: y de la $(\beta+\pi)dt = Bdv$, $\frac{(\beta+\pi)dt}{B} = dv$: restando una equacion de otra $\left(\frac{\alpha-\pi}{A} - \frac{\beta+\pi}{B}\right)dt = du - dv$; ó $\left(\alpha B - \beta A - \pi(A+B)\right)dt = AB(du-dv)$: y substituyendo (*Propos.* 29.) $dt = \frac{dx+dz}{u-v}$, será $\left(\alpha B - \beta A - \pi(A+B)\right)(dx+dz) = AB(u-v)(du-dv)$.

Corolario 1.

Si se integra la cantidad $\int(\alpha B - \beta A - \pi(A+B))(dx+dz)$, todas las cantidades resultantes se hallarán multiplicadas por x ó z; pero al fin del choque de los cuerpos casi ó perfectamente elásticos, es $x=0$, y $z=0$: luego al fin del choque de estos cuerpos es $\int AB(u-v)(du-dv) = \frac{1}{2}AB(u-v)^2 - \frac{1}{2}AB(U-V)^2 = 0$: que da $U-V = v-u$: esto es, en los cuerpos casi ó perfectamente elásticos, la velocidad relativa de ellos, antes del choque, es igual á la velocidad relativa, despues del choque.

Corolario 2.

Substitúyase en la equacion $U-V = v-u$ el valor de v hallado (*Pr.* 30.) $v = \frac{(\alpha+\beta)t + AU + BV - Au}{B}$:

y

y tendremos, para el fin del choque de los cuerpos casi ó perfectamente elásticos, $U - V + u = \frac{(\alpha+\beta)t + AU + BV - Au}{B}$: de que se deduce, $u = \frac{(\alpha+\beta)t + U(A-B) + 2BV}{A+B}$.

Corolario 3.

Substitúyase asimismo este valor en la equacion $v - U + V = u$, y será $v - U + V = \frac{(\alpha+\beta)t + U(A-B) + 2BV}{A+B}$, que dá $v = \frac{(\alpha+\beta)t + V(B-A) + 2AU}{A+B}$.

Corolario 4.

Si la cantidad $(\alpha+\beta)t$ fuere despreciable, respecto de las demas, quedará $u = \frac{U(A-B)+2BV}{A+B}$, y $v = \frac{V(B-A)+2AU}{A+B}$.

Corolario 5.

En el mismo caso de ser despreciable $(\alpha+\beta)t$, respecto de las otras cantidades, tendremos tambien $u^2 = \frac{U^2(A-B)^2 + 4BUV(A-B) + 4B^2V^2}{(A+B)^2}$

$Au^2 = \frac{AU^2(A-B)^2 + 4ABUV(A-B) + 4AB^2V^2}{(A+B)^2}$

$v^2 = \frac{V^2(B-A)^2 + 4AUV(B-A) + 4A^2U^2}{(A+B)^2}$

$Bv^2 = \frac{BV^2(B-A)^2 + 4ABUV(B-A) + 4A^2BU^2}{(A+B)^2}$: que dá Au^2

$$Au^2+Bv^2=\frac{AU^2(A-B)^2+4A^2BU^2+BV^2(B-A)^2+4AB^2V^2}{(A+B)^2}$$

$$=\frac{AU^2(A+B)^2+BV^2(A+B)^2}{(A+B)^2}=AU^2+BV^2$$: luego en los cuerpos casi ó perfectamente elásticos, quando $(\alpha+\beta)$ es despreciable, respecto de las otras cantidades, la suma de los productos de cada masa, por el quadrado de su velocidad, es la misma al principio y al fin del choque, ó antes y despues de este.

PROPOSICION 32.

El producto DHdx de la amplitud de la impresion y de la diferencial dx corrida por las partículas del cuerpo chocado, es siempre igual al producto *DHdz* de semejantes cantidades, del cuerpo chocante.

El producto DH de la dureza, por la amplitud, (*Prop.*26.) es proporcional al número de partículas chocadas, y la diferencial dx (*Cor.*4. *Prop.*3.), como la velocidad con que se mueven dichas partículas: luego el producto DHdx, es como el movimiento de las mismas partículas. DHdx—*DHdz*, será, segun esto, como el movimiento de todas, que (*Esc.* 2. *Propos.* 30.) es constante; pero al principio del choque este movimiento es cero: luego tendrémos siempre DHdx—*DHdz*=0; ó DHdx=*DHdz*, y dz=$\frac{\text{DH}dx}{DH}$

PROPOSICION 33.

Hallar la relacion entre las velocidades, y las impresiones.

Substitúyanse en la equacion (*Proposic.* 31.) $(\alpha B-\beta A-\pi(A+B))(dx+dz)=AB(u-v)(du-dv)$

los

los valores de (*Proposic.* 27.) $\pi = \frac{DHDH}{DH + \overline{DH}}$, y de (*Proposicion* 32.) $dz = \frac{\overline{DH}}{DH} dx$: y quedará

$$\left(\alpha B - \beta A - (A+B)\left(\frac{DHDH}{DH + \overline{DH}}\right)\right)\left(dx + \frac{\overline{DH}}{DH} dx\right) =$$

$AB(u-v)(du-dv)$: y reduciendo $(\alpha B - \beta A)\left(\frac{DH + \overline{DH}}{\overline{DH}}\right)dx - (A+B)\,DHdx = AB(u-v)(du-dv)$: é integrando

$$(\alpha B - \beta A)\int\left(\frac{DH + \overline{DH}}{\overline{DH}}\right)dx - (A+B)\int DHdx =$$

$\frac{1}{2}AB\left((u-v)^2 - (U-V)^2\right)$: ó porque es

$\int\left(\frac{DH + \overline{DH}}{\overline{DH}}\right)dx = x + z$, substituyendo este valor

$$(\alpha B - \beta A)(x+z) - (A+B)\int DHdx = \tfrac{1}{2}AB\left((u-v)^2 - (U-V)^2\right)$$

PROPOSICION 34.

Hallar la velocidad u con que se mueve el cuerpo A á qualquiera tiempo del choque.

Despéjese en la equacion precedente el valor de $u-v$, y será $u - v = \pm\left((U-V)^2 + \frac{(\alpha B - \beta A)(x+z)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B)\int DHdx}{\frac{1}{2}AB}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Substitúyase el valor de v hallado (*Prop.* 30.) $v = \frac{(\alpha+\beta)t + AU + BV - Au}{B}$, y será $\frac{Au + Bu - AU - BV - (\alpha+\beta)t}{B}$

$$= \pm\left((U-V)^2 + \frac{(\alpha B + \beta A)(x+z)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B)\int DHdx}{\frac{1}{2}AB}\right)^{\frac{1}{2}};$$

que dá la velocidad $u = \frac{AU + BV + (\alpha+\beta)t}{A+B} \pm$

$$\frac{B}{A+B}\left((U-V)^2 + \frac{(\alpha B - \beta A)(x+z)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B)\int DHdx}{\frac{1}{2}AB}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

El

El signo superior, en el caso de que no haya aun sucedido la máxîma impresion; y el inferior despues de haber sucedido.

Corolario 1.

Si fuere $V = 0$, y $B = \infty$, quedará $u = \pm \left(U^2 + \frac{\alpha(x+z)}{\frac{1}{2}A} - \frac{\int DHdx}{\frac{1}{2}A}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Corolario 2.

Si los cuerpos A y B fuesen perfectamente elásticos, de suerte que, en el regreso de A, no varíe la cantidad DH, las dos velocidades de este cuerpo, positiva y negativa, á iguales distancias del origen de las x, ó á iguales distancias de donde se termina la máxîma impresion, serán iguales.

Corolario 3.

Si los cuerpos no fueren perfectamente elásticos, como es regular suceda en la naturaleza, la cantidad DH será menor en el regreso á iguales distancias de las x: y por consiguiente, la velocidad negativa á las mismas iguales distancias, será menor que la positiva.

Corolario 4.

Ya no podrá ser, pues, $u = U$ en el origen de las x, sino menor. No podrán tampoco las primeras partículas de los cuerpos regresar enteramente á su primera situacion: quedará, por consiguiente, una pequeña impresion al tiempo que se separen, y la velocidad, en este instante, será menor que la que obtuviere el cuerpo A en el origen de las x: con que será mucho menor que la primitiva U.

Corol.° 7°

Si los cuerpos no fueren perfectam.te elasticos, las x que cuentan desde la superficie de los cuerpos en su estado natural hasta su mayor longitud en la maxima impresion, á iguales distancias de tiempo de esta maxima impresion seran mayores despues de la maxima impresion que antes. y por consiguiente la H tambien pero siendo H una superficie cuya magnitud pend. de la de x, se puede suponer $H = Mx^2$ siendo M una constante, lo que muda la formula del corol.° 1.° en la siguiente $u = \pm \left(U^2 + \frac{\alpha(x+z)}{\frac{1}{2}A} - \frac{\int DMx^2dx}{\frac{1}{2}A}\right)^{\frac{1}{2}}$ en que se ve que el termino negativo $\frac{\int DMx^2dx}{\frac{1}{2}A}$ aumenta como el cubo de x quando el termino positivo $\frac{\alpha(x+z)}{\frac{1}{2}A}$ solo aumenta como la cantidad linear $x+z$. por otra parte al principio del movimiento $u = +U$, lo que da $\int DHdx = \alpha(x+z)$ ambos iguales a cero, y en la maxima impresion $u = 0$, lo que da $\int DHdx = \alpha(x+z) + \frac{1}{2}AU^2$; luego á iguales distancias de tiempo contando desde la maxima impresion en que la x es mayor despues que antes de ella, es mayor la diminucion del valor de u que proviene del termino negativo $\frac{\int DHdx}{\frac{1}{2}A}$ que el aumento que resulta a este valor del termino positivo $\frac{\alpha(x+z)}{\frac{1}{2}A}$. Luego &c.

Corolario 5.

Como la potencia α actua negativamente en el regreso, ó retarda el movimiento del cuerpo A, aun despues de separado del B, llegará á parar aquel, como se explicó en el movimiento retardado; y volviendo despues positivamente, executará segundo choque, adquiriendo (*Cor.* 4.), al tiempo de encontrar de nuevo al cuerpo B, la misma velocidad que tenia quando se separó de él: esto es, una velocidad menor que U, que será como la primitiva para el segundo choque.

Corolario 6.

El orígen de las x estará tambien mas profundo para este segundo choque, puesto que las primeras partículas de los cuerpos no pudieron en el primero, regresar á su primera situacion.

Corolario 7.

Lo mismo sucede en tercero, quarto, ó mas choques continuados. En todos disminuye mas y mas la velocidad primitiva hasta pararse el cuerpo A, haciendo las ultimas impresiones de cada choque de cantidades infinitamente chicas: y quedando (*Def.* 36.) la fuerza de percusion $\pi = \alpha$.

PROPOSICION 35.

Hallar la velocidad v con que se mueve el cuerpo B á qualquiera tiempo del choque.

Substitúyase el valor de u ultimamente hallado en la equacion (*Pro.* 30.) $v = \frac{(\alpha + \beta)t + AU + BV - Au}{B}$:

y

y despues de despejar, se hallará $v = \frac{AU + BV + (\alpha + \beta)t}{A + B}$

$$\mp \frac{A}{A+B}\left((U-V)^2 + \frac{(\alpha B - \beta A)(x+z)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B)\int DH dx}{\frac{1}{2}AB}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

El signo superior, en el caso de no haber sucedido aun la máxîma impresion; y el inferior despues que haya sucedido.

PROPOSICION 36.

Hallar el valor de la impresion en caso de ser la dureza D constante.

Puesto que se supone D constante, será $\int DH dx = D\int H dx$; pero $\int H dx$ es el valor de la impresion, á causa que H denota su amplitud, y dx la diferencial de su profundidad: luego substituyendo en la equacion (*Propos.* 33.) $D\int H dx$ en lugar de $\int DH dx$, y ordenando, en caso de ser constante la dureza D, será el valor de la impresion $\int H dx =$

$$\frac{\frac{1}{2}AB\left((U-V)^2 - (u-v)^2\right) + (\alpha B - \beta A)(x+z)}{D(A+B)}.$$

PROPOSICION 37.

Hallar el valor de la máxîma impresion, en caso de ser la dureza D constante.

Al suceder la máxîma impresion (*Cor. Prop.* 29.) es $u - v = 0$: substituyendo, pues, este valor en el de la impresion precedente, y llamando I la máxîma, será $I = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2 + (\alpha B - \beta A)(x+z)}{D(A+B)}$.

Corolario I.

Si el cuerpo B estubiere inmovil, tendremos que colocar $B = \infty$, $V = 0$, y quedará el valor de la máxî-

máxîma impresion $I = \frac{\frac{1}{2}AU^2 + \alpha(x+z)}{D}$.

Corolario 2.

En los cuerpos que caen libremente por la sola accion de la gravedad es (*Cor.* 1. *Princ.* 3.) $\alpha = 32A$, ó $A = \frac{1}{32}\alpha$. Substituyendo este valor en la equacion antecedente, se reduce á $I = \frac{\frac{1}{64}\alpha U^2 + \alpha(x+z)}{D}$. Pero si llamamos e la altura de donde cayere el cuerpo, es (*Cor.* 1. *Princ.* 3.) $e = \frac{1}{64}U^2$: luego substituyendo este valor, será, en los cuerpos que caen por sola la accion de la gravedad, $I = \frac{\alpha(e+x+z)}{D}$.

Corolario 3.

Si las cantidades x y z fueren despreciables, respecto de la e, quedará $I = \frac{\alpha e}{D} = \frac{\alpha U^2}{64D}$; ó, substituyendo el valor de $\alpha = 32A$, $I = \frac{32Ae}{D} = \frac{AU^2}{2D}$. Luego en los cuerpos que caen por la accion de la gravedad, las impresiones que hicieren son en razon compuesta directa de los cuerpos, y de las alturas de donde caen: ú de los cuerpos, y de los quadrados de las velocidades primitivas con que chocan; y en inversa de las durezas ú densidades.

Escolio 1.

No hay sino consultar los Autores de Phísica experimental para ver como convienen estas fórmulas

con

significan estas formulas que [illegible] quando el cuerpo chocante puede penetrar al chocado, a volumenes iguales y semejantes las impresiones estan en razon compuesta de la directa de las masas y del quadrado de la velocidad al tiempo de empezarse el choque, y de la inversa de la dureza del cuerpo chocado: pero siendo desiguales los volumenes, por ser distinto el numero de particulas quitadas de su sitio en el cuerpo chocado, parece que la impresion debe estar tambien en razon inversa de la cara anterior del cuerpo chocante, pues esta es la unica que produce la dislocacion de las partes en el chocado. Tambien se debe advertir que a volumenes iguales en el cuerpo chocante, y siendo el chocado imobil y penetrable, la I puede tomarse por la profundidad de la impresion.

con sus experiencias. El *Dr. Gravesande*, en su tom. 1. §.833 ; describe un instrumento para dexar caer con propiedad varias espheras de cobre sobre greda. En la tercera experiencia dexa caer tres del mismo diámetro ; pero de distinto peso, por haber hecho las dos huecas : sus pesos eran como 1, 2 y 3. Las dexó caer todas de nueve pulgadas de alto, y halló que las impresiones que hicieron fueron asimismo como 1, 2 y 3. En la decima experiencia, á mas de esto, dexó caer las dos mas pesadas de 18 pulgadas de alto, y halló que sus impresiones fueron como 4 y 6, duplas de las primeras : con que en efecto, por estas experiencias, las impresiones eran en razon compuesta de los pesos ó masas, y de las alturas de donde cayeron ; ú de los pesos ó masas, y de los quadrados de las velocidades primitivas.

Corolario 4.

Si los dos cuerpos que se chocan fueren iguales, y sin potencias que los animen en el choque, será $B = A$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$: lo que reduce el valor de la impresion (*Prop.* 37.) á $I = \frac{A(U-V)^2}{4D}$; ó si fuere $V = 0$; á $I = \frac{AU^2}{4D}$: luego, como antes, tambien serán las impresiones en razon compuesta directa de los pesos ó masas, y de los quadrados de las velocidades con que se chocan ; y en inversa de las durezas.

Escolio 2.

Esto mismo confirman otras muchas experiencias que en el parage citado trae el *Dr. Gravesande* : de donde deduce, que siendo los efectos proporcionales á las causas, y aquellos á las impresiones, es preciso que estas que pretende con *Leibnitz*, sean las fuerzas vi-

vivas imaginarias, sean tambien en razon compuesta de las masas y de los quadrados de las velocidades.

Escolio 3.

Puesto que las experiencias, no solo en cuerpos blandos como la greda, sino en elásticos y duros convienen con nuestras fórmulas en el caso de ser la dureza D constante, es evidente que la dureza en estos casos ha sido á lo menos sensiblemente constante, y que la podemos suponer asi. Por la misma razon de convenir las experiencias con el cálculo, en que supusimos la impresion de la misma figura esphérica del cuerpo chocante A: es evidente, á lo menos en cuerpos blandos como la greda, que no tubo lugar en estos casos el hueco HFE. No obstante esto, no puede dexar de exîstir en cuerpos mas elásticos: aun en blandos como la greda, dice el mismo *Gravesande*, §.824, que quando la amplitud de la impresion es muy grande, respecto de su profundidad, las razones en que se fundó ya no tienen lugar, porque en este caso, de qualquiera naturaleza que sea la greda, sus partículas ceden lateralmente: lo que prueba que el hueco se forma, aun en cuerpos blandos, como el chocante no sea de figura que aumente por grados su amplitud.

PROPOSICION 38.

Determinar la profundidad de la impresion, en caso de ser $H = Qx$: denotando Q una constante.

Substitúyase en la equacion (*Proposicion* 36.)

$$\int H\,dx = \frac{\frac{1}{2}AB\left((U-V)^2-(u-v)^2\right)+(\alpha B-\beta A)(x+z)}{D(A+B)},$$

Qx por H: intégrese, y quedará $\frac{1}{2}Qx^2 =$

$$\frac{\frac{1}{2}AB\left((U-V)^2-(u-v)^2\right)+(\alpha B-\beta A)(x+z)}{D(A+B)}.$$

En la su-

suposicion de ser $\mathrm{H} = \mathrm{Q}x$, será tambien $H = \mathrm{Q}z$, y $\mathrm{DH}dx = DHdz$, cuya equacion se reducirá á $\mathrm{DQ}xdx = D\mathrm{Q}zdz$, que, partiendo por Q, é integrando, dá $\mathrm{D}x^2 = Dz^2$, y $z = \frac{\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}}{D^{\frac{1}{2}}}x$. Substitúyase este valor en la equacion, y resultará $\frac{1}{2}\mathrm{Q}x^2 = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{AB}D^{\frac{1}{2}}\left((\mathrm{U}-\mathrm{V})^2-(u-v)^2\right)+(\alpha\mathrm{B}-\beta\mathrm{A})(\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}+D^{\frac{1}{2}})x}{\mathrm{D}D^{\frac{1}{2}}(\mathrm{A}+\mathrm{B})}$

y despejando

$$x = \frac{(\alpha\mathrm{B}-\beta\mathrm{A})(\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}+D^{\frac{1}{2}})}{\mathrm{D}D^{\frac{1}{2}}\mathrm{Q}(\mathrm{A}+\mathrm{B})} \pm \left(\frac{\left((\alpha\mathrm{B}-\beta\mathrm{A})(\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}+D^{\frac{1}{2}})\right)^2}{\left(\mathrm{D}D^{\frac{1}{2}}\mathrm{Q}(\mathrm{A}+\mathrm{B})\right)^2}+\frac{\mathrm{AB}\left((\mathrm{U}-\mathrm{V})^2-(u-v)^2\right)}{\mathrm{DQ}(\mathrm{A}+\mathrm{B})}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Corolario 1.

En el caso de la máxîma profundidad, ó impresion, es $u-v=0$: luego quedará la máxîma profundidad

$$x = \frac{(\alpha\mathrm{B}-\beta\mathrm{A})(\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}+D^{\frac{1}{2}})}{\mathrm{D}D^{\frac{1}{2}}\mathrm{Q}(\mathrm{A}+\mathrm{B})} \pm \left(\frac{\left((\alpha\mathrm{B}-\beta\mathrm{A})(\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}+D^{\frac{1}{2}})\right)^2}{\left(\mathrm{D}D^{\frac{1}{2}}\mathrm{Q}(\mathrm{A}+\mathrm{B})\right)^2}+\frac{\mathrm{AB}(\mathrm{U}-\mathrm{V})^2}{\mathrm{DQ}(\mathrm{A}+\mathrm{B})}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Corolario 2.

Si fuere $\mathrm{V}=0$, y $\mathrm{B}=\infty$, quedará la máxîma

$$x = \frac{\alpha(\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}+D^{\frac{1}{2}})}{\mathrm{D}D^{\frac{1}{2}}\mathrm{Q}} \pm \left(\left(\frac{\alpha(\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}+D^{\frac{1}{2}})}{\mathrm{D}D^{\frac{1}{2}}\mathrm{Q}}\right)^2+\frac{\mathrm{AU}^2}{\mathrm{DQ}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Co-

no se ve muy bien por que la Q que multiplica la x y la z ha de ser la misma.

Corolario 3.

Si, á mas de esto, fuere tambien $U = o$, quedará la máxima $x = \frac{2\alpha(D^{\frac{1}{2}} + \mathit{D}^{\frac{1}{2}})}{D\mathit{D}^{\frac{1}{2}}Q}$: esto es, en razon simple directa de la potencia α, que impele al cuerpo A.

PROPOSICION 39.

Determinar la profundidad de la impresion, en caso de ser π constante.

Esta prop.ⁿ es una consecuencia inmediata de la 31. el valor de x + z, se halla integrando dha formula y partiendo ambos miembros por el coeficiente de x + z en el primero.

Supóngase $\pi(A+B) = \frac{DH\mathit{DH}}{DH+\mathit{DH}}(A+B) = n(\alpha B-\beta A)$, denotando n un número qualquiera: y respecto de ser constantes DH y DH, se reducirá la equacion (*Prop.*32.) $DHdx = \mathit{DH}dz$, á $DHx = \mathit{DH}z$, y $\mathit{DH} = \frac{DHx}{z}$. Substitúyase este valor en la primera equacion, y quedará $\frac{DHx(A+B)}{x+z} = n(\alpha B - \beta A)$: que dá $Hx = \frac{n(\alpha B-\beta A)(x+z)}{D(A+B)}$ (*Proposicion* 36.) $= \frac{\frac{1}{2}AB\left((U-V)^2-(u-v)^2\right)+(\alpha B-\beta A)(x+z)}{D(A+B)}$. De que se deduce $x+z = \frac{\frac{1}{2}AB\left((U-V)^2-(u-v)^2\right)}{(n-1)(\alpha B-\beta A)}$; ó substituyendo $\frac{\pi(A+B)}{\alpha B-\beta A} = n$, $x+z = \frac{\frac{1}{2}AB\left((U-V)^2-(u-v)^2\right)}{\pi(A+B)-(\alpha B-\beta A)}$ $= \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2}{\pi(A+B)-(\alpha B-\beta A)}$ quando x+z pertenece á la maxima impresion; pues serán entonces $u-v = 0$

Co-

Corolario 1.

Si fuere $V = o$, y $B = \infty$, quedará $x+z = \frac{\frac{1}{2}A(U^2-u^2)}{\pi-a}$.

Corolario 2.

En el caso de la máxima impresion es $u-v=o$: luego para este caso será $x+z = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2}{\pi(A+B)-(\alpha B-\beta A)}$.

Corolario 3.

No habrá, pues, máxima impresion, ó no tendrá límite, á menos que no sea $\pi(A+B)-(\alpha B-\beta A)$ positivo, ó que sea $\pi(A+B) > \alpha B-\beta A$.

Corolario 4.

Si fuere $V = o$, y $B = \infty$, quedará la máxima $x+z = \frac{\frac{1}{2}AU^2}{\pi-a}$.

PROPOSICION 40.

Hallar el valor de la dureza D.

Puesto que se ha hallado esta constante, ó sensiblemente constante, se reducirá la equacion (*Prop.* 33.) á

$$(\alpha B-\beta A)(x+z)-D(A+B)\int Hdx = \tfrac{1}{2}AB\left((u-v)^2-(U-V)^2\right):$$

que da $D = \frac{\frac{1}{2}AB\left((U-V)^2-(u-v)^2\right)+(\alpha B-\beta A)(x+z)}{(A+B)\int Hdx}$

el valor de D se saca inmediatam.te de la proposicion 37

ó en el caso de la máxima impresion, en que es $u-v=o$, será $D = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)(x+z)}{(A+B)I}$.

Corolario I.

Si fuere $B = \infty$, y $V = 0$, como en las experiencias citadas, hechas sobre la greda por *Gravesande*, quedará $D = \frac{\frac{1}{2}AU^2 + \alpha x}{I} = \frac{\alpha(e+x)}{I}$.

Escolio.

Tomemos, por exemplo, la primera experiencia, que fue dexar caer la esphera de menor peso de 9 pulgadas de alto, y en que halló el diámetro de la impresion de $\frac{65}{800}$, siendo el de la esphera de $\frac{1}{8}$. De esto se deduce el valor de $x = \frac{100 - (10000 - 65.61)^{\frac{1}{2}}}{1600} = \frac{3}{200}$. El de $I = cx^2\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{3}x\right)$; denotando c la circunferencia, cuyo diámetro es la unidad. El de A, que es la masa total de la esphera, $= \frac{4c}{9.16.16.16}$: lo que da $\alpha = \frac{4.32c}{9.16.16.16}$. Estos valores de α y de I substituidos en $D = \frac{\alpha(e+x)}{I}$, dan $D = \frac{e+x}{6x^2(3-16x)} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{200}}{\frac{6.9}{40000}\left(3 - \frac{48}{200}\right)} = 200\frac{3800}{9936}$. Lo mismo se deduce, con corta diferencia, de las demas experiencias. Del mismo modo se deducirá el valor de D, en qualesquiera materias con que se hagan las experiencias.

Co-

Corolario 2.

Hallado el valor de D, por la equacion $D = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2 + (\alpha B - \beta A)(x+z)}{(A+B)I}$, se halla asimismo el de D: porque siendo $D\int H dx = D\int H dx$, ó $DI = DI$, denotando I la profundidad de la máxima impresion en el cuerpo A, será $D = \frac{DI}{I}$. Midiendo en la experiencia el valor de I, se tendrá por consiguiente el de D.

PROPOSICION 41.

La máxima fuerza de percusion es la que actua al tiempo de concluirse la impresion total.

Al tiempo de actuar la máxima impresion es la diferencial de π, ú de su igual $\frac{DHDH}{DH+DH}$ cero: esto es $\frac{HdH}{DH+DH} + \frac{HdH}{DH+DH} - \frac{HH(DdH+DdH)}{(DH+HD)^2} = o$: ó reduciendo $DH^2dH + DH^2dH = o$; pero esta cantidad no puede ser cero, sin que las diferenciales dH y dH sean cero: esto es, sin que hayan aumentado las amplitudes H y H, ó las impresiones, todo lo que tengan que aumentar: luego la máxima fuerza de percusion es la que actua al tiempo de concluirse la impresion total.

PROPOSICION 42.

Hallar la fuerza de percusion π.

La fuerza de percusion á qualquiera instante del choque es (*Prop.* 27.) $\pi = \frac{DHDH}{DH+DH}$. Substitúyase

en esta equacion el valor de $D = \frac{DI}{I}$ (*Cor.* 2. *Prop.* 40): y quedará $\pi = \frac{D^2HIH}{I\left(DH + \frac{DIH}{I}\right)} = \frac{DHIH}{HI + HI}$. Substitúyase asimismo en esta equacion el valor de $D = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2 + (\alpha B - \beta A)(x+z)}{(A+B)I}$ (*Prop.* 40.), y será

$$\pi = \frac{HH}{HI + HI}\left(\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2 + (\alpha B - \beta A)(x+z)}{A+B}\right)$$

maxima impresion, $\pi = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2 + (\alpha B - \beta A)(x+z)}{(A+B)(x+z)}$, luego da $\frac{HI+HI}{HH} = x+z$

Escolio.

Las cantidades I, *I*, ya se sabe que expresan las máxîmas impresiones; pero, á mas de esto, se debe advertir que las *x y z* son tambien las profundidades de las máxîmas impresiones, pues resultan del valor substituido de B: solo las H y *H* son las que se deben considerar variables en esta equacion para obtener los varios valores de la fuerza π.

Corolario 1.

Siendo la máxîma fuerza de percusion aquella en que suceden las máxîmas H y *H*, se sigue que, colocando en la equacion los valores de las máxîmas H y *H*, se tendrá la máxîma fuerza de percusion.

Corolario 2.

En el caso de ser $B = \infty$, $V = 0$, y $\frac{D}{D} = 0$; de que resulta $I = 0$, $z = 0$, quedará $\pi = \frac{H}{I}(\frac{1}{2}AU^2 + \alpha x)$: y en la caida de los cuerpos por su

$\pi = \alpha + \frac{AU^2}{2x}$

su gravedad, en que es $\frac{1}{2}AU^2 = \alpha e$ (*Cor.* 2. *Princ.* 1.)

$$\pi = \frac{H\alpha}{I}(e+x).$$

Corolario 3.

La fuerza de gravedad será, pues, á la de percusion, como α á $\frac{H\alpha}{I}(e+x)$; ó como 1 á $\frac{H}{I}(e+x)$: y asimismo como I á $H(e+x)$.

Escolio 1.

En las experiencias de *Gravesande* sobre la greda es $H = cx\left(\frac{1}{8} - x\right)$; y $I = cx^2\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{3}x\right)$: luego será $\frac{H}{I} = cx \frac{\left(\frac{1}{8} - x\right)}{cx^2\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{5}x\right)} = \frac{\frac{1}{8} - x}{x\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{3}x\right)}$: que da la fuerza de gravedad á la de percusion, como 1 á $\frac{(e+x)\left(\frac{1}{8} - x\right)}{x\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{3}x\right)}$. En la primera experiencia fue $e = \frac{3}{4}$, y se halló $x = \frac{3}{200}$: luego fue la fuerza de gravedad á la de percusion, como 1 á $\frac{\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{200}\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{3}{200}\right)}{\frac{3}{200}\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{200}\right)}$; ó como 1 á $109\frac{76}{369}$: de suerte, que la fuerza de percusion, aun en un cuerpo blando como la greda, y cayendo la esphera de solo 9 pulgadas de alto, fue 109 veces mayor que la de gravedad.

Co-

Corolario 4.

Si fuere B $=\infty$, V $=0$, D $=D$, y con corta diferencia H $=H$, I $=I$, $z=x$, será - - - - - $\pi=\frac{H}{2I}(\frac{1}{2}AU^2+2ax)$; y en la caida de los cuerpos por su gravedad $\pi=\frac{Ha}{2I}(e+2x)$.

Corolario 5.

La fuerza de gravedad será, pues, en este caso á la de percusion, como 1 á $\frac{H}{2I}(e+2x)$.

Escolio 2.

Quando dos cuerpos muy duros, como de hierro, se chocan, la impresion I, que en ellos se hace, es casi infinitamente chica, respecto de H $(e+2x)$: luego en este caso la fuerza de percusion será casi infinita, respecto á la de gravedad. Tomemos, por exemplo, el golpe de un martillo sobre un yunque: y respecto que I expresa la magnitud de la impresion, que ha de ser como el producto de H, amplitud de la misma, por una cantidad proporcional á la profundidad de ella, que por experiencia sabemos ser cortísima; podemos poner $I=H.\frac{1}{k}$, expresando k un número qualquiera, tal que $\frac{1}{k}$ sea aun menor que la profundidad de la impresion, que, quando mas será de $\frac{1}{15000}$, ó $\frac{1}{12000}$ de pie. Puesto, pues, este valor en

la expresion, será la fuerza de gravedad á la de percusion, como 1 á $\frac{H}{2H.\frac{1}{k}}(e+2x) = \frac{1}{2}k(e+2x)$; ú despreciando la x por cortísima, como 1 á $\frac{1}{2}ke$. Si la velocidad del martillo equivaliese á la que tomara cayendo de 10 pies de altura, y pusiésemos solamente $k = 12000$; será la fuerza de gravedad á la de percusion del mismo martillo, como 1 á 60000: esto es, será esta fuerza 60000 veces mayor que la de gravedad: y el efecto del martillo equivaldrá al que pudiera causar sobre el mismo punto donde se dió el golpe un peso 60000 veces mayor que el del martillo. Esto basta para no maravillarse ya del prodigioso efecto de la fuerza de percusion.

Escolio 3.

Esta theórica se puede asimismo aplicar á las cuerdas: pues si estando firme un extremo de ellas en E, hay al otro extremo un peso A que se dexa caer de una altura qualquiera, la accion en la caída total, quando se estiende enteramente la cuerda, como en EF., es una verdadera percusion. Para aplicar á este caso las mismas fórmulas, H denotará la seccion perpendicular á la cuerda; D la calidad del material, ó fortaleza de él; I el producto de H, por el máximo de lo que la cuerda se alarga en la accion, y x lo que se alargue en qualquier caso. Siendo, á mas de esto, el punto fixo ó firme E aquel sobre que se exercite la accion, hemos de suponer este un cuerpo infinito: esto es $B = \infty$, Fig. 25.

$V = 0$, $\frac{D}{D} = 0$, $I = 0$, y $z = 0$: por lo que la fórmula que conviene á este caso es (*Corolario* 2.)

$\pi = \frac{H}{I}(\frac{1}{2}AU^2 + \alpha x)$: denotando U la velocidad

que

que tubiere el cuerpo A al instante que cumple la entera caida; ó suponiendo $I = HX$, denotando X todo lo que la cuerda se puede alargar hasta el caso de romper, $\pi = \frac{1}{X}(\frac{1}{2}AU^2 + \alpha x)$: y en la caida de los cuerpos por la accion de su gravedad será tambien $\pi = \frac{\alpha}{X}(e + x)$. Quando el cuerpo A se aplica á la cuerda solo para que le sostenga, sin dar caida alguna, es $e = o$: luego en este caso será $\pi = \frac{\alpha x}{X}$: y si fuere tanto el peso, que llegue al punto preciso de romper la cuerda, será $x = X$, y $\pi = \alpha$: esto es, la fuerza de percusion, que en este caso es de presion, igual al peso del cuerpo, que podemos llamar P. Llámese p el que puede sostener la cuerda en caso de caida: y como su fuerza es constante, tendremos para el preciso punto de romperse en la caida $P = \frac{p}{X}(e + X)$: esto es, el peso con que precisamente se romperá la cuerda en la caida $p = \frac{PX}{e + X}$. La cantidad X es proporcional á la longitud de la cuerda, porque cada parte de ella se alarga proporcionalmente: luego si llamamos l la longitud de la cuerda, y $\frac{1}{n}$ la razon de lo que se alarga respecto de su longitud, será $X = \frac{l}{n}$, y $p = \frac{P \cdot \frac{l}{n}}{e + \frac{l}{n}} = \frac{Pl}{ne + l}$. No debe entenderse aqui por lo que se alarga una cuerda, lo que efectivamente se alarga quando nueva, á los primeros esfuerzos que hace; sino á aquello que despues de estos esfuerzos se recoge, y queda para alargarse de nue-

nuevo en otras ocasiones: que en substancia no es sino lo que la cuerda se alarga y encoge por su elasticidad. Una cuerda de cañamo de tres pulgadas de circunferencia, siendo buena, aguanta hasta cargarla de 65 quintales, y se alarga de $\frac{1}{10}$: con esto será $P = 65$, y $\frac{1}{n} = \frac{1}{10}$, ó $n = 10$: lo que dá $p = \frac{65.l}{10.e + l}$. Si la cuerda tubiera, pues, 100 pies de largo, y dexaran caer el peso p colgado de ella de los mismos 100 pies, fuera $p = \frac{6500}{1000 + 100} = \frac{65}{11} = 5\frac{10}{11}$ quintales, que es el peso menor con que romperá la cuerda. De la fórmula, y de lo que acabamos de ver se deduce, que quanto mas larga sea la cuerda, mas aguantará en la percusion, ó, como dicen los Marineros, en el estrechon: pues si en lugar de los 100, solo tubiera 50 de largo, fuera $p = \frac{65.50}{1000 + 50} = \frac{65}{21} = 3\frac{2}{21}$ quintales: con los quales ya romperia la cuerda, cayendo el peso de los mismos 100 pies de alto.

PROPOSICION 43.

Hallar el tiempo en que se executa el choque.

Siendo (*Prop.* 29.) $dt = \frac{dx + dz}{u - v}$, y (*Propos.* 34.)

$$u - v = \pm\left((U - V)^2 + \frac{(\alpha B - \beta A)(x + z)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A + B)D\int H dx}{\frac{1}{2}AB}\right)^{\frac{1}{2}},$$

substituyendo este valor en la equacion antecedente, será $dt =$

$$\frac{dx + dz}{\pm\left((U - V)^2 + \frac{(\alpha B - \beta A)(x + z)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A + B)D\int H dx}{\frac{1}{2}AB}\right)^{\frac{1}{2}}}$$: ó multi-

plicando numerador y denominador por $\left(\frac{\frac{1}{2}AB}{(A+B)D}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$dt = \frac{\left(\frac{AB}{2D(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}(dx+dz)}{\pm\left(\frac{AB(U-V)^2}{2D(A+B)}+\frac{(\alpha B-\beta A)(x+z)}{D(A+B)}-\int Hdx\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Corolario 1.

En el caso de ser con corta diferencia $z=0$, y $dz=0$,

será $$dt = \frac{\left(\frac{AB}{2D(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}dx}{\pm\left(\frac{AB(U-V)^2}{2D(A+B)}+\frac{(\alpha B-\beta A)x}{D(A+B)}-\int Hdx\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Corolario 2.

En el de $z=x$, y de $dz=dx$, $dt = $ ---

$$\frac{\left(\frac{2AB}{D(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}dx}{\pm\left(\frac{AB(U-V)^2}{2D(A+B)}+\frac{2(\alpha B-\beta A)x}{D(A+B)}-\int Hdx\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Corolario 3.

Para deducir de este segundo caso el primero, no será, pues, necesario sino partir la expresion, en que se hallare αB βA, por dos; y despues el todo del tiempo asimismo por dos.

Escolio.

No queda que hacer sino integrar para hallar el valor de t. Esta operacion depende del que se le dé á

H,

H, y este de la figura, disposicion, y dureza recíproca de los dos cuerpos chocados. Por lo mismo podemos suponer $\int \mathrm{H}dx$ igual á qualquiera funcion de x con constantes, pues si el caso no se adequare á todos los cuerpos, como no puede adequarse, siempre tendrá alguno ó algunos á que corresponda.

PROPOSICION 44.

Hallar el valor del tiempo en que se executa el choque quando fuere $\int \mathrm{H}dx = \mathrm{Q}x^2$, $z = x$, y $dz = dx$: suponiendo Q una constante.

La equacion (*Prop.* 43.) se reduce en este caso á

$$dt = \frac{\left(\frac{2\mathrm{AB}}{\mathrm{D(A+B)}}\right)^{\frac{1}{2}}dx}{\pm\left(\frac{\mathrm{AB(U-V)}^2}{2\mathrm{D(A+B)}} - \frac{2(\alpha\mathrm{B}-\beta\mathrm{A})x}{\mathrm{D(A+B)}} - \mathrm{Q}x^2\right)^{\frac{1}{2}}} :$$

ó partiendo numerador y denominador por $\mathrm{Q}^{\frac{1}{2}}$, á $dt =$

$$\frac{\left(\frac{2\mathrm{AB}}{\mathrm{QD(A+B)}}\right)^{\frac{1}{2}}dx}{\pm\left(\frac{\mathrm{AB(U-V)}^2}{2\mathrm{QD(A+B)}} + \frac{2(\alpha\mathrm{B}-\beta\mathrm{A})x}{\mathrm{QD(A+B)}} - x^2\right)^{\frac{1}{2}}} :$$

Substitúyase

$$\mathrm{R}^2 = \frac{\mathrm{AB(U-V)}^2}{2\mathrm{QD(A+B)}} + \frac{(\alpha\mathrm{B}-\beta\mathrm{A})^2}{\mathrm{Q}^2\mathrm{D}^2\mathrm{(A+B)}^2};$$

y quedará $dt =$

$$\frac{\left(\frac{2\mathrm{AB}}{\mathrm{R}^2\mathrm{QD(A+B)}}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{R}dx}{\pm\left(\mathrm{R}^2 - \left(\frac{x - (\alpha\mathrm{B}-\beta\mathrm{A})}{\mathrm{QD(A+B)}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} :$$

é integrando $t =$

$$\left(\frac{2\mathrm{AB}}{\mathrm{DQ(A+B)}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(Ar.sen.\frac{\alpha\mathrm{B}-\beta\mathrm{A}}{\mathrm{RDQ(A+B)}} + Ar.sen.\left(\frac{x}{\mathrm{R}} - \frac{\alpha\mathrm{B}-\mathrm{B}\beta}{\mathrm{RDQ(A+B)}}\right)\right),$$

por el tiempo en que se forma, ó aumenta la impresion: y $t =$

$$\left(\frac{2\mathrm{AB}}{\mathrm{DQ(A+B)}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathrm{C} + Ar.se.\frac{\alpha\mathrm{B}-\beta\mathrm{A}}{\mathrm{RDQ(A+B)}} - Ar.se.\left(\frac{x}{\mathrm{R}} - \frac{\alpha\mathrm{B}-\beta\mathrm{A}}{\mathrm{RDQ(A+B)}}\right)\right)$$

por el tiempo en que ya disminuye la impresion, contado asimismo desde el principio del choque, y denotando C la semicircunferencia de un círculo, cuyo radio es la unidad.

Corolario 1.

Estos dos tiempos deben ser iguales al concluirse la máxima impresion, puesto que á ambos corresponde este caso: luego al suceder la máxima impresion, será

$$\textit{Arco seno}\left(\frac{x}{R}-\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right) = $$

$$C - \textit{Arco seno}\left(\frac{x}{R}-\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right); \text{ ó}$$

$$\textit{Arco seno}\left(\frac{x}{R}-\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right) = \tfrac{1}{2}C.$$

Substituyendo este valor en qualquiera de los dos que expresan el tiempo, se tendrá, por todo el que emplean los cuerpos en formar la máxima impresion,

$$t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}C + \textit{Arco seno}\,\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right).$$

Corolario 2.

En los cuerpos perfectamente elásticos la impresion disminuye hasta ser $x = 0$: luego substituyendo este valor de x en la segunda equacion del tiempo, se tendrá aquel en que se hace todo el choque en los cuerpos perfectamente elásticos

$$t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(C + 2\,\textit{Arco.seno}\,\frac{\alpha B-\beta B}{RDQ(A+B)}\right).$$

Corolario 3.

El tiempo que emplean los cuerpos perfectamente elás-

elásticos en todo el choque es, pues, duplo del que emplean en hacer la máxima impresion; ó el tiempo que emplean desde el principio del choque hasta llegar á la máxima impresion, es igual al que emplean desde que sucede esta máxima impresion hasta concluirse el choque.

Corolario 4.

Como los cuerpos de muy poca ó ninguna elasticidad sensible, concluyen su choque al suceder la máxima impresion, será el tiempo que estos cuerpos emplean en hacer su choque $t = $ ------ $\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}C + Arc.seno\ \frac{\alpha B - \beta A}{RDQ(A+B)}\right)$.

Corolario 5.

Si fueren $\alpha = 0$, y $\beta = 0$, quedará el tiempo en que sucede la máxima impresion, ó en que concluyen su choque los cuerpos de ninguna elasticidad sensible $t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \tfrac{1}{2}C$; y aquel en que lo concluyen los cuerpos de perfecta, ó sensiblemente perfecta elasticidad $t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot C$.

Corolario 6.

En estas expresiones del tiempo, queda ya excluída la R, que es la única cantidad que contiene las velocidades primitivas U y V: luego en los cuerpos que se chocan sin ser animados por potencias, el tiempo que emplean en sus choques, no depende en ninguna manera de las velocidades con que se chocan; y será siempre el mismo, sean estas de la magnitud que se quisieren.

Co-

Corolario 7.

Si la impresion se formare por sola la presion ó accion de las potencias α y β, siendo las velocidades $U = o$ y $V = o$, como sucede en los cuerpos graves quando se pone alguno de ellos sobre otro, será $R = \frac{\alpha B - \beta A}{DQ(A+B)}$: cuyo valor substituido en la expresion del tiempo

$$t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}C + Arc.\,seno\ \frac{\alpha B - \beta A}{RDQ(A+B)}\right),$$

$$t = \left(\frac{2AB}{DQ\,A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(C + 2\,Arc.\,sen.\ \frac{\alpha B - \beta A}{RDQ(+B)}\right),$$

quedará aquel en que sucede la máxîma impresion; y su duplo que emplean los cuerpos de casi una perfecta elasticidad en executar todo el choque, quando fueren

$$U = o, \text{ y } V = o, \ t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}.\,C, \text{ y}$$

$$t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}.\,2C.$$

Corolario 8.

Los tiempos que emplean los cuerpos en sus choques, quando solo actuen las potencias, sin concurrir ningunas velocidades primitivas, es pues duplo del que emplean los mismos cuerpos quando, sin actuar ningunas potencias, son las velocidades las que causan el choque.

Corolario 9.

Como en las expresiones del tiempo, en caso de actuar solo las potencias, quedan estas excluidas, el tiempo será el mismo, sean estas de la magnitud que se quisieren.

Corolario 10.

Si suponemos la profundidad de la máxîma impresion $=X$, será $QX^2=1$, que dá $Q=\frac{1}{X^2}$; y (*Propos.*40.) $D=\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)2X}{(A+B)1}$, de que resulta $DQ(A+B)=\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta B)2X}{X^2}$.

Pongamos $R^2=\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2}{DQ(A+B)}+\frac{(\alpha B-\beta A)^2}{D^2Q^2(A+B)^2}$: que dá $R^2D^2Q^2(A+B)^2=\frac{1}{2}ABDQ(A+B)(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)^2$
$=\frac{\frac{1}{4}A^2B^2(U-V)^4+AB(U-V)^2(\alpha B-\beta A)X+(\alpha B-\beta A)^2X^2}{X^2}$:

y será $RDQ(A+B)=\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)X}{X}$.

Substituyendo estos valores de $DQ(A+B)$, y de $RDQ(A+B)$ en los del tiempo $t=$ ---------
$\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}C+\textit{Arc. sen.}\frac{\alpha B-\beta B}{RDQ(A+B)}\right)$, y
$t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(C+2\textit{Arc.sen.}\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)$,
se reducirán estos á $t=$ ------------------
$\left(\frac{2ABX^2}{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+2(\alpha B-\beta A)X}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}C+\textit{Ar.se.}\frac{(\alpha B-\beta A)X}{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)X}\right)$:
$t=\left(\frac{2ABX^2}{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+2(\alpha B-\beta A)X}\right)^{\frac{1}{2}}\left(C+2\textit{Ar.se.}\frac{(\alpha B-\beta A)X}{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)X}\right)$.

Corolario 11.

Si fueren $\alpha=0$ y $\beta=0$, quedará el tiempo en que se executa la máxîma impresion $t=\left(\frac{4X^2}{(U-V)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}C=\frac{CX}{U-V}$. $=\frac{2CX}{U-V}$

Es-

Escolio.

Que sea, v.g., la velocidad respectiva U—V, con que se chocan dos espheras ó bolas de un pie por segundo: y respecto de ser $C = 3{,}14$, quedará $t = 3{,}14.X$; con que si la profundidad de la impresion que en ellas se hiciere fuere de $3{,}14$ de pie, ú de poco menos de media línea, será $t = \frac{1}{100}$ de segundo $= 36''''$: tiempo verdaderamente muy corto para que pueda jamas percibirse. Si la dureza de los dos cuerpos fuere mayor, menor será la profundidad de la impresion, y por consiguiente mas corto el tiempo: de suerte, que si la dureza fuere casi infinita, casi infinitamente corto sería el tiempo.

Corolario 12.

Si los cuerpos actuaren solamente por la presion ó potencias, serán $U = 0$ y $V = 0$, ó $U - V = 0$; lo que reduce el tiempo en que se hace la máxima impresion á $t = \left(\frac{ABX}{\alpha B - \beta A}\right)^{\frac{1}{2}} C$. Si á mas de ello fuere $B = \infty$, será $t = \left(\frac{AX}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} C$: ó en los cuerpos graves en que es (*Cor.* 1. *Pri.* 3.) $A = \frac{1}{32}\alpha$, $t = \left(\frac{1}{32}X\right)^{\frac{1}{2}} C$. Si un cuerpo puesto sobre otro hiciere, pues, la profundidad de la impresion de $\frac{1}{19{,}7192}$, ó poco mas de $\frac{1}{20}$ de línea $= \frac{1}{144.20.3{,}14}$ de pie, será el tiempo en que executará su máxima impresion $= \left(\frac{1}{32.20.144.3{,}14}\right)^{\frac{1}{2}} 3{,}14 = \left(\frac{1}{812}\right)$ de segundo, $= 37\frac{1}{2}''''$.

Co-

Corolario 13.

Si fuere $B = \infty$, y $V = 0$, quedará el tiempo en que se haga la máxima impresion -------
$t = \left(\frac{2AX^2}{\frac{1}{2}AU^2 + 2\alpha X}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}C + Arc.sen. \frac{\alpha X}{\frac{1}{2}AU^2 + \alpha X}\right)$: ó en los cuerpos graves en que es $A = \frac{1}{32}\alpha$, y $\frac{1}{2}AU^2 = \alpha e$, expresando e la altura de donde cayere el cuerpo, $t = \left(\frac{X^2}{16(e+2X)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}C + Arc.sen. \frac{X}{e+X}\right)$.

Corolario 14.

Si fuere X despreciable, respecto de e, quedará $t = \frac{CX}{8\sqrt{e}}$. Si un cuerpo de hierro, cayendo sobre un yunque, hiciere, pues, la profundidad de la impresion de $\frac{1}{314}$ de pie, ú de poco menos de media línea, será el tiempo en que la haga $t = \frac{1}{800\sqrt{e}}$: de suerte, que si fuere su caida de 36 pies, quedará $t = \frac{1}{4800} = 45''''$.

Corolario 15.

De la misma manera se pueden hallar los tiempos en que se executan las máximas impresiones, en el supuesto de ser $z = 0$, $dz = 0$, ó que un cuerpo sea como infinitamente duro, respecto del otro, pues por lo dicho (*Cor.* 3. *Prop.* 43.) la expresion del tiempo en que se hace la máxima impresion, dada (*Cor.* 10. *Propos.* 44.) se reduce para este caso á $t = $ ----
$\left(\frac{ABX^2}{AB(U-V)^2 + (\alpha B - \beta A)X}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}C + Ar.se. \frac{(\alpha B - \beta A)X}{AB(U-V)^2 + (\alpha B - \beta A)X}\right)$;

y del mismo modo para otro qualquiera caso, integrando la expresion general dada (*Prop.* 43.).

PROPOSICION 45.

Hallar el tiempo en que se executa el choque, en caso de ser la fuerza de percusion π constante.

Siendo (*Propos.* 31.) $(\alpha B - \beta A - \pi(A+B))dt = (du - dv)$: integrando esta equacion, y partiendo por $\alpha B - \beta A - \pi(A+B)$ resultará $t = \frac{AB((u-v)-(U-V))}{\alpha B - \beta B - \pi(A+B)}$.

Corolario 1.

En el caso de la máxima impresion será $t = \frac{-AB(U-V)}{\alpha B - \beta A - \pi(A+B)} = \frac{AB(U-V)}{\pi(A+B)-(\alpha B - \beta A)}$.

Corolario 2.

Si fuere $V = 0$ y $B = \infty$, quedará $t = \frac{A(u-U)}{\alpha - \pi}$ y en el caso de la máxima impresion $t = \frac{AU}{\pi - \alpha}$.

PROPOSICION 46.

Hallar el centro de percusion.

Supóngase el cuerpo dividido en infinito número de pequeños cuerpos; ó supóngase un systhema compuesto de infinito número A, B, C, &c de cuerpos pequeños ligados entre sí; y que gire sobre un exe qualquiera dado y fixo E, con una velocidad angular determinada. Pongamos que en cada uno de los pequeños cuerpos A, B, C, &c, haya una potencia $\alpha, \beta, \gamma,$ &c

Fig. 26.

que

que les retarde su movimiento, y que todas actuen paralelamente segun DA, FB, GC, &: que sea P la distancia desde el exe al plano paralelo al directorio, que pase por el centro de gravedad: u la velocidad que perdiere este centro: $A, B, C,$& las distancias EA, EB, EC, &, desde qualquiera cuerpo como A, B, C,& al exe: y δ, ϵ, ξ, & los ángulos EAD, EBF, ECG que aquellas forman con las direcciones en que actuan las potencias. Con esto tendremos $P : u = A : \frac{Au}{P}$, velocidad que perderá el cuerpo A segun la perpendicular á EA: y por igual razon $\frac{Bu}{P}$, $\frac{Cu}{P}$, &, las que perderán los otros cuerpos segun las perpendiculares EB, EC, &: y $\frac{Au}{P sen.\delta}$, $\frac{Bu}{P sen.\epsilon}$, $\frac{Cu}{P sen.\xi}$, &, las que deben imprimir las potencias para que resulten las primeras. Tendremos pues (*Cor.* 2. *Prop.* 4.) $\alpha t = \frac{AAu}{P sen.\delta}$, $\beta t = \frac{BBu}{P sen.\epsilon}$, $\gamma t = \frac{CCu}{P sen.\xi}$, &; de que se deduce - - - - $\alpha = \frac{AAu}{Pt sen.\delta}$, $\beta = \frac{BBu}{Pt sen.\epsilon}$, $\gamma = \frac{CCu}{Pt sen.\xi}$, &. Supongamos ahora que la distancia desde el plano paralelo al directorio, en que se halla el centro de percusion, al exe sea x: y serán $x - A sen.\delta$, $x - B sen.\epsilon$, $x - C sen.\xi$, & las distancias desde cada una de las potencias al mismo plano: y por consiguiente, los momentos de estas, respecto al centro de percusion, serán $\frac{AAu(x - A sen.\delta)}{Pt sen.\delta}$, $\frac{BBu(x - B sen.\epsilon)}{Pt sen.\epsilon}$, $\frac{CCu(x - C sen.\xi)}{Pt sen.\xi}$, &: y para que no resulte rotacion sobre el propio centro, habrá de ser (*Corolar.* 2. *Lema* 1.) la suma de estos momentos igual á cero; ó, partiendo por $\frac{u}{Pt}$

$\frac{u}{Pt} = \frac{\text{A}A(x - A\,sen.\delta)}{sen.\delta} + \frac{\text{B}B(x - B\,sen.\varepsilon)}{sen.\varepsilon} + \frac{\text{C}C(x - C\,sen.\xi)}{sen.\xi}$ $+ \& = 0$; esto es, $\frac{\text{A}Ax}{sen.\delta} + \frac{\text{B}Bx}{sen.\varepsilon} + \frac{\text{C}Cx}{sen.\xi} + \& =$ $\text{A}A^2 + \text{B}B^2 + \text{C}C^2 + \&$: que dá $x =$ $\frac{\text{A}A^2 + \text{B}B^2 + \text{C}C^2 + \&}{\frac{\text{A}A}{sen.\delta} + \frac{\text{B}B}{sen.\varepsilon} + \frac{\text{C}C}{sen.\xi} + \&}$, distancia desde el centro de percusion al plano directorio coincidente con el exe.

Corolario 1.

El denominador $\frac{\text{A}A}{sen.\delta} + \frac{\text{B}B}{sen.\varepsilon} + \frac{\text{C}C}{sen.\xi} + \&$ es como la suma de las potencias $\alpha = \frac{\text{A}Au}{Pt\,sen.\delta}$, $\beta = \frac{\text{B}Bu}{Pt\,sen.\xi}$, &: y el numerador la suma de sus momentos : luego será x la distancia desde el exe al centro de dichas potencias : y por consiguiente (*Cor.16. Lem.1.*) una igual á la suma de todas , colocada en el centro de percusion , hará el mismo efecto : de suerte, que si en dicho punto hubiera un óbice, se haría sobre él la percusion, con el equilibrio pedido. esto es, sin que tuviese el sistema tendencia alguna para girar al rededor de esta puente, después de executada la percusion

su momento de la potencia α es α A sen δ y el de la potencia β es β B sen ε &c. hará el mismo efecto, significa producirá el mismo angulo giratorio.

Corolario 2.

Si el cuerpo que girare fuere un plano coincidente con el exe , será $sen.\delta = sen.\varepsilon = sen.\xi = \&$; y quedará $x = \frac{sen.\delta(\text{A}A^2 + \text{B}B^2 + \text{C}C^2 + \&)}{\text{A}A + \text{B}B + \text{C}C + \&}$; ó $\frac{x}{sen.\delta} =$ $\frac{\text{A}A^2 + \text{B}B^2 + \text{C}C^2 + \&}{\text{A}A + \text{B}B + \text{C}C + \&} =$ (*Cor.19. Lem. 1.*) $\frac{S}{PM}$, expresando P la distancia desde el exe al centro de las masas: luego en este caso (*Cor.3. Defin.30.*) el centro

de

de percusion y el de oscilacion distan igualmente del exe.

Corolario 3.

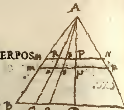
Si el exe se considera á una infinita distancia, que es lo mismo que suponer que no gire el cuerpo, como sucede con los que caen por sola la accion de su gravedad, concurrirán en tal caso los dos centros, y serán ambos el mismo de gravedad; pues son iguales todos los ángulos δ, ε, ξ, &c, y se reduce el caso al dado (*Cor.* 2.).

Corolario 4.

En todo otro caso en que no fueren iguales los ángulos δ, ε, ξ, & no es $PM = \frac{AA}{sen.\delta} + \frac{BB}{sen.\varepsilon} + \frac{CC}{sen.\xi}$: luego no distarán igualmente del exe los centros de oscilacion y percusion.

Corolario 5.

Si en lugar de chocar el cuerpo al óbice en su centro de percusion, le chocare en un punto mas próximo del exe: como si la palanca EB, en lugar de chocar al óbice en F, donde se supone esté el centro de percusion, le chocare en A, el óbice solo sufrirá la percusion resultante de los momentos de inercia de EA, y otro tanto de la parte AB: el exceso de los de está los han de padecer las fibras de la palanca, en la misma conformidad que explicamos (*Esc.*1. *Def.*33.); con sola la diferencia que allí fue la accion de una sola presion; y aquí la de una percusion, que segun las circunstancias puede ser excesivamente mayor, como ya se ha visto. Fig.27.



Escolio.

Hasta ahora se ha enseñado generalmente por los Autores (*a*) que han tratado el asunto, que los dos centros de oscilacion y percusion son siempre el mismo; exceptuando *Juan Bernoulli* que dió alguna idea de poder ser incierto. Para quedar convencidos en este particular no hay sino considerar que el centro de oscilacion de un triángulo isósceles, que gira lateralmente sobre su vértice, dista de este la cantidad de $\frac{3}{4}a + \frac{b^2}{4a}$, suponiendo a la altura del triángulo, y b su base; quando el centro de percusion solo dista $\frac{3}{4}a$: de suerte que, si b es mayor que a, el centro de oscilacion cae fuera del triángulo, y es imposible que sea el de percusion, pues no puede tocarle el óbice fuera de él mismo. Si reducimos el triángulo á menos altura, respecto de su base, al paso que aquella sea menor, dista mas y mas del exe el centro de oscilacion; y al contrario el de percusion: de suerte, que si la altura es infinitamente pequeña, el centro de oscilacion distará infinitamente del exe: quando el de percusion estará siempre á $\frac{3}{4}a$, y por consiguiente en igual disposicion para equilibrar el choque.

CA-

(*a*) *Christiani Wolfii elementa matheseos.* Tom. 1. *de elementa Mechanicæ.* Cap. XII. Theo. LXXXI.
Analyse des infiniment petits. Par Mr. Stone. Section VII.
Elementos Mathemáticos de Philosophia natural por Gravesande. Tom. 1. Lib. 2. Cap. 5. N. 1080.
Johannis Bernoulli Opera Omnia. Tom. 4. *Remarques sur l'Analyse des infiniments petits.*

Para probar un escolio sea el triangulo isosceles ABC, y en el un elemento RSsr; la formula de la distancia del centro de oscilacion al vertice es $\frac{\int RSsr.AR^2}{\int RSsr.AR}$; hago pues AD = a, BC = b, AP = r, Pp = dr, DQ = u, Qq = du; resulta $PR = \frac{ur}{a}$; $AQ = \sqrt{a^2+u^2}$, $AR = \frac{r}{a}\sqrt{a^2+u^2}$. Prop. 27, nota al margen. $RS = \frac{r\,du}{a}$, y $RSsr = \frac{r\,dr\,du}{a}$; de donde la distancia buscada es $\frac{\int r\,dr\,du.\,r^2(a^2+u^2)/a^3}{\int RSsr.AR} = \frac{\frac{r^4u}{4a} + \frac{r^4u^3}{12a^3}}{\frac{1}{2}a^2b} = \frac{3a^2+b^2}{4a}$.
Ahora la formula de la distancia del centro de percusion al vertice es $\frac{S}{\int RSsr.\frac{AR}{\text{sen}\,S}}$; siendo S el angulo PRA, que con el radio vector AR forma la direccion de la potencia que obra sobre el elemento RSsr para oponerse a su movimiento; lo que da sen S = $\frac{AP}{AR}$, y muda la formula en esta otra $\frac{S}{\int RSsr.\frac{AR}{AP}} = \frac{\frac{a^4(3a^2b+b^3)}{12}}{\frac{3a^2b+b^3}{9}} = \frac{3}{4}a$

CAPITULO 7.

Del movimiento de los cuerpos que insisten sobre superficies.

PRescindiremos en este Capítulo de las impresiones que deben formarse en los cuerpos que se comprimen por qualesquiera potencias, á fin que resulten, por ahora, mas fáciles los cálculos. Supondremos, para lo propio, que los cuerpos sean igualmente densos, y que las potencias estén aplicadas á los centros de gravedad.

PROPOSICION 47.

Hallar los espacios que corren dos espheras impelidas por una potencia.

Si dos espheras A y B se tocan en D, y la una A Fig.28. está impelida en la direccion AC por la potencia α aplicada en su centro de gravedad A, no girará esta esphera (*Cor.2. Lem.1.*): y la potencia se puede descomponer en dos, una que actue segun la tangente DE, y otra segun la perpendicular AD que pasa por los centros de las dos espheras A y B. Llamando Σ al ángulo DAE, será la potencia segun DE $= \alpha sen. \Sigma$, y la que actue segun AD $= \alpha Cos. \Sigma$. Con esta potencia que pasa por los centros A y B, tiene pues que moverse precisamente la esphera A en la direccion AD, y no puede executarlo sin impeler la otra B en la misma direccion, que pasando por el centro B no causará rotacion en esta esphera, y solo habrá de moverla en la propia direccion: de suerte, que ambas espheras tienen que seguir precisamente la direccion AB, en

virtud de la potencia $aCof.\Sigma$, sin poderse desviar á parte alguna, y correr ambas el espacio diferencial $\frac{dtfdtaCof.\Sigma}{A+B}$. La otra potencia $afen.\Sigma$ no tiene que impeler sino la esphera A, respecto de ser su direccion segun la tangente DE; en la qual no puede impeler la esphera B: por lo que el espacio diferencial que correrá su centro de gravedad en la misma direccion, será $=\frac{dtfadtfen.\Sigma}{A}$.

Corolario 1.

Si la esphera B es de infinita magnitud, su superficie en el punto del contacto coincide con el plano tangente DE: y el espacio que correrán los centros de gravedad de las dos espheras, segun la perpendicular AD, será como antes $\frac{dtfdtaCof.\Sigma}{A+B}$: y el que correrá la A, segun la tangente ó plano DE, será $=\frac{dtfadtfen.\Sigma}{A}$.

Fig. 29.

Corolario 2.

Si la esphera B se supone no solo de infinita magnitud, sino de infinita cantidad de materia ó masa, el movimiento de su centro de gravedad será $\frac{dtfdtaCof.\Sigma}{A+\infty}=0$: por lo que en este caso su superficie ó plano tangente DE quedará inmovil, y lo mismo la esphera A por lo que toca á la direccion AD: solo le quedará á esta el movimiento segun la tangente $=\frac{dtfadtfen.\Sigma}{A}$.

Corolario 3.

Que la esphera A insista sobre una superficie inmovil qualquiera, plana ó curva BC, impelida por la potencia α, aplicada en su centro de gravedad, y segun la direccion EA: tirada la tangente ó plano tangente FG en el punto del contacto C, este plano puede suponerse la superficie de una esphera infinita en magnitud y en masa, sobre que insiste la otra A, con que no tendrá esta sino el movimiento segun la tangente CG, en virtud de la potencia $\alpha\,sen.\Sigma$, expresando Σ el ángulo AEH que forma la direccion EA con la perpendicular EH á la tangente. Fig. 30.

Corolario 4.

Lo mismo se demonstrará de qualquiera otro punto de la superficie curva en que se halle la esphera: con que tomando el punto B de la curva por origen, las abcisas x en la BL paralela á la direccion EA, y llamando a la longitud de la curva BC, será $CM = dx$, $CN = da$, y el seno de $AEH = CNM = sen.\Sigma = \frac{dx}{da}$: por lo que la potencia que animará la esphera A segun la tangente en todos los puntos de la superficie en que se hallare, ó segun los espacios diferenciales en que estubiere, será $= \frac{\alpha dx}{da}$.

Corolario 5.

Que sea u la velocidad que adquiere la esphera en qualquiera de dichos puntos, y tendremos (*Corol. Ax.* 2.) $\frac{\alpha dxdt}{Ada} = du$; pero (*Cor.*4.*Pro.*3.) es $u = \frac{da}{dt}$:

luego multiplicando estas dos equaciones, será --- $\frac{\alpha dx}{A} = udu$, y $u^2 - U^2 = \frac{2\int\alpha dx}{A}$: ó $u^2 = \frac{2\int\alpha dx}{A} + U^2$, denotando U la velocidad que tubo la esphera en el origen B.

Corolario 6.

Si fuere α constante, como lo es la gravedad en las inmediaciones á la superficie de la tierra, será $u^2 = \frac{2\alpha x}{A} + U^2$: ó substituyendo (*Cor.* 1. *Prin.* 3.) $\alpha = 32A$, $u^2 = 64x + U^2$: esto es, la velocidad con que cayeren los cuerpos graves por las superficies, no dependerá en ninguna manera de la curva, de su mayor ó menor curvidad, ni de su mayor ó menor inclinacion con el horizonte, sino de sola la altura x de donde cayeren, y de la velocidad primitiva U con que empezaren su caida.

Corolario 7.

Si esta velocidad primitiva U fuere cero, ó si empezare á caer la esphera desde el reposo, quedará $u^2 = 64x$; ú $u = 8\sqrt{x}$, como se vió (*Cor.* 1. *Prin.* 3.)

Corolario 8.

Fig. 31. Si siendo el origen B, la esphera ó cuerpo grave hubiere de descender por las varias superficies planas ó curvas BL, BC, BD, BE con la misma velocidad primitiva, la que tendrá al llegar á la horizontal LE será siempre la misma é $= \sqrt{64x + U^2}$: ó si fuere $U = 0$, $= 8\sqrt{x} = 8\sqrt{BL}$.

Co-

Corolario 9.

Si la esphera insistiere sobre el plano DE, siendo el ángulo DBE recto, será $\frac{dx}{da} = \frac{DB}{DE}$: y la equacion $\frac{\alpha dxdt}{Ada} = du$ se reducirá á $\frac{\alpha dt.DB}{A.DE} = du$; y en los cuerpos graves á $\frac{32t.DB}{DE} = u - U$: de suerte, que las diferencias de las velocidades que adquirirá la esphera en su caida por el plano DE, siendo BE la horizontal, serán en razon directa del tiempo, y de la cantidad $\frac{DB}{DE}$, ó seno del ángulo DEB que forma el plano con la horizontal. Fig. 32.

Corolario 10.

Si en la equacion $u = \frac{da}{dt}$, ó $udt = da$ substituímos el valor de u hallado (*Cor.* 5.) $u = \left(\frac{2\int \alpha dx}{A} + U^2\right)^{\frac{1}{2}}$ será $da = dt\left(\frac{2\int \alpha dx}{A} + U^2\right)^{\frac{1}{2}}$: ó si fuere $U = 0$, $da = dt\left(\frac{2\int \alpha dx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$. Será, pues, en los cuerpos graves que caen desde el reposo, $da = 8dt\sqrt{x}$: y si cayeren por el plano DE, respecto de ser $\frac{DB}{DE} = \frac{x}{a}$, ó $x = \frac{a.DB}{DE}$, será $\frac{da}{\sqrt{a}} = 8dt\left(\frac{DB}{DE}\right)^{\frac{1}{2}}$: é integrando $2\sqrt{a} = 8t\left(\frac{DB}{DE}\right)^{\frac{1}{2}}$: que da $a = \frac{16t^2 DB}{DE}$; esto es, los espacios corridos por un cuerpo grave que desciende desde el re-

reposo sobre un plano, son en razon compuesta de los quadrados de los tiempos, y de la cantidad $\frac{DB}{DE}$ ó seno del ángulo DEB que forma el plano con la horizontal.

Corolario 11.

De la equacion antecedente $da = dt \left(\frac{2\int \alpha dx}{A} + U^2\right)^{\frac{1}{2}}$ se deduce tambien $dt = \frac{da}{\left(\frac{2\int \alpha dx}{A} + U^2\right)^{\frac{1}{2}}}$: ó si fuere $U = 0$, $dt = \frac{da}{\left(\frac{2\int \cdot dx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}}$: que en el caso de los cuerpos graves se reduce á $dt = \frac{da}{8\sqrt{x}}$; ó si fuere por el plano DE que la esphera cayere $dt = \frac{da}{8\sqrt{\frac{a.DB}{DE}}}$: é integrando $t = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{a.DE}{DB}}$.

Corolario 12.

Si la esphera ó cuerpo cayere libre ó verticalmente, será $a = x$, y $dt = \frac{dx}{8\sqrt{x}}$: ó integrando $t = \frac{1}{4}\sqrt{x}$.

PROPOSICION 48.

Hallar el tiempo en que caen los cuerpos graves por la cyclóide.

Fig. 33. Sea por la cyclóide DABE, que la esphera ó cuerpo grave caiga, siendo FHIE el círculo generatriz de ella, y FE = D el diámetro de este. Sea A el punto de donde empiece á caer el cuerpo desde el reposo:

FG

$FG=b$, y $GC=x$. Por la propiedad de la cyclóide es su arco $BE=2IE$: esto es, igual á dos veces la cuerda IE de su círculo generatriz; pero por la del círculo es $IE=\sqrt{D.(D-b-x)}$: luego el arco $BE=2\sqrt{D.(D-b-x)}$: y su diferencial $da=-\frac{-dx\sqrt{D}}{\sqrt{D-b-x}}$: que da la del arco $BA=da=\frac{dx\sqrt{D}}{\sqrt{D-b-x}}$.

Será, pues, (*Cor.*11. *Prop.*47.) en la cyclóide, quando el cuerpo grave empieza á caer desde el reposo, $dt=\frac{dx\sqrt{D}}{8\sqrt{Dx-bx-x^2}}$: ó multiplicando numerador y denominador por $\frac{1}{2}(D-b)$, $dt=\frac{\sqrt{D}}{4(D-b)}.\frac{\frac{1}{2}(D-b)dx}{\sqrt{Dx-bx-x^2}}$ y $t=\frac{\sqrt{D}}{4(D-b}\int\frac{\frac{1}{2}(D-b)dx}{\sqrt{Dx-bx-x^2}}$; pero $\int\frac{\frac{1}{2}(D-b)dx}{\sqrt{Dx-bx-x^2}}$ es el arco de círculo, cuyo diámetro es $D-b=GE$: luego si con el diámetro GE se describe el círculo GKE, será el arco $GK=\int\frac{\frac{1}{2}(D-b)dx}{\sqrt{Dx-bx-x^2}}$: y en la cyclóide $t=\frac{\sqrt{D}.(Arc.GK)}{4(D-b)}$.

Corolario 1.

Si el cuerpo cayere por todo el arco ABE, degenerará el arco GK en todo el semicírculo GKE, y $\frac{GKE}{D-b}=\frac{GKE}{GE}$, será la razon de la semicircunferencia al diámetro, ó llamando C la circunferencia del círculo, cuyo radio es la unidad, será $\frac{GKE}{D-b}=\frac{\frac{1}{2}C}{2}=\frac{1}{4}C$: y el

el tiempo t en que caerá el cuerpo por todo el arco ABE de la cyclóide $= \frac{C}{16}\sqrt{D}$.

Corolario 2.

Como en esta expresion no se halla el valor de b, que determina el punto A, se sigue que desde qualquiera punto de la cyclóide que empiece á caer el cuerpo, siempre empleará el mismo tiempo $t = \frac{C\sqrt{D}}{16}$ en llegar á E.

Corolario 3.

Si en el mismo tiempo cayeren dos cuerpos, uno por la cyclóide, y otro libre ó verticalmente, tendremos (*Cor.* 12. *Prop.* 47.) $\frac{C\sqrt{D}}{16} = \frac{1}{4}\sqrt{x}$, ó $\frac{C\sqrt{D}}{4} = \sqrt{x}$, que dá $x = \frac{C^2D}{16}$: esto es, el espacio que descenderá un cuerpo grave cayendo libre ó verticalmente en el mismo tiempo que cayera por el arco de una cyclóide, cuyo diámetro del círculo generatriz sea D, será $x = \frac{C^2D}{16}$.

Corolario 4.

Si las oscilaciones de un péndulo son pequeñas, degeneran los arcos descritos por el cuerpo en arcos de cyclóide: por lo que las medias oscilaciones de un péndulo se executan en el mismo tiempo en que cayera el cuerpo por el arco de la cyclóide: esto es, en el tiempo $\frac{C\sqrt{D}}{16}$: y las oscilaciones enteras en el tiempo $\frac{C\sqrt{D}}{8}$.

Co-

Corolario 5.

Si un cuerpo cayere libre ó verticalmente en el mismo tiempo que describe el péndulo una oscilacion, tendremos $\frac{C\sqrt{D}}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{x}$; ó $\frac{C\sqrt{D}}{2} = \sqrt{x}$, que dá $x = \frac{C^2D}{4}$: esto es, el espacio que descenderá un cuerpo grave libre ó verticalmente en el mismo tiempo que hiciera una oscilacion entera un péndulo, cuyos arcos descritos degeneran en cyclóide, que tiene por diámetro del círculo generatriz la cantidad D, es $= \frac{C^2D}{4}$.

Corolario 6.

Sea la longitud del péndulo l, ó el diámetro del círculo que describe $= 2l$, y $\sqrt{2lx}$ será qualquiera de sus cuerdas suponiendo la altura vertical CE que descienda el péndulo en su media oscilacion; pero esta cuerda es igual á la de la cyclóide, puesto que suponemos que degenera el círculo en ella: é igual á su arco correspondiente $BE = 2\sqrt{Dx}$ por ser infinitamente pequeños ambos: luego $2\sqrt{Dx} = \sqrt{2lx}$; que da $D = \frac{1}{2}l$; cuyo valor substituido en la equacion $x = \frac{C^2D}{4}$, (*Cor.* 5.) la reduce á $x = \frac{C^2l}{8}$: esto es, el espacio que descenderá un cuerpo libre ó verticalmente en el mismo tiempo que haga una pequeña oscilacion entera un péndulo de la longitud l, es $= \frac{C^2l}{8}$.

Corolario 7.

Si en la equacion $t = \frac{C}{16}\sqrt{D}$ (*Prop.* 48.) substitui-

tuimos $D = \frac{1}{2}l$, será $t = \frac{C}{16}\sqrt{\frac{1}{2}l}$, ó quadrando $t^2 = \frac{C^2 l}{16^2 . 2}$: esto es, las longitudes de los péndulos serán como los quadrados de los tiempos en que oscilan.

Escolio.

La razon de la circunferencia al diámetro, ú de $\frac{C}{2}$ es $= 3,1416$ &c: luego la de $\frac{C^2}{8}$ será $= 4,934825 28$: lo que da el espacio que descenderá el cuerpo libre ó verticalmente, en el mismo tiempo que haga una oscilacion entera el péndulo de la longitud l, $= x = l . 4,9348$ &c. La longitud del péndulo simple que vibra los segundos de tiempo al nivel del Mar varía segun las latitudes de los lugares. En el equador es, con corta diferencia, de 439 líneas del pie de Paris: y en el Polo es proxîmamente de 442. Si tomamos un medio 440, que es poco menos que la longitud del péndulo simple que vibra los segundos de tiempo á la orilla del Mar en España, tendremos, que los cuerpos caerán libre ó verticalmente en España en el tiempo de un segundo $\frac{440 . 49348}{10000}$ líneas del pie de Paris, ó 15 pies 00 pulgadas 11 $\frac{312}{1000}$ líneas: que hacen 16 pies y 1 pulgada del pie Ingles. En el equador, donde la longitud del péndulo simple es de 439 líneas, caerá el cuerpo en un segundo 16 pies 00 pulgadas 7 líneas: y en el Polo 16 pies 2 pulgadas y 11 líneas: donde se vé; que la diferencia en la caida de los cuerpos en las diversas latitudes es corta, pues es quando mas de una pulgada y 4 líneas: por cuyo motivo la establecimos (*Princ.* 3.) de 16 pies justos, cuyo nú-

número quadrado se hace cómodo para los cálculos que necesitamos.

PROPOSICION 49.

Hallar las potencias perpendicular y paralela á la tangente, que impelen á un cuerpo qualquiera que insiste sobre una superficie.

Siendo A el cuerpo qualquiera que insiste sobre la superficie BCG, y α la potencia que le impele segun la direccion AD, se puede descomponer esta en dos, una segun AC, que será $\frac{AC.\alpha}{AD}$, y otra segun la tangente FG, que será $\frac{CD.\alpha}{AD}$. La primera $\frac{AC.\alpha}{AD}$ se puede descomponer tambien en dos, una segun AH, que será $\frac{AH.\alpha}{AD}$, y otra segun la tangente FG, que será $\frac{HC.\alpha}{AD}$, no pudiendo impedir la accion de esta el plano FG, por serle tangente: y asi la suma $\frac{CD.\alpha}{AD} + \frac{HC.\alpha}{AD} = \frac{HD.\alpha}{AD}$ será la potencia que anima al cuerpo segun la tangente: ó llamando, como antes, Σ el ángulo que formare la direccion AD con la perpendicular AH á la tangente, será dicha potencia asimismo $= \alpha sen.\Sigma$. La otra potencia segun la perpendicular AH será $\frac{AH.\alpha}{AD} = \alpha Cos.\Sigma$. Fig. 54. 55.

Corolario 1.

Puesto que la potencia que anima al cuerpo por la tangente, es la misma que quando es esphérico, las propriedades en quanto á la velocidad, y espacio cor-

rido por qualquiera cuerpo sobre una superficie plana ó curva, serán las mismas que las que se hallaron para los cuerpos esphéricos.

Corolario 2.

En virtud de la potencia $\frac{AH.\alpha}{AD} = \alpha Cof.\Sigma$ el cuerpo debe girar, siendo el ángulo giratorio $= \frac{\pm dt\int CH.\alpha dt Cof.\Sigma}{S}$, porque la reaccion de la potencia $\alpha Cof.\Sigma$ en el punto C le es igual y contraria, y actua á la distancia perpendicular $p = \pm CH$: luego (*Cor.* 4. *Prop.* 18.) debe producir el ángulo giratorio $\frac{\pm dt\int CH.\alpha dt Cof.\Sigma}{S}$; mas en el caso de caer el punto H hacia el lado de D respecto de C, y menos si cae al lado opuesto: en el primer caso el cuerpo girará moviendose hacia D, y en el segundo al contrario.

Corolario 3.

Si fuere, pues, CH$=$o: esto es, si fuere el ángulo ACH recto, ó coincidiere la AH con la AC, el cuerpo no girará.

Corolario 4.

Fig. 36. Si el cuerpo A estubiere apoyado sobre la superficie en dos puntos C y F, la potencia $\alpha Cof.\Sigma$ se distribuye en estos dos puntos, siendo la parte que se emplea en C á la que se emplea en F, por la propriedad del centro de gravedad, como HF á HC: será, pues, la parte empleada en C$= \frac{\alpha FH Cof.\Sigma}{FC}$, y la em-

plea-

pleada en F $= \frac{\alpha CH\, Cof.\Sigma}{FC}$: con que el ángulo giratorio que producirán ambas, será ----------

$$dt\int\left(\frac{CH.\alpha.FH - FH\,\alpha\,CH}{SFC}\right)dt\,Cof.\Sigma = o.$$

Corolario 5.

Lo mismo se demonstrará aunque sean varios los puntos en que apoye el cuerpo, con tal que el punto H cayga entre los puntos de apoyo, para que unas rotaciones sean positivas, y otras negativas.

Corolario 6.

No obstante que la rotacion sea cero, siempre queda la potencia $\alpha fen.\Sigma$ que actua segun DE para hacer mover el cuerpo por el plano, lo que debe executar por pequeña que sea esta potencia ó ángulo Σ.

Escolio.

Estas son las leyes ó reglas generales que todos los Autores dan sobre el movimiento de los cuerpos por las superficies; pero, como hemos visto, están fundadas prescindiendo de las impresiones que sobre las mismas superficies debe hacer la potencia perpendicular $\alpha Cof.\Sigma$: atendiendo á estas, ya varía todo, como se explica en el siguiente Capítulo.

CAPITULO 8.

De la Friccion, y de lo que esta altera el movimiento de los cuerpos que insisten sobre superficies.

DEFINICION 45.

Llámase *Friccion* á la resistencia que encuentran los cuerpos al moverse paralelamente á las superficies sobre que insisten quando se impelen por una ó mas potencias.

Escolio.

Fig. 37. El paralelepípedo A animado por una potencia qualquiera α, cuya direccion AD sea obliqua al plano BE, debe, segun lo dicho en el Capítulo antecedente, ponerse en movimiento, por corto que sea el ángulo HAD, que llamamos Σ: pero esta theórica se fundó prescindiendo de la impresion que sobre el plano debe hacer la potencia $\alpha Cos.\Sigma$, que se dirige segun AH. Esta comprime al paralelepípedo y al plano,
Fig. 38. forma en este la impresion GCFI, y el obstáculo FI, que es preciso que venza la potencia paralela $\alpha sen.\Sigma$, que se dirige segun el plano BE para que pueda tener efecto el movimiento. A mas de esto, en lo material y práctico, por mas tersos y lisos que se hagan el plano y paralelepípedo, siempre les quedan pequeñas escabrosidades, que se observan claramente con el Microscopio: estas deben formar en la base otras tantas pequeñas impresiones en virtud de la potencia $\alpha Cos.\Sigma$, que, como el obstáculo FI, han de resistir al movimiento segun el plano BE. Si se consideran bien estos efectos se verá que en nada se diferencian de los que ex-

explicamos (*Esc.*1. *Prop.*27.) y redundan en el choque de dos cuerpos, quando rompiendose las primeras partículas quedan clavados uno en otro. La potencia $\alpha Cos.\Sigma$ hace aquí el efecto que allí la elasticidad lateral, y produce las impresiones recíprocas en el plano y el paralelepípedo, que allí llamamos pequeñas impresiones laterales: y la potencia $\alpha sen.\Sigma$ equivale aquí á la que allá expusimos por α, y producia la impresion total; solo faltan aquí las pequeñas impresiones en la parte superior del paralelepípedo, y que todo el lado FK encuentre cuerpo que le resista. En lugar de este se halla solo la elevacion ú obstáculo FI; pero esto no altera las leyes de la resistencia, solo sí la disminuye: de suerte, que esta misma resistencia que la práctica manifestó desde que se hicieron las primeras experiencias, y que vulgarmente se ha llamado *friccion*, en nada se diferencia de la fuerza de percusion, y es identicamente la misma cosa. Distinguiremos dos casos en la friccion: uno aquel en que el paralelepípedo no hace aun sino forzar las escabrosidades y obstáculo FI sin vencerlas enteramente, ni determinarse á correr: y otro aquel, en que ya forzadas, vencidas, ó rotas aquellas, toma su carrera. En el primero la fuerza de las escabrosidades y obstáculo será mayor que la máxîma fuerza de percusion, ahora de friccion: con que es preciso que el paralelepípedo tome su movimiento, que llegue este al máxîmo, que disminuya despues hasta ser $u = o$, que sea luego negativo, y que llegue el caso de que haya equilibrio entre la potencia y la friccion, ú de que cese el movimiento: esto es, siendo la friccion igual á la potencia $-\theta sen.\Sigma$, sea esta compuesta como se quiera. En el segundo caso, la fuerza de las escabrosidades y obstáculo es menor que la máxîma fuerza de percusion ó friccion: con que el paralelepípedo vencerá á aquella, tomando carrera, y continuando siempre con ella

quan-

quando fuere $\alpha sen.\Sigma >$, ó $= \pi$, y llegando á parar quando fuere $\alpha sen.\Sigma < \pi$, como se demonstró (*Cor.* 3. *y* 4. *Prop.*39.) quando se supuso la fuerza de percusion en este ultimo caso de friccion constante.

PROPOSICION 50.

Hallar la fuerza ó resistencia que tienen entre sí el obstáculo y las escabrosidades.

La fuerza de percusion es (*Proposicion* 42.) $\pi = \frac{HH}{HI+HI}\left(\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)(X+Z)}{A+B}\right)$. Colóquese en esta expresion $B = \infty$, y $V = 0$ por hallarse el plano BE inmovil : $\alpha = \alpha Cof.\Sigma$ por la potencia que se dirige segun AH; y en lugar de U solo, substitúyase $U Cof.\Sigma$ por la velocidad que queda segun AH , y se tendrá la fuerza de percusion que sobre la base CF padece el paralelepípedo $\pi = \frac{HH}{HI+HI}\left(\frac{1}{2}AU^2 Cof.\Sigma^2 + \alpha sen.\Sigma(X+Z)\right)$. Llamando ahora la amplitud del obstáculo , y de las escabrosidades h : la impresion que sobre estos se hiciere i , y la fuerza de percusion que padecieren φ , será esta (*Prop.*42.) $= \frac{Dbih}{bi+hi}$: y siendo por lo mismo $\pi = \frac{DHIH}{HI+HI}$, tendremos esta analogia $\frac{HIH}{HI+HI} : \frac{bih}{bi+hi} = \frac{HH}{HI+HI}\left(\frac{1}{2}AU^2 Cof.\Sigma^2 + \alpha Cof.\Sigma(X+Z)\right) : \varphi$: que da la percusion , fuerza , ó resistencia que tienen en sí el obstáculo y escabrosidades $\varphi = \frac{i(bh)}{I(bi+hi)}\left(\frac{1}{2}AU^2 Cof.\Sigma^2 + \alpha Cof.\Sigma(X+Z)\right)$.

las amplitudes H y H se toman en el sentido de CF y GI, quando las amplitudes h y h deben tomarse en el sentido de FI en el plano, y en el cuerpo de la cantidad de que su [illegible] se aplana, aun [illegible] de evasion [illegible] las I, I, i, i, [illegible] iguales en ambos casos.



Es-

Escolio.

En esta equacion, como se dixo (*Esc. Prop.* 42.) solo hay las b y h variables, las demas cantidades son las máxîmas: de suerte, que substituyendo ó considerando las b y h por las máxîmas amplitudes, tambien será φ la máxîma.

Corolario.

Esta es, pues, la friccion que debe vencer la potencia $\theta\,sen.\Sigma$ para poner en carrera el paralelepípedo: pues habiendo vencido la máxîma resistencia, y no variando ya la amplitud b del obstáculo y escobrisidades, queda tambien constante la resistencia, y sigue el paralelepípedo con la velocidad que le queda al tiempo de vencer la friccion, que será como la primitiva para seguir su curso baxo las reglas establecidas (*Prop.* 39.), puesto que esta friccion ó percusion permanece constante.

PROPOSICION 51.

Hallar la fuerza de percusion que puede producir, ó produce la potencia $\alpha\,sen.\Sigma$.

Siendo la velocidad con que se dirige el paralelepípedo segun $CF = U\,sen.\Sigma$: la potencia que le anima segun la misma direccion $\alpha\,sen.\Sigma$: las profundidades máxîmas de las impresiones x y z; y b y i las amplitudes y magnitudes de las mismas impresiones á qualquiera instante del choque: colocando estos valores en el de la percusion (*Prop.* 42.) con $B = \infty$, y $V = 0$, y llamando Φ la fuerza de percusion que puede producir la potencia $\alpha\,sen.\Sigma$, será Fig. 38.

$$\Phi = \frac{bh}{bi+hi}\left(\tfrac{1}{2}AU^2\,sen.\Sigma^2 + \alpha\,sen.\Sigma(x+z)\right).$$

Co-

Corolario 1.

Siendo, pues, $\Phi < \varphi$, el paralelepípedo no podrá tomar carrera; solo llegará á formar sobre el obstáculo y escabrosidades su máxîma impresion i, volviendo despues atras á causa de la elasticidad con velocidad negativa, hasta que siendo tambien esta cero, vuelva el paralelepípedo á tomar la positiva, y vaya asi continuando con repetidas oscilaciones, que deben disminuir continuamente al paso que vaya disminuyendo la elasticidad, y por consiguiente ha de llegar el caso en que quede parado el paralelepípedo, segun se dixo (*Esc. Def.* 45.).

Corolario 2.

Al contrario, si fuere $\Phi > \varphi$, el paralelepípedo tomará carrera, y continuará en ella sin límite si fuere $\theta\,sen.\Sigma =$, ó $> \varphi$.

Corolario 3.

El termino en que el paralelepípedo, dexando ya de sostenerse sobre el plano sin correr, querrá determinarse á la carrera, será aquel en que sea $\Phi = \varphi$, ó $\frac{\mathrm{i}(b\mathrm{h})}{\mathrm{I}(b\mathrm{i}+\mathrm{h}i)}\left(\tfrac{1}{2}AU^2 Cos.\Sigma^2 + \alpha Cos.\Sigma(X+Z)\right) = \frac{b\mathrm{h}}{b\mathrm{i}+\mathrm{h}i}\left(\tfrac{1}{2}AU^2 sen.\Sigma^2 + \alpha sen.\Sigma(x+z)\right)$: que partiendo por $\frac{\mathrm{i}(b\mathrm{h})}{b\mathrm{i}+\mathrm{h}i}$ queda $\frac{1}{\mathrm{I}}\left(\tfrac{1}{2}AU^2 Cos.\Sigma^2 + \alpha Cos.\Sigma(X+Z)\right) = \frac{1}{i}\left(\tfrac{1}{2}AU^2 sen.\Sigma^2 + \alpha sen.\Sigma(x+z)\right)$.

Co-

Corolario 4.

Habiendose desvanecido en esta equacion las variables b y h, se sigue que á qualquier instante del choque se tendrá la igualacion de las dos fuerzas Φ y φ, y por consiguiente el efecto que se propone.

Corolario 5.

Si fuere $U = o$, quedará $\frac{\alpha Cof.\Sigma(X+Z)}{I} = -\frac{\alpha fen.\Sigma(x+z)}{i}$; pero por razon de la semejanza de las impresiones hechas por los mismos cuerpos es $\frac{X+Z}{I}$ á $\frac{x+z}{i}$ como $\frac{I}{H}$ á $\frac{I}{h}$: con que substituyendo estos valores, será $\alpha fen.\Sigma = \frac{h\alpha Cof.\Sigma}{H}$: esto es, la potencia $\alpha Cof.\Sigma$, que impele al paralelepípedo perpendicularmente sobre el plano, á la potencia $\alpha fen.\Sigma$, que vence la friccion, como la amplitud H de la impresion, á la amplitud b del obstáculo y de las escabrosidades.

Corolario 6.

Segun fuere mayor el número y magnitud de las escabrosidades, mayor necesita ser la potencia $\theta fen.\Sigma$ que ha de vencer la friccion; y al contrario.

Corolario 7.

El número de las escabrosidades, siguiendo una regularidad, podemos hacerle proporcional á la amplitud H de la impresion, particularmente en cuerpos

no muy elásticos, será, pues, en este caso la amplitud de las escabrosidades $= n\text{H}$, denotando n un número qualquiera que dependa de la magnitud de las mismas escabrosidades. Suponiendo, á mas de esto, que denote l la longitud de la impresion, y k su ancho, será $\text{H} = l\text{k}$, lo que da $b = nl\text{k} + \text{kX}$, denotando kX la amplitud del obstáculo: con que tendremos $\alpha Cof.\Sigma : \alpha fen.\Sigma = l\text{k} : nl\text{k} + \text{kX} = l : nl + \text{X}$, ó $\alpha fen.\Sigma = \frac{(nl + \text{X})\alpha Cof.\Sigma}{l}$.

Corolario 8.

Quanto mas larga sea la impresion, menor necesita ser la potencia $\alpha fen.\Sigma$ que ha de vencer la friccion.

Corolario 9.

Si se suponen los cuerpos sumamente lisos, y por tanto se prescinde de las escabrosidades, será $n = 0$, y quedará $\alpha Cof.\Sigma : \alpha fen.\Sigma = l : \text{X}$: ó $\alpha fen.\Sigma = \frac{\text{X}\alpha Cof.\Sigma}{l}$.

Escolio 1.

De la equacion $\alpha fen.\Sigma = \frac{b\alpha Cof.\Sigma}{\text{H}}$: ó partiendo por α, $fen.\Sigma = \frac{b Cof.\Sigma}{\text{H}}$, se puede deducir por las experiencias el valor de $fen.\Sigma$, ú de b; pero como es mas dificil en la práctica medir el valor de b, lo que no sucede con el de Σ, que con gran facilidad se puede notar, se deducirá aquel por la equacion $b = \frac{\text{H} fen.\Sigma}{Cof.\Sigma}$. No hay sino ir elevando el plano poco á poco y con mucha suavidad desde su situacion hori-

rizontal, hasta que el paralelepípedo tome su carrera: notar el ángulo de esta ultima situacion que será el valor de Σ, de que depende el de $h = \frac{H sen.\Sigma}{Cos.\Sigma}$. El valor de H, siendo el de la amplitud de la impresion, se puede medir á muy corta diferencia. De este modo se puede hallar el valor de h, no solo correspondiente á varias potencias, sino tambien á varias dimensiones de largos y anchos del paralelepípedo, y formar tablas de ellas, que servirán de mucho en la práctica. Si entre el plano y el paralelepípedo se coloca otro cuerpo blando, de suerte que, llenando este la impresion, impida que el paralelepípedo toque al plano, tanto el obstáculo, como las escabrosidades que hubiere que vencer, se formarán del cuerpo blando, cuya resistencia es mucho menor, y por consiguiente menor potencia se necesita para vencerla. Es consegüencia que la experiencia acredita diariamente: y con tanta mas propiedad, quanto es preciso variar el cuerpo blando que se debe colocar entre los dos chocados, segun la especie y variedad de estos. Todo procede de que el cuerpo blando solo debe impedir el contacto de los dos chocados: para los ligeros y lisos el aceyte basta; pero para los muy pesados y escabrosos es preciso grasa ó sebo, y aun este se ha de templar segun los varios cuerpos.

Corolario 10.

Puede proceder la accion de dos potencias, de que resulta un movimiento compuesto en el paralelepípedo, una perpendicular al plano, y otra paralela á este. Que perpendicularmente al plano actue la potencia α, con la velocidad primitiva U: y paralelamente la potencia θ, con la velocidad primitiva V. Substitúyase, pues, α en lugar de $\alpha Cos.\Sigma$ y $\Sigma = 0$

en la equacion (*Proposicion* 50.), y quedará $\varphi = \frac{i(bh)}{I(bi+hi)}\left(\frac{1}{2}AU^2+\alpha(X+Z)\right)$. Substitúyase asimismo en la equacion (*Propos.* 51.) *sen.*$\Sigma = 1$, y V por U, y quedará $\Phi = \frac{bh}{bi+hi}\left(\frac{1}{2}AV^2+\theta(x+z)\right)$.

Corolario 11.

El paralelepípedo estará, pues, á punto de tomar su carrera quando sea $\frac{1}{I}\left(\frac{1}{2}AU^2+\alpha(X+Z)\right) = \frac{1}{i}\left(\frac{1}{2}AV^2+\theta(x+z)\right)$: ó por ser $I : i = H(X+Z) : b(x+z)$ quando sea $\frac{\frac{1}{2}AU^2+\alpha(X+Z)}{H(X+Z)} = \frac{\frac{1}{2}AV^2+\theta(x+z)}{b(x+z)}$.

Corolario 12.

Si fueren $U = 0$, y $V = 0$, quedará $\frac{\alpha}{H} = \frac{\theta}{b}$, ó $\theta = \frac{b\alpha}{H}$: esto es, la potencia α, que impele al paralelepípedo perpendicularmente sobre el plano, á la potencia θ que vence la friccion, como la amplitud H de la impresion, á la amplitud b del obstáculo y de las escabrosidades: lo mismo que se deduxo antes (*Cor.* 5).

Corolario 13.

Si solo fuere $U = 0$, quedará $\frac{\alpha}{H} = \frac{\frac{1}{2}AV^2+\theta(x+z)}{b(x+z)}$ ó $\frac{b\alpha}{H} - \frac{AV^2}{2(x+z)} = \theta$: donde se ve quanto menor necesita ser en este caso la potencia θ, que ha de vencer la friccion.

Co-

Corolario 14.

Si fuere, pues, $\frac{h\alpha}{H} - \frac{AV^2}{2(x+z)} = o$, tambien será $\theta = o$: esto es, el paralelepípedo estará para vencer la friccion sin necesidad de potencia que le impela paralelamente al plano, y sí solo por la accion que produce la velocidad V.

Corolario 15.

Para que quede vencida la friccion, y el paralelepípedo tome su carrera, no se necesita, pues, si no que sea $\frac{h\alpha}{H} < \frac{AV^2}{2(x+z)} + \theta$.

Corolario 16.

Si el plano estubiere horizontal, y fuere α la gravedad de la masa A, se necesitará, para vencer la friccion, que sea $\frac{h}{H} < \frac{V^2}{64(x+z)} + \frac{\theta}{\alpha}$; ó si fuere $\theta = o$, que sea $\frac{h}{H} < \frac{V^2}{64(x+z)}$: ó poniendo e por la altura de donde debiera caer el cuerpo para obtener la velocidad V, que sea $\frac{h}{H} < \frac{e}{x+z}$: ó $\frac{h(x+z)}{H} < e$.

Corolario 17.

La cantidad $h(x+z)$, siendo sumamente corta respecto de H en los cuerpos duros, manifiesta que cortísima velocidad primitiva necesita el paralelepípedo para vencer la friccion, y tomar su carrera.

Co-

Corolario 18.

Si fuere $V = 0$, en el mismo caso de la gravedad, se necesitará para que el paralelepípedo venza la friccion, que sea $\frac{b}{H} < \frac{\theta}{\alpha}$: ó que la razon de la gravedad, á la potencia θ que ha de vencer la friccion, sea menor que $\frac{H}{h}$.

Escolio 2.

Si se exâminan los Autores que hasta ahora han tratado este asunto, se verá, que generalmente se ha creido, y aun se cree, la friccion solo proporcional á la potencia que impele el paralelepípedo perpendicularmente al plano; abstraccion hecha de las escabrosidades. Todo se ha fundado sobre algunas experiencias practicadas por varios, particularmente por *Mr. Amontons*, de la *Real Academia de las Ciencias de Paris*, y por *Mr. Bilfinger*. Aquel dice habér hallado siempre la potencia θ, que está á punto de vencer la friccion, igual á la tercera parte de α, ú de la potencia que impele al paralelepípedo perpendicularmente al plano: esto es, $\theta = \frac{1}{3}\alpha$; pero el segundo, solo hace $\theta = \frac{1}{4}\alpha$. Esta variedad debia poner en duda que fuese la friccion solo proporcional á la potencia α; pero considerando que las escabrosidades mayores ó menores de los planos de que se valieron para hacer las experiencias, podian ser la causa de tales diferencias, facilmente se persuadieron á ello: de suerte, que estas determinaciones parece que se establecieron abstraccion hecha de las escabrosidades. Pero baxo de esta suposicion no se acomoda la idea con nuestras fórmulas: segun ellas es (*Cor. 9.*) $\theta = \frac{X\alpha}{l}$: con que, se-

segun *Amontons*, debe ser siempre $\frac{X}{l} = \frac{1}{3}$; ó segun *Bilfinger* $\frac{X}{l} = \frac{1}{4}$: esto es, la profundidad de la impresion debe ser siempre, segun el primer Autor, la tercera parte de la longitud del paralelepípedo; y segun el segundo la quarta parte: absurdo que resalta sin necesidad de manifestarle mucho. No debemos dudar, sin embargo, de las experiencias practicadas por estos dos célebres Autores: todo puede convenir si no se estendieron á hacerlas con varios cuerpos de igual gravedad, de igual amplitud en sus bases; pero de distintas dimensiones en largo y ancho, y de distintas durezas. Una experiencia muy tribial acredita este recelo. Si un cuchillo puesto con su corte sobre un plano, apoyando sobre él, se quiere hacer correr perpendicularmente á su plano, mas breve se inclina que corre, y cuesta dificultad mantenerle derecho; pero si se impele directamente segun su plano, á muy poco esfuerzo corre: lo que manifiesta claramente quanto menor es la friccion en este segundo caso que en el primero. Al contrario, para acercarnos á los dictamenes de los dos citados Autores, se debe creer que las escabrosidades permanecen por muy lisos y tersos que se pongan los cuerpos, y que el obstáculo, particularmente en cuerpos duros, se hace insensible, ó casi despreciable. En este caso será (*Corol.* 12.) $\theta = \frac{h\alpha}{H}$: ó substituyendo (*Cor.*7.) $H = lk$, y $h = nlk + kX$, será $\theta = \frac{\alpha k(nl + X)}{lk} = \frac{\alpha(nl + X)}{l}$: de suerte, que despreciando la cantidad X, que procede del obstáculo, como infinitamente chica respecto de la nl, que corresponde á las escabrosidades, quedará $\theta = n\alpha$: esto es, segun *Amontons*, $n = \frac{1}{3}$; y segun *Bilfinger*, $n = \frac{1}{4}$: cuya diferencia es entonces regular, puesto

que

que n expresó la magnitud de las escabrosidades. Esto prueda lo mucho que conviene nuestra theórica con las experiencias; pero si corresponde suponer el obstáculo como nulo en los cuerpos muy duros, no se puede hacer esta suposicion en los blandos, ó no muy duros: en estos casos, al contrario; mas bien se deben suponer las escabrosidades como nulas, respecto del obstáculo, y por consiguiente menos resistirá el paralelepípedo por su punta que por su lado mayor.

De los efectos despues de estar vencida la friccion.

PROPOSICION 52.

Hallar la relacion entre la velocidad u, y el espacio corrido por el cuerpo A.

Ya se tiene repetido (*Cor.* 2. *Prop.* 51.) que siempre que sea $\Phi > \varphi$, el paralelepípedo tomará su carrera: que si al mismo tiempo (*Esc. Def.* 45.) la potencia θ, ó $\alpha sen.\Sigma$ que le anima paralelamente al plano fuese mayor que la fuerza que tubiere el obstáculo y las escabrosidades, continuará en ella sin límite: y que en todo el curso la friccion será constante, á causa que no aumenta la amplitud, ni del obstáculo, ni de las escabrosidades. En esta inteligencia, la theórica de la velocidad u que corresponde es (*Corol.* 1. *Propos.* 34.) $u = \left(U^2 + \frac{\alpha(x+z)}{\frac{1}{2}A} - \frac{\int DHdx}{\frac{1}{2}A}\right)^{\frac{1}{2}}$, ó substituyendo θ por α, y h por H, resultará $u =$ --------- $\left(U^2 + \frac{2\theta(x+z)}{A} - \frac{2Dhx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$; pero siendo en este caso $z = 0$, respecto de x, quedará $u = \left(U^2 + \frac{2\theta x}{A} - \frac{2Dhx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$:

ex-

expresando U la velocidad primitiva que tuvo el cuerpo al vencer la friccion.

Corolario 1.

Si fuere una sola ó unica potencia α la que impeliese al paralelepípedo, será preciso substituir $\alpha sen.\Sigma$ por θ, y quedará $u = \left(U^2 + \frac{2\alpha x sen.\Sigma}{A} - \frac{2Dhx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Corolario 2.

Como de suponer $z = o$, se deduce que ha de ser tambien D como infinito respecto de D, tendremos (*Prop.*27.) la fuerza del obstáculo y de las escabrosidades $\varphi = \frac{DhDh}{Dh + Dh} = Dh$: con que podremos substituir φ por Dh, y será tambien $u = \left(U^2 + \frac{2\theta x}{A} - \frac{2\varphi x}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$; ó en el caso de ser única la potencia α que impele al paralelepípedo $u = \left(U^2 + \frac{2\alpha x sen.\Sigma}{A} - \frac{2\varphi x}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Corolario 3.

Para que llegue á pararse el paralelepípedo en el curso de su carrera, ha de ser $u = o$: luego para este caso será $U^2 + \frac{2\theta x}{A} - \frac{2Dhx}{A} = o$; ó $U^2 = \frac{2x}{A}(Dh - \theta) = \frac{2x}{A}(\varphi - \theta)$: donde se ve claramente, que para que pueda pararse el paralelepípedo, es preciso que sea $\varphi = Dh > \theta$; sin esto sería $\varphi - \theta$ negativo, y por consiguiente U imaginario, lo que es contra lo supuesto: ó $\varphi - \theta = o$, y por consiguiente, asimismo, $U = o$, lo que tambien es contra lo supuesto.

Corolario 4.

El punto en que parará el paralelepípedo será, pues, aquel en que sea $x = \frac{AU^2}{2(Dh-\theta)} = \frac{AU^2}{2(\varphi-\theta)}$.

PROPOSICION 53.

Hallar la relacion entre el espacio corrido por el cuerpo A, y su velocidad.

La equacion que á este caso corresponde es (*Cor.* 1. *Prop.* 39.) $x+z = \frac{\frac{1}{2}A(U^2-u^2)}{\pi-\alpha}$: que se reduce, substituyendo $\pi = \varphi$, $\alpha = \theta$, y $z = o$, á $x = \frac{A(U^2-u^2)}{2(\varphi-\theta)} = \frac{A(U^2-u^2)}{2(Dh-\theta)}$; y si fuere $\theta > \phi$, $x = \frac{A(u^2-U^2)}{2(\theta-\varphi)} = \frac{A(u^2-U^2)}{2(\theta-Dh)}$.

Corolario.

En el caso de haber máximo espacio x, será $u = o$: luego quedará este $x = \frac{AU^2}{2(\varphi-\theta)} = \frac{AU^2}{2(Dh-\theta)}$, como resultó antes (*Cor.* 4. *Prop.* 52.).

PROPOSICION 54.

Hallar la relacion entre el tiempo t, que emplea el cuerpo A en su carrera, y su espacio corrido.

La equacion (*Prop.* 29.) $dt = \frac{dx+dz}{u-v}$ se reduce, en este caso de ser $z = o$, y $v = o$, á $dt = \frac{dx}{u}$.

Subs-

Substitúyase en ella el valor de u hallado (*Prop.* 52.), y tendremos $dt = \frac{dx}{\left(U^2 + \frac{2\theta x}{A} - \frac{2Dhx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}}$: é integrando

$$t = \frac{\left(A^2U^2 + 2Ax(\theta - Dh)\right)^{\frac{1}{2}} - AU}{\theta - Dh} = \frac{\left(A^2U^2 + 2Ax(\theta - \varphi)\right)^{\frac{1}{2}} - AU}{\theta - \varphi}.$$

Corolario.

En el caso que haya máxîmo espacio corrido, en que es $Dh > \theta$, ó $\varphi > \theta$, hallamos (*Cor.* 4. *Prop.* 52. *y Cor. Prop.* 53.) $x = \frac{AU^2}{2(Dh - \theta)} = \frac{AU^2}{2(\varphi - \theta)}$: cuyo valor substituido, quedará el tiempo en que el cuerpo corre su máxîmo espacio, $t = \frac{AU}{Dh - \theta} = \frac{AU}{\varphi - \theta}$.

PROPOSICION 55.

Hallar la relacion entre el espacio x, que correrá el cuerpo A., y el tiempo t.

Multiplicando la equacion precedente $t = \frac{\left(A^2U^2 + 2Ax(\theta - \varphi)\right)^{\frac{1}{2}} - AU}{\theta - \varphi}$ por $\theta - \varphi$, añadiendo á ambas partes AU, y quadrando, resulta $A^2U^2 + 2AUt(\theta - \varphi) + t^2(\theta - \varphi)^2 = A^2U^2 + 2Ax(\theta - \varphi)$: ó substrayendo de ambas partes A^2U^2, y partiendo por $2A(\theta - \varphi)$, $x = Ut + \frac{t^2(\theta - \varphi)}{2A} = Ut + \frac{t^2(\theta - Dh)}{2A}$.

PROPOSICION 56.

Hallar el tiempo t que emplea el cuerpo A en la carrera, por su relacion con la velocidad.

La equacion que á este caso corresponde es (*Cor.* 2. *Prop.* 45.) $t = \frac{A(u-U)}{\alpha-\pi}$: substituyendo θ por α, y φ por π, queda $t = \frac{A(u-U)}{\theta-\varphi}$.

Corolario.

En el caso que haya máxîma impresíon, será $t = \frac{AU}{\varphi-\theta}$.

PROPOSICION 57.

Hallar la velocidad que tendrá el cuerpo A, por su relacion con el tiempo corrido.

Multiplicando la equacion $t = \frac{A(u-U)}{\theta-\varphi}$ por $\theta-\varphi$, partiendo por A, y restando de una y otra parte U, queda $u = U + \frac{t(\theta-\varphi)}{A}$.

Corolario.

Que el paralelepípedo A por sola la accíon de su gravedad α descienda por el plano. Que sea n un número qualquiera, de suerte que sea $\alpha sen. \Sigma - \varphi = \theta - \varphi = n\alpha$: y tendremos $u = U \pm \frac{n\alpha t}{A}$; pero siendo (*Cor.* 1. *Prin.* 3.) $A = \frac{1}{32}\alpha$, quedará $u = U \pm 32nt$.

Es-

Escolio.

Leonardo Eulero, en una de las *Memorias de la Academia Real de Berlin* del año 1748, sobre el méthodo en que se puede concebir la friccion, concluye, que es esta menor en el caso del movimiento, que en el del equilibrio; lo que es enteramente contra nuestras conclusiones. Para satisfacer esta diferencia bastará decir, que aquel Docto Autor no insistió en que consistiese la friccion en la theórica que expone; solo dice que puede servir para concebir sus efectos. Supone que procede unicamente de las escabrosidades del plano y paralelepípedo; y en ninguna manera del obstáculo FI, que ya vimos es preciso resulte en virtud de la potencia perpendicular $\alpha Cof.\Sigma$ que actua sobre el mismo paralelepípedo. Supone tambien que las escabrosidades sean pequeños planos inclinados ú dientes, todos semejantes para que puedan endentarse ó ajustarse perfectamente los del plano con los del paralelepípedo. Con esto bien es claro, que siendo la potencia que actua sobre el paralelepípedo de suficiente magnitud, obligará á este, ó á sus pequeños dientes, á que suban por los del plano, hasta que estriben vértices con vértices: pasado este punto caerán á los dientes siguientes cada uno á su correspondiente; despues volverán á subir, y continuando así, se hará la friccion por saltos de unos dientes á otros: de suerte que á la primera subida se experimenta la friccion total; y siendo las caidas una accion opuesta ó negativa, se disminuye la primera friccion, que fue la del acto del equilibrio. En esta idea, que por facil se conciben claramente los efectos que deben redundar, se perciben tambien los inconvenientes. Los dientes no pueden absolutamente llegar á quedar vértice con vértice, ni aun muy inmediatos á este estado, sin

sin haber precedido ó formádose una impresion recíproca en los mismos dientes, y por consiguiente nuevo óbice que vencer, sin que jamas pueda llegar el caso de que este quede nulo, ni de que haya caida, y por lo mismo, que tampoco disminuya la friccion por el movimiento. Una experiencia, dice el mismo Docto Autor, que favorece su determinacion, y es: que no puede conseguirse que el paralelepípedo se mueva sobre el plano con mucha suavidad por mas que se cuide de dar á este sola la precisa inclinacion para que corra: dice, que una vez que se ponga en movimiento, acelera este con gran prontitud, y que por consiguiente es preciso que la friccion disminuya; pero vease que ninguna experiencia conviene mejor con nuestra theórica.

La equacion $u = U \pm 32nt$ es la que propriamente corresponde á este caso: si substituimos en ella $n = \frac{1}{32}$, quedará $u = U \pm t$; ó si se quiere la mayor suavidad posible en el acto de ir levantando el plano, pondremos $U = 0$, y quedará sin embargo aún $u = t$: esto es, la velocidad u que tomará el cuerpo A, quando se cuide de no darle sino la precisa inclinacion para que corra, será aún de tantos pies por segundo, como segundos contenga el tiempo t: de suerte, que al primer segundo de tiempo, ya correrá con la velocidad de un pie por segundo: á los dos segundos de tiempo, con la velocidad de dos pies por segundo, y asi en adelante. Solo falta manifestar despues de esto, que el suponer $n = \frac{1}{32}$ es hacer muy corto movimiento en el plano BE, ó aumentar muy
Fig. 37. poco el ángulo BEL $= \Sigma$, quando este, ó su inclinacion es la que ya tiene el cuerpo para estár al punto preciso de correr por el plano: en cuyo estado es $a \, sen. \Sigma = \varphi$. Supongamos ahora que se aumente el án-

ángulo de una diferencial $d\Sigma$, y que sea $\Sigma + d\Sigma$: el seno del ángulo BEL será igual $sen.\Sigma + d\Sigma Cof.\Sigma$, y el coseno $Cof.\Sigma - d\Sigma sen.\Sigma$. La potencia que anima al cuerpo paralelamente será en este segundo caso $\alpha sen.\Sigma + \alpha d\Sigma Cof.\Sigma$: esto es, mayor que la del primero, de $\alpha d\Sigma Cof.\Sigma$; y la que animará perpendicularmente $\alpha Cof.\Sigma - \alpha d\Sigma sen.\Sigma$. La potencia, que es capaz de vencer la friccion en este segundo caso, es (*Cor. 5. Prop.* 51.) $= \frac{h\alpha Cof.\Sigma}{H} - \frac{h\alpha d\Sigma sen.\Sigma}{H}$. La amplitud h es, como el ancho del paralelepípedo, multiplicado por la profundidad de la impresion: y siendo la primera cantidad constante, será h como la profundidad de la impresion: esto es, (*Cor. 10. Prop.* 51.) como la potencia $\alpha Cof.\Sigma - \alpha d\Sigma sen.\Sigma$: luego será la potencia, que es capaz de vencer la friccion en el segundo caso, como $\frac{a^2}{H}(Cof.\Sigma - d\Sigma sen.\Sigma)^2$, ó como $\frac{a^2}{H}(Cof.\Sigma^2 - 2d\Sigma Cof.\Sigma sen.\Sigma)$; y en el primero, en que es $d\Sigma = 0$, como $\frac{a^2}{H} Cof.\Sigma^2$. Aquella potencia será, pues, menor que esta, de $\frac{a^2}{H} \cdot 2d\Sigma Cof.\Sigma sen.\Sigma$: y la potencia primera total será, á esta diferencia, como $Cof.\Sigma^2$, á $2d\Sigma Cof.\Sigma sen.\Sigma$; pero la potencia primera total es $= \alpha sen.\Sigma$: luego la diferencia será $= \frac{2\alpha d\Sigma sen.\Sigma^2}{Cof.\Sigma}$. El aumento de la potencia que anima paralelamente es $= \alpha d\Sigma Cof.\Sigma$, y la disminucion de la que vence la friccion $= \frac{2\alpha d\Sigma sen.\Sigma^2}{Cof.\Sigma}$: luego será para el segundo caso $\alpha sen.\Sigma - \varphi = n\alpha = \alpha d\Sigma Cof.\Sigma + \frac{2\alpha d\Sigma sen.\Sigma^2}{Cof.\Sigma}$: ó $n = \frac{1}{32} = \frac{d\Sigma}{Cof.\Sigma}(1 + sen.\Sigma^2)$; ó substituyendo, segun *Mr. Bilfinger* $\frac{sen.\Sigma}{Cof.\Sigma} = \frac{1}{4}$, será

$\frac{1}{32} = \frac{d\Sigma(1+\frac{1}{17})}{4\sqrt{\frac{1}{17}}}$, y $d\Sigma = \frac{\sqrt{17}}{144}$. El radio siendo la unidad, es la circunferencia $= 3,14$, el grado $= \frac{3,14}{180}$, y el minuto $= \frac{3,14}{60.180}$: con que llamando m el número de minutos que vale $d\Sigma$, tendremos $\frac{3,14.m}{60.180} = \frac{\sqrt{17}}{144}$, y $m = \frac{75\sqrt{17}}{3,14}$: esto, es el número m de minutos á que corresponde el movimiento del plano es de $98\frac{1}{2}$: con que solo con aumentar la inclinacion del plano de $1^\circ\ 38\frac{1}{2}'$ mas que la que tiene quando se mantiene aún sin correr el cuerpo A, ya tomará este su carrera, aumentando su velocidad de suerte que sea á lo menos $u = t$: lo que prueba, como diximos, la conformidad de nuestra theórica con la práctica.

CAPITULO 9.

Del efecto de la friccion en las Máchinas simples.

DEFINICION 46.

SE llama Máchina todo instrumento que sirve para facilitar el movimiento de los cuerpos.

DEFINICION 47.

Dividense las máchinas en simples y compuestas. Estas son las que se componen de dos ó mas de aquellas. Las simples se reducen á la *Palanca*, el *Plano inclinado*, la *Cuña*, el *Tornillo*, el *Exe en peritróchio*, y el *Carrucho*, que en la Marina se llama *Motón*.

Es-

Escolio.

Ya se habló al fin del Cap.4. de la Palanca. En esta no cabe friccion, por no tener parte alguna que se mueva insistiendo sobre superficie. Del plano inclinado se trató casi todo el Cap. 7, y nos ha servido de exemplo para determinar tambien la friccion; pero solo nos redugimos al caso en que el cuerpo A es impelido á descender: falta ahora resolver aquel en que asciende, y asimismo la rotacion que por la friccion puede resultar.

Del Plano inclinado.

DEFINICION 48.

Plano inclinado es aquel que no es paralelo ni perpendicular al horizonte: como si LE denota el horizonte, BE será el plano inclinado. Fig. 37.

Escolio.

En el cuerpo A, que insiste sobre el plano inclinado, concurre ya una potencia que le impele, que es la gravedad, y segun la direccion vertical AD. Por la accion de esta potencia, como ya tenemos dicho, el cuerpo puede solamente descender, no subir: para esto es precisa otra potencia que actue sobre él en la direccion EB, y no solo mayor que la $\alpha sen.\Sigma$ que se dirige segun BE, sino mayor que esta potencia y la friccion juntas, puesto que ambas se oponen al movimiento del cuerpo segun EB. En el Capitulo precedente expresamos las potencias que han de vencer la friccion por $\alpha sen, \Sigma$, y por θ: aquella en el caso de no haber mas potencia que impela al cuerpo A, segun la di-

direccion AD, que la α; y esta quando fuese la que resultare para mover el paralelepípedo segun BE, que es asimismo $\alpha sen.\Sigma$ en el primer caso: de suerte, que de qualquiera modo que sea, conociendo la resulta de la potencia ó potencias que actuaren segun BE, ó EB, y las que resultaren segun AH puestas en lugar de las que se colocaron en los exemplos de la friccion que debe vencerse, se tendrán resueltos los casos del movimiento del cuerpo A segun BE.

PROPOSICION 58.

Hallar la potencia necesaria para vencer la friccion, y hacer subir un paralelepípedo por un plano inclinado.

Ya vimos (*Cor.* 5. *Prop.* 51.) que para vencer la friccion en el caso del plano inclinado, siendo $U = 0$, es preciso que sea $\alpha sen.\Sigma = \frac{\alpha b Cos.\Sigma}{H}$, denotando Σ el ángulo HAD, ó BEL: α la única potencia que anima el paralelepípedo segun AD: $\alpha sen.\Sigma$ la que le anima segun BE; y $\alpha Cos.\Sigma$ la que le anima segun AH. Que una potencia θ impela ahora al paralelepípedo segun EB, y tendremos $\theta - \alpha sen.\Sigma$ por la potencia resultante segun EB, que substituida, en lugar de $\alpha sen.\Sigma$, en la equacion antecedente, tendremos para vencer la friccion, y caso de querer ya subir el paralelepípedo por el plano $\theta - \alpha sen.\Sigma = \frac{\alpha b Cos.\Sigma}{H}$: que da $\theta = \frac{\alpha(H sen.\Sigma + b Cos.\Sigma)}{H}$.

Corolario 1.

Si fuere $sen.\Sigma + \frac{b}{H} Cos.\Sigma < 1$, tambien será $\theta < \alpha$,

y,

y por consiguiente no será necesaria tanta fuerza para subir el páralelepípedo por el plano, como para subirle verticalmante: de suerte, que el plano inclinado facilitará la operacion, y por lo mismo se numera entre las máchínas.

Corolario 2.

Si fuere $\mathit{sen}.\Sigma = 0$: ó lo que es lo mismo, si se hallare el plano horizontal, quedará $\theta = \frac{\alpha b}{H}$, ó $\frac{\theta}{\alpha} = \frac{b}{H}$: de suerte, que quanto menor fuere b respecto de H, tanto menor será θ respecto de α.

Corolario 3.

Como se puede hacer b casi infinitamente menor que H, ya sea por disminuir la magnitud y número de las escabrosidades, ya por interponer otro cuerpo estraño entre el plano y paralelepípedo, la potencia θ necesaria para mover este horizontalmente puede ser casi infinitamente menor que α; pero nunca cero, á menos que no sea $b = 0$: lo que en la práctica es imposible.

Corolario 4.

Si fuere $\mathit{sen}.\Sigma = 1$: ó lo que es lo mismo, si se hallare el plano vertical, ó se hubiere de levantar el paralelepípedo sin la ayuda del plano inclinado, quedará $\theta = \alpha$: de suerte, que siempre es precisa una potencia igual á la gravedad del peso que se hubiere de levantar.

Corolario 5.

Si substituimos en la fórmula $\theta = \frac{\alpha(H\mathit{sen}.\Sigma + b\mathit{Cos}.\Sigma)}{H}$

los valores $H = lk$, $b = nlk + kX$ hallados (*Cor.* 7. *Prop.* 51.), resultará $\theta = \alpha(fen.\Sigma + nCof.\Sigma + \frac{X}{l}Cof.\Sigma)$: denotando n un número qualquiera, que dependa de la magnitud de las escabrosidades: l la longitud del paralelepípedo, y X la profundidad de la impresion que este haga en el plano.

Corolario 6.

Si fuere $X = 0$: ó lo que es lo mismo, si el plano fuere muy duro, de suerte que en él no se haga sensible impresion, quedará $\theta = \alpha(fen.\Sigma + nCof.\Sigma)$.

Corolario 7.

En el caso de la mayor θ, es $d\theta = \alpha(d\Sigma Cof.\Sigma - nd\Sigma fen.\Sigma) = 0$; ó $fen.\Sigma = \left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$: donde se percibe lo estraño de no ser la mayor fuerza la que se empleare levantando el peso verticalmente, sino aquella en que se tirare por un plano inclinado en que sea $fen.\Sigma = \left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Corolario 8.

Si este valor se substituye en $\theta = \alpha(fen.\Sigma + nCof.\Sigma)$, será la mayor $\theta = \alpha\sqrt{1+n^2}$: mayor que α segun fuere mayor la n, ó las escabrosidades.

Corolario 9.

La fórmula no dá la menor θ sino siendo $fen.\Sigma$ negativo; de suerte, que es menor la θ al paso que es

menor *sen.*Σ; y pasando despues este seno á ser negativo, es $\alpha(-sen.\Sigma+n\sqrt{1-S^2})=0$, ó $-sen.\Sigma=n\left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, quando es $\theta=0$.

PROPOSICION 59.

Hallar la relacion entre la potencia λ y la velocidad u con que quiera subirse el paralelepípedo por el plano.

En lo demonstrado (*Cor.* 1. *Propos.* 52.) se halló $u=\left(U^2+\frac{2\alpha x sen.\Sigma}{A}-\frac{2Dbx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$; denotando $\alpha sen.\Sigma$ la potencia que anima al paralelepípedo paralelamente al plano. Substituyendo ahora en su lugar $\lambda-\alpha sen.\Sigma$, será $u=\left(U^2+\frac{2x(\lambda-\alpha sen.\Sigma)}{A}-\frac{2Dbx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$: expresando U la velocidad que adquirió el paralelepípedo al punto de vencer la fuerza φ del obstáculo y de las escabrosidades.

Corolario 1.

Esta fuerza φ se halló (*Cor.*2.*Pr.*52.)$=Db$: luego tambien será $u=\left(U^2+\frac{2x(\lambda-\alpha sen.\Sigma)}{A}-\frac{2\varphi x}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Corolario 2.

Si fuere la velocidad U tan corta que se pudiere, sin error sensible, establecer $U=0$, quedará $u=\left(\frac{2x}{A}(\lambda-\alpha sen.\Sigma-Db)\right)^{\frac{1}{2}}$: ó $u=\left(\frac{2x}{A}(\lambda-\alpha sen.\Sigma-\varphi)\right)^{\frac{1}{2}}$: ó porque en este caso es (*Cor.*5.*Pro.*51.) $\varphi=\frac{b}{H}Cos.\Sigma$

será

será $u = \left(\frac{2x}{A}(\lambda - \alpha\, sen.\Sigma - \frac{h}{H} Cos.\Sigma)\right)^{\frac{1}{2}}$.

Corolario 3.

Quadrando estas igualaciones, y ordenando, se tendrá $\lambda = \alpha\, sen.\Sigma + Dh + \frac{Au^2}{2x} = \alpha\, sen\Sigma + \varphi + \frac{Au^2}{2x} = \alpha\, sen.\Sigma + \frac{h}{H} Cos.\Sigma + \frac{Au^2}{2x}$.

PROPOSICION 60.

Hallar el espacio subido por el paralelepípedo, por su relacion con la velocidad.

En lo demonstrado (*Propos.* 53.) se halló $x = \frac{A(u^2 - U^2)}{2(\theta - Dh)}$, expresando θ la potencia que anima el paralelepípedo paralelamente al plano. Substituyendo ahora en su lugar $\lambda - \alpha\, sen.\Sigma$, será $x = \frac{A(u^2 - U^2)}{2(\lambda - \alpha\, sen.\Sigma - Dh)}$; ó $x = \frac{A(u^2 - U^2)}{2(\lambda - \alpha\, sen.\Sigma - \varphi)}$.

Corolario.

Si fuere la velocidad U tan corta que se pudiere, sin error sensible, establecer $U = 0$, quedará $x = \frac{Au^2}{2(\lambda - \alpha\, sen.\Sigma - Dh)}$; ó $x = \frac{Au^2}{2(\lambda - \alpha\, sen.\Sigma - \phi)} = \frac{Au^2}{2(\lambda - \alpha\, sen\Sigma - \frac{h}{H} Cos.\Sigma)}$.

PRO-

PROPOSICION 61.

Hallar el espacio subido por el paralelepípedo por su relacion con el tiempo en que le subió.

En lo demonstrado (*Prop.*55.) se halló $x = Ut + \frac{t^2(\theta - Db)}{2A}$: expresando θ la potencia que anima el paralelepípedo paralelamente al plano. Substituyendo ahora en su lugar $\lambda - \alpha sen.\Sigma$, será $x = Ut + \frac{t^2(\lambda - \alpha sen.\Sigma - Db)}{2A}$: ó $x = Ut + \frac{t^2(\lambda - \alpha sen.\Sigma - \varphi)}{2A}$.

Corolario.

Si fuere la velocidad U tan corta que se pudiere, sin error sensible, establecer $U = o$, quedará $x = \frac{t^2}{2A}(\lambda - \alpha sen.\Sigma - Db) = \frac{t^2}{2A}(\lambda - \alpha sen.\Sigma - \varphi) = \frac{t^2}{2A}(\lambda - \alpha sen.\Sigma - \frac{b}{H} Cof.\Sigma)$.

PROPOSICION 62.

Hallar la rotacion que deben tomar los cuerpos que, parados, insisten sobre el plano inclinado.

Qualesquiera que sean las potencias que animen al cuerpo A, que solo sobre un punto C insiste sobre el plano inclinado FG, pueden descomponerse en dos, una que actue paralelamente al plano, y la otra perpendicularmente: ambas se exercerán por reaccion en el punto C, y á las distancias AH, CH del centro de gravedad A del cuerpo. La gravedad α que actua segun la vertical AD se descompondrá en las dos $\alpha sen.\Sigma$, y $\alpha Cof.\Sigma$: y si á la primera se agregare otra potencia λ positiva ó negativamente que actue en el centro de gravedad, á las dos juntas $\alpha sen.\Sigma \pm \lambda$ equivaldrá la reac- Fig. 34. 35.

reaccion de ellas, que es la friccion. La diferencial del ángulo giratorio que producirán, será, pues, (*Pr.* 18. *y su Cor.*) $= \frac{dtfdt(\alpha sen.\Sigma \pm \lambda)AH \pm dtfdt\alpha Cof.\Sigma.CH}{S}$: mas, en el segundo término quando la perpendicular AH cae mas abaxo que el apoyo C; y menos, quando cae mas arriba: de suerte, que siendo esta cantidad positiva girará el cuerpo hacia la parte de abaxo del apoyo C; y al contrario si fuere negativa.

Corolario 1.

Que sea $\lambda = n\alpha sen.\Sigma$, denotando n un número qualquiera mayor ó menor que la unidad: y substituyendo este valor en la expresion del ángulo giratorio, quedará esta $= \frac{dtfdt(1 \pm n)\alpha sen.\Sigma.AH \pm dtfdt.\alpha Cof.\Sigma.CH}{S}$.

Corolario 2.

Siendo $sen.\Sigma : Cof.\Sigma = DH : AH$, ó $AH sen.\Sigma = DH Cof.\Sigma$: substituyendo este valor en la ultima expresion del ángulo giratorio, quedará esta $= \frac{dtf\alpha dtCof.\Sigma(DH(1 \pm n) \pm CH)}{S} = \frac{dtf\alpha dtCof\Sigma(DC \pm n.DH)}{S}$.

Corolario 3.

Si desde el principio de la accion fuere, pues, $DC - n.DH = 0$; ó $\alpha sen.\Sigma : n\alpha sen.\Sigma = \lambda = DH : DC$, el cuerpo no girará.

Corolario 4.

Si en el cuerpo no actuare mas potencia que la gravedad, será $n = 0$: con que quedará la expresion del ángulo giratorio $= \frac{dtf\alpha dtCof.\Sigma.DC}{S}$.

Co-

Corolario 5.

Si desde el principio de la accion fuere DC $=$ o, el cuerpo no girará; pero siendo DC de algun valor, ó segun se expresa generalmente en la mechánica, siempre que la vertical AD, qne pasa por el centro de gravedad A, cayere fuera del apoyo C, el cuerpo girará.

PROPOSICION 63.

Hallar la rotacion que deben tomar los cuerpos, que insisten sobre el plano inclinado, quando el apoyo hubiere vencido la friccion, y estubiere ya en movimiento.

La fuerza ó resistencia que en sí tienen el obstáculo, y las escabrosidades es (*Propos.* 50.) $\varphi =$ $\frac{i(bh)}{l(bi+hi)}\left(\frac{1}{2}AU^2 Cof.\Sigma^2 + \alpha Cof.\Sigma(X+Z)\right)$, y se dirige segun CH paralelamente al plano GF, y á la distancia AH del centro de gravedad del cuerpo A. El ángulo giratorio será, pues, (*Prop.* 18. *y sus Corol.*) $=$ $\frac{dt}{S}\int\frac{i(bh)dtAH}{l(bi+hi)}\left(\frac{1}{2}AU^2 Cof.\Sigma^2 + \alpha Cof.\pi(X+Z)\right) \pm \frac{dt}{S}\int \alpha dt Cof.\Sigma.CH.$

Corolario 1.

La fuerza, ó resistencia $\varphi =$ ---------- $\frac{i(bh)}{l(bi+hi)}\left(\frac{1}{2}AU^2 Cof.\Sigma^2 + \alpha Cof.\Sigma(X+Z)\right)$ es (*Esc.Def.*45) menor que la potencia $\alpha sen.\Sigma$ resultante de la gravedad, y que se dirige paralelamente al plano. Supóngase, pues, $\alpha sen.\Sigma - \lambda = \varphi$: y colocando este valor en la expresion antecedente del ángulo giratorio, quedará

dará esta $= \frac{dt \int dt(\alpha sen.\Sigma - \lambda).AH + dt \int \alpha dt Cos.\Sigma.CH}{S}$:

ó substituyendo (*Cor.2. Pr.62.*) $sen.\Sigma.AH = DH Cos.\Sigma$; y reduciendo, quedará en $\frac{dt \int \alpha dt DC Cos.\Sigma - dt \int \lambda dt.AH}{S}$.

Corolario 2.

Si fuere DC $= o$; ó si la vertical AD, que pasa por el centro de gravedad A, pasare asimismo por el apoyo C, quedará la expresion del ángulo giratorio en $- \frac{dt \int \lambda dt.AH}{S}$.

Corolario 3.

El cuerpo girará, pues, hacia la parte de arriba, quando el apoyo esté en movimiento, sin embargo de pasar la vertical AD por el mismo apoyo C.

Corolario 4.

No solamente girará el cuerpo de la misma manera en el caso de ser DC $= o$, sino en todos aquellos en que sea $\lambda.AH > \alpha Cos.\Sigma.DC$: de suerte, que aun siendo DC positiva, ó cayendo la vertical AD mas abaxo que el apoyo C, puede girar el cuerpo negativamente, ó hacia arriba.

Escolio.

De lo dicho se infiere lo que se equivocaron los que, no habiendo exâminado los cuerpos en movimiento, juzgaron que debian girar hacia abaxo siempre que la vertical AD pasare por mas abaxo que el apoyo C.

De

De la Cuña.

DEFINICION 49.

A un prisma como ABCD se llama vulgarmente *Cuña*. Fig. 39.

Escolio.

Si este se coloca entre dos cuerpos A y B, y se introduce en ellos por medio de la percusion, ó por una potencia que actue en C, y en la direccion CD: se separan los dos cuerpos, aunque las potencias que los unen sean mayores. Fig. 40.

PROPOSICION 64.

La cuña se reduce al plano inclinado.

Como para el efecto lo mismo es considerar los dos cuerpos A y B fixos, y la cuña en movimiento, que al contrario, la cuña fixa, y los dos cuerpos en movimiento, pues la accion depende, en uno y otro caso, de la velocidad respectiva: podemos suponer la cuña fixa, y que una potencia qualquiera aplicada en los cuerpos actue en la direccion DC; pero este caso se reduce á hacer subir ó impeler los dos cuerpos A y B por los dos planos inclinados DI, DL: luego la cuña se reduce al plano inclinado.

Corolario 1.

Las mismas fórmulas que expresaron los efectos del plano inclinado, deben por consiguiente expresar los de la cuña.

Escolio I.

Fig.41. Lo ordinario es que los dos cuerpos A y B sean uno mismo, ó solo cuerpo M, que por medio de la cuña se procura separar ó rajar en dos, aumentando su hendedura EKF hacia KM. La potencia que resiste consiste en la union, cohesion, ó fuerza de las partículas ó fibras del cuerpo en K, que es preciso vencer ó romper por medio de las potencias que se exercieren en G y H. Como las fibras en K tienen su elasticidad, dan de sí, ó se ponen en movimiento antes de romper. Esto solo sucede á un cierto número de fibras, y por consiguiente hay un punto como M, donde se mantienen firmes sin movimiento, y sobre el qual giran los cuerpos A y B. Las líneas GKM, HKM actuan, pues, como dos palancas del segundo genero, fixas en M, que tiran á vencer la potencia colocada en K, por medio de otras en G y H. La potencia en K será, pues, á la potencia en G, como MG, á MK: y asimismo á la colocada en H, como MH, á MK.

Corolario 2.

Si se llamare α la potencia en K, será $\frac{MK}{MG}\alpha$ la colocada en G: y $\frac{MK}{MH}\alpha$ la colocada en H.

Corolario 3.

La accion de estas dos potencias es perpendicular á MG, MH, porque girando los cuerpos A y B sobre M, los puntos G y H se dirigen perpendicularmente á los radios MG, MH.

Es-

Escolio 2.

Las fibras que resisten en K son varias, y colocadas á diversas distancias del centro inmovil M: las fuerzas que exercerán serán, por consiguiente, distintas; pero podemos suponer que K es el centro de todas ellas, donde, si se reunieran, actuaran con igual efecto. Lo mismo se debe entender de las potencias en G y H: pues estos puntos deben tomarse como los de reunion de todas las fuerzas que actuan en las impresiones que la cuña hace todo al rededor de G y H, cuyas amplitudes son H y *H*.

PROPOSICION 65.

Hallar la potencia necesaria para poner en movimiento la cuña, vencer su friccion, ó rajar los cuerpos con ella.

Respecto que la cuña se reduce al plano inclinado, hemos de valernos de la equacion (*Propos.* 58.) $\theta = \frac{\alpha(H sen.\Sigma + b Cos.\Sigma)}{\delta H}$, en la qual θ denota la potencia que actua segun DI necesaria para vencer la friccion: todo se reduce á substituir los verdaderos valores de θ, α y Σ. Que sea x la potencia que actue sobre la cuña en C, y segun la direccion CD, y tirada la GO, paralela á la IC, será $\frac{DO}{DG} \cdot \frac{x}{n} = \theta$, denotando n un número qualquiera mayor que la unidad, á fin de tomar de la potencia x solo la parte $\frac{1}{n}$ que vence la friccion del plano ID: y Σ el ángulo DGM, puesto que en el plano inclinado denotó el ángulo que forma la direccion de la potencia en G con la perpendicular á ID; tendremos, pues, baxando la perpendi-

dicular DN á la GM, $\frac{DN}{DG} = sen.\Sigma$. La potencia que actua en G es (*Cor.* 2. *Prop.* 64.) $\frac{MK}{MG}\alpha$, y es la que debe colocarse en lugar de α solo. Substituyendo, pues, todos estos valores en la equacion, tendremos $\frac{DO}{DG}.\frac{x}{n} = \frac{\frac{MK}{MG}\alpha\left(\frac{DN.H}{DG}+\frac{NG.b}{DG}\right)}{H}$: ó $\frac{x}{n} =$ $\frac{MK.\alpha}{MG.DO.H}(DN.H+NG.b)$. Del mismo modo se halla que la otra parte $\frac{(n-1)x}{n}$ de la potencia x que vence la friccion del plano LD, es $\frac{(n-1)x}{n} =$ $\frac{MK.\alpha}{MH.DP.H}(DQ.H+QH.h)$: luego $\frac{x}{n}+\frac{(n-1)x}{n}=x$ $=\frac{MK.\alpha}{MG.DO.H}(DN.H+NG.b)+\frac{MK.\alpha}{MH.DP.H}(DQ.H+QH.h)$.

Corolario I.

Si el punto M estubiere infinitamente distante de K: y al mismo tiempo se supone la friccion nula ó cero, quedará $x = \frac{\alpha.DN}{DO}+\frac{\alpha.DQ}{DP}$; pero en este caso son GM y HM paralelas á CM, ó DN $=$ GO, y DQ $=$ HP: luego $x = \frac{\alpha.GO}{DO}+\frac{\alpha.HP}{DP} = \frac{\alpha.IC}{CD}+$ $\frac{\alpha.CL}{CD} = \frac{\alpha.IL}{CD}$: que da $\alpha : x = CD : IL$.

Escolio I.

Esta relacion $\frac{x}{\alpha} = \frac{IL}{CD}$, que generalmente dan todos los Autores, en que dicen estan las fuerzas x y α, que

que exerce la cuña, solo es cierta quando la friccion es cero, y quando está el punto M á una infinita distancia; uno y otro caso imposibles. El ultimo puede darse solamente quando con la cuña se tiraran á separar dos cuerpos sueltos segun una direccion paralela á IL, porque en este caso el punto K cae en los apoyos G y H: y M, por ser GM, HM paralelos á CD, está como á una infinita distancia.

Escolio 2.

Puede asimismo suponerse que sea $MK = MG$, y la friccion casi nula al principio de la accion de la cuña, ó quando esta no se haya aun introducido en el cuerpo, sino de una cantidad infinitamente pequeña: pues en este caso se confunden los puntos M, K, G y H, y la friccion puede ser poco sensible; en todos los demas se hace notable el error de la igualacion $\frac{x}{a} = \frac{IL}{CD}$ que dan generalmente los Autores.

Corolario 2.

Si la parte IDC de la cuña fuere igual y semejante á la otra parte LDC, como regularmente se executan, serán $MH = MG$, $DP = DO$, $DQ = DN$, $QH = NG$, $H = H$, y $h = b$, que reduce la equacion á $x = \frac{MK \cdot 2a}{MG \cdot DO \cdot H}(DN \cdot H + NG \cdot b)$.

Corolario 3.

Como la fuerza x, necesaria para mover la cuña, es, segun la generalidad de los Autores, y segun lo dicho (*Corol.* 1.) $x = \frac{a \cdot IL}{CD} = \frac{2a \cdot IC}{CD} = \frac{2a \cdot GO}{DO} =$ MG.

$\frac{MG.H.2\alpha.GO}{MG.DO.H}$; y segun nuestra theórica $\varkappa = -\frac{MK.2\alpha}{MG.DO.H}(DN.H + NG.b)$: será dicha fuerza, segun la generalidad de los Autores, á la que expresa nuestra theórica, como $MG.GO.H$, á $MK(DN.H + NG.b)$, ó como $\frac{MG.GO}{MK}$, á $DN + \frac{NG.b}{H}$: donde se ve quan infinitamente menor puede ser esta fuerza segun nuestra theórica, que segun la generalidad de los Autores; y por consiguiente, quanta equivocacion se ha padecido.

PROPOSICION 66.

Determinar quando la cuña volverá hacia atras, en caso de no actuar la potencia $\varkappa$.

Quando la potencia $\varkappa$ no actua, ó es $\varkappa = 0$, la friccion se hace negativa, con que la equacion que exprese el caso en que se vencerá esta, se reduce á $\frac{DN.H - NG.b}{MG.DO.H} + \frac{DQ.H - QH.h}{MH.DP.H} = 0$: ó quando hubiere igualdad y semejanza entre las dos mitades de la cuña ICD, LCD, $DN.H - NG.b = 0$: ó $\frac{DN}{NG} = \frac{b}{H}$.

Corolario 1.

Siempre que fuere pues $\frac{DN}{NG} > \frac{b}{H}$, la cuña volverá atras luego que cese de actuar la potencia $\varkappa$.

Corolario 2.

No depende, pues, como creen generalmente los Au-

Autores, el volver la cuña atras de solo la magnitud del ángulo IDL, sino de este ángulo con las relaciones $\frac{DN}{NG}$ y $\frac{b}{H}$.

Escolio.

Hay otros instrumentos que se reducen tambien á la cuña y plano inclinado, como el cuchillo, y la hacha con que se parte la madera. La accion de esta depende de la velocidad con que cae ó choca: y asi la equacion que exprese su efecto ya no depende de la que determina el caso en que se vence la friccion, sino de aquella en que ya se supone la friccion vencida, y se mueve la hacha, cuña ó plano inclinado con cierta velocidad.

PROPOSICION 67.

Determinar el efecto de la hacha.

Como la hacha se reduce á la cuña y plano inclinado, tenemos que valernos de la equacion (*Prop.59.*) $u = \left(U^2 + \frac{2x(\lambda - \alpha sen.\Sigma)}{A} - \frac{2Dbx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$. En ella debemos substituir (*Prop.65.*) $\frac{DN}{DG} = \alpha sen.\Sigma$, y en lugar de α solo $\frac{MK}{MG}\alpha$. A mas de esto, la potencia λ es en este caso $= 0$, porque la hacha actua por sola la velocidad U con que vence la friccion. Substituyendo, pues, todas estas cantidades, quedará $u =$ $\left(U^2 - \frac{2x.\frac{MK.\alpha}{MG}.\frac{DN}{DG}}{A} - \frac{2Dbx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$; pero quando la hacha ha hecho todo su efecto, se para, y es $u = 0$: luego quando la hacha hace todo su efecto, tenemos

$U^2 = \frac{2x}{A}\left(\frac{MK.DN.a}{MG.DG} + Db\right)$: ó $x = \frac{\frac{1}{2}A.U^2.MG.DG}{MK.DN.a + MG.DG.Db}$.

Como la cantidad x es el espacio corrido por el plano DI: llamando z al corrido segun DC, tendremos $x : z = ID : CD$, ó $x = \frac{DI.z}{CD}$: cuyo valor substituido en la equacion, da el espacio corrido por la hacha, ó efecto suyo $z = \frac{\frac{1}{2}A.U^2 MG.DG.CD}{ID(MK.DN.a + MG.DG.Db)}$; pero por construccion es $\frac{DG.CD}{ID} = DO$: luego $z = \frac{\frac{1}{2}A.U^2 MG.DO}{MK.DN.a + MG.DG.Db}$.

Corolario.

El efecto de la hacha será, pues, constantemente proporcional al producto de la masa A de ella, ú de su gravedad, por el quadrado U^2 de la velocidad con que choca al madero.

Del Tornillo.

DEFINICION 50.

Fig. 42. *Tornillo* es un plano inclinado, aplicado al rededor de un cylindro cóncavo ABCD, por el qual gira otro plano inclinado semejante, que circunda otro cylindro convexô AC.

DEFINICION 51.

Al cylindro convexô con su plano, es á lo que vulgarmente se llama *tornillo*. Llámase tambien *macho*: y al cylindro cóncavo *hembra*.

DE-

DEFINICION 52.

A las vueltas de los planos se llaman *Aspiras*, *Roscas*, ó *Pasos* del tornillo.

Escolio.

Si hay un peso Q, ó una potencia aplicada en F, que se dirija segun el exe EF del tornillo: y otra sobre la palanca EP, aplicada en P, impelida segun una direccion perpendicular al mismo exe: el tornillo girará levantandose el plano del macho por el de la hembra, y por consiguiente elevará el peso Q, ó vencerá la potencia aplicada en F.

Corolario.

De esto se infiere, que el tornillo no debiera numerarse máchina simple, puesto que se compone de un plano inclinado, y una palanca; pero lo será siempre que la longitud de esta no sea mayor que el radio del cylindro.

PROPOSICION 68.

Hallar la potencia necesaria para vencer la friccion, y poner en movimiento el tornillo.

El valor de la potencia que actua sobre las roscas es (*Prop.* 58.) $\theta = \frac{\alpha(H sen.\Sigma + b Cos.\Sigma)}{H}$. La potencia que fuerza los dos planos se supone en F, dirigida segun EF: supuesto que esta sea α, el ángulo que forma su direccion con la perpendicular al plano ó roscas, es el mismo que el que forman las mismas roscas con la perpendicular al exe EF: con que, dexando los caracteres α y Σ, estos denotarán la potencia aplicada

en F; y dirigida segun el exe EF, y ángulo que forman las roscas con la perpendicular al mismo exe. La potencia π, que debe vencer la friccion, se supone colocada en P, actuando perpendicularmente al exe, y á la distancia R de este: con que su momento será $R\pi$: y si llamamos r á la distancia perpendicular del exe á las roscas ó radio del tornillo, será $r\theta = \frac{r\alpha(H sen.\Sigma + b Cos.\Sigma)}{H}$ el momento de la friccion, y tendremos para vencerla $R\pi = r\theta = \frac{r\alpha(H sen.\Sigma + b Cos.\Sigma)}{H}$, que da $\pi = \frac{r\alpha}{RH}(H sen.\Sigma + b Cos.\Sigma)$.

Corolario 1.

Si la potencia π fuere, pues, menor que $\frac{r\alpha}{R.H}(H sen.\Sigma + b Cos.\Sigma)$, el tornillo no podrá moverse.

Corolario 2.

Puesto una vez en movimiento el tornillo, y llevandolo con una velocidad constante, con esta misma debe seguir si las potencias que actuan se destruyen mutuamente, lo que sucede venciendo la friccion, que es la misma en el caso del movimiento que al tiempo de vencerla: la potencia necesaria para mantener el tornillo en movimiento con una velocidad constante ya adquirida, será asimismo $\pi = \frac{r.\alpha}{R.H}(H sen.\Sigma + b Cos.\Sigma)$.

Corolario 3.

Si se supone la friccion ó $b = 0$, quedará la equacion que exprese el caso de ponerse el tornillo en mo-

movimiento, en $\pi = \frac{r.a.sen.\Sigma}{R}$: ó si llamamos C la circunferencia que describirá el punto P donde se aplica la potencia π, y c la del tornillo será asimismo, $\pi = \frac{c.a.sen.\Sigma}{C}$; pero el radio es á $sen.\Sigma$, como la circunferencia c, á la distancia de una á otra rosca: luego llamando a esta distancia, será $c\,sen.\Sigma = a$, y $\pi = \frac{a.a}{C}$; ó $\pi : a = a : C$: esto es, la potencia que anima al tornillo, á la que se ha de vencer con él, como la distancia de una rosca á otra, á la circunferencia C que describe la potencia π.

Corolario 4.

Como esta theórica es la que generalmente se enseña por los Autores: es consequente que sus cálculos se fundan extraccion hecha de la friccion.

PROPOSICION 69.

Hallar el caso en que el tornillo volverá atras luego que cese de actuar la potencia π.

Quando cesa de actuar la potencia π, la friccion es negativa: y el caso en que se vencerá, volviendo atras el tornillo, será $o = \frac{r.a}{R.H}(H\,sen.\Sigma - b\,Cos.\Sigma)$, ó $sen.\Sigma = \frac{b}{H}\,Cos.\Sigma$: luego siempre que sea $sen.\Sigma > \frac{b}{H}\,Cos.\Sigma$, el tornillo volverá atras luego que cese de actuar la potencia π.

PROPOSICION 70.

Hallar la relacion entre la potencia que anima al tornillo, y la velocidad con que se moverá este, despues de haber vencido la friccion.

La

La fórmula que corresponde es (*Proposicion* 59.) $u = \left(U^2 + \frac{2x(\lambda - \alpha sen.\Sigma)}{A} - \frac{2Dbx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$; substituyendo en ella $\frac{R\lambda}{r}$ en lugar de λ solo, supuesto que sea λ la potencia que actue al extremo de la palanca P: suponiendo ahora, como es regular, que la velocidad U con que empieza á vencer la friccion el tornillo es despreciable, ó $U = 0$, quedará $\frac{Au^2}{2x} = \frac{R\lambda}{r} - \alpha sen.\Sigma - Db$: ó substituyendo (*Cor.* 2. *Prop.* 52.) la fuerza de la friccion $\varphi = Db$, será $\frac{Au^2}{2x} = \frac{R\lambda}{r} - \alpha sen.\Sigma - \phi =$ -- $\frac{R\lambda}{r} - \alpha sen.\Sigma - \frac{b}{H} Cos.\Sigma$.

PROPOSICION 71.

Hallar la relacion entre el tiempo, la potencia que anima el tornillo, y el espacio que correrá este segun la direccion de su exe.

La fórmula que corresponde es (*Cor. Propos.* 61.) $x = \frac{t^2}{2A}(\lambda - \alpha sen.\Sigma - Db)$, substituyendo en ella $\frac{R\lambda}{r}$ en lugar de λ sola; pero el espacio x expresa el que corren los dos planos respectivamente, y este es al espacio que corre el tornillo segun el exe, y que podemos llamar z, como 1 á $sen.\Sigma$: luego $x = \frac{sen.\Sigma}{z}$, que da $z = \frac{t^2 sen.\Sigma}{2A}\left(\frac{R\lambda}{r} - \alpha sen.\Sigma - Db\right) =$ ---- $\frac{t^2 sen.\Sigma}{2A}\left(\frac{R\lambda}{r} - \alpha sen.\Sigma - \varphi\right) = \frac{t^2 sen.\Sigma}{2A}\left(\frac{R\lambda}{r} - \alpha sen.\Sigma - \frac{b}{H} Cos.\Sigma\right)$.

Del-

Del exe en peritrochîo.

DEFINICION 53.

Exe en peritrochîo es un exe que gira, obligado de una palanca que se le aplica.

Como el exe AB horizontal, vertical, ú obliquo, Fig.43. que sostenido de los postes C, D, gira obligado de una 44. potencia aplicada en F sobre la palanca FE perpendicular al exe, hecha firme en él, y dirigida la potencia perpendicularmente al exe y á la palanca. Esta máchina debe vencer la potencia en Q, dirigida asimismo perpendicularmente al exe, y que actua sobre él, ya sea por una línea flexîble QG que se envuelve en el mismo exe, al paso que este gira, ya sea porque QG es otra palanca hecha firme en él.

Corolario 1.

Es indiferente que se repitan las palancas y potencias que actuen sobre el exe, ó que sea una rueda, como HIKL, con varias potencias que actuen en la circunferencia de ella: pues, por lo ya dicho, se pueden reducir á una sola aplicada á una distancia determinada del exe.

Corolario 2.

El exe en peritrochîo es, pues, una palanca del primero, segundo, ó tercer género, segun la situacion y distancia desde la potencia situada en Q, al exe.

PROPOSICION 72.

Hallar en el exe en peritrochîo la potencia necesaria para vencer la friccion, y poner la máchina en movimiento. Sea

Fig. 45. Sea GFE el exe, y C su centro. Actue en L, al extremo de la palanca CL, la potencia λ, en la direccion LH, perpendicular á CL. Actue asimismo en A, al extremo de la palanca CA, la potencia α, perpendicular á CA, y que ha de vencer la antecedente. Sea Σ el ángulo con que se cortan las dos direcciones LH, AI: y tiradas las DB, CD paralelas á ellas y proporcionales á las mismas potencias λ y α, CB será (*Prop. 8. y sus Cor.*) la direccion de la potencia resultante de las dos, y asimismo expresará su valor. Siendo el seno de DCL $= Cos.\Sigma$, será CB, potencia resultante de las dos λ y α, $= \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha Cos.\Sigma}$: el signo superior en la cantidad $2\lambda\alpha Cos.\Sigma$, quando el ángulo BDC es obtuso, y el inferior, quando es agudo. Esta potencia fuerza al exe, haciendole apoyar en el punto G de su direccion CB, del mismo modo que si apoyara sobre un plano tangente al exe en el punto G, y á quien es perpendicular la direccion CB de la potencia resultante. La potencia necesaria para vencer la friccion, que exercerá en el punto G, será pues (*Corol. 6. Prop. 51.*) $= \frac{h}{H}\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha Cos.\Sigma}$. La potencia que actua á girar el exe es λ colocada en L; pero reduciendola á otra colocada en G, será $\frac{R}{r}\lambda$, denotando R la longitud de la palanca CL, y r el radio CE del tornillo. La otra potencia que actua negativamente es α colocada en A; pero reducida á otra colocada en G, será $\frac{\mathcal{R}}{r}\alpha$, denotando $\mathcal{R}$ la longitud de la palanca CA. Tendremos, pues, para el caso del equilibrio, ó punto de querer vencerse la friccion $\frac{R}{r}\lambda - \frac{\mathcal{R}}{r}\alpha = \text{---}$ $\frac{h}{H}\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha Cos.\Sigma}$: que reduciendo y orde-

nan-

en el caso de vencer la friccion y poner la maquina en movimiento la resultante de las fuerzas λ y α, ni es CB ni pasa por el centro C del exe; lo que hace falso todo el calculo subsiguiente.

nando, da $\lambda = \frac{\alpha(H^2 R R \mp b^2 r^2 Cof.\Sigma)}{H^2 R^2 - b^2 r^2} \pm$ $\alpha \sqrt{\frac{(H^2 R R \mp b^2 r^2 Cof.\Sigma)^2}{(H^2 R^2 - b^2 r^2)^2} - \frac{H^2 R^2 - b^2 r^2}{H^2 R^2 - b^2 r^2}}$.

Corolario 1.

La potencia λ necesaria para vencer la friccion y poner la máchina en movimiento, es pues siempre proporcional á la potencia α.

Corolario 2.

Variando el ángulo Σ, ó situacion de la palanca CL, varia asimismo el de la potencia λ necesaria para vencer la friccion: luego hay un máximo y minimo valor de λ que depende del de Σ, ú de la situacion de la palanca CL.

PROPOSICION 73.

Hallar la máxima y mínima fuerza que vencen la friccion en el exe en peritrochio.

Si suponemos λ y Σ variables, las demas cantídades constantes, y diferenciamos la equacion $\frac{R}{r}\lambda - \frac{R}{r}\alpha = \frac{b}{H}\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \mp 2\lambda\alpha Cof.\Sigma}$, será la diferencial $\frac{R}{r} d\lambda = \frac{b}{H} \cdot \frac{\lambda d\lambda \mp \alpha d\lambda Cof.\Sigma \pm \lambda\alpha d\Sigma fen.\Sigma}{\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \mp 2\lambda\alpha Cof.\Sigma}}$; pero en el caso de actuar la mayor ó menor λ, es $d\lambda = 0$: luego, en este caso, es $0 = \frac{\pm \lambda\alpha d\Sigma fen.\Sigma}{\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \mp 2\lambda\alpha Cof.\Sigma}}$ ó $fen.\Sigma = 0$, cuyo valor, substituido en el de λ dá la mayor y menor λ necesaria para vencer la friccion

$$\lambda = \frac{a(\mathrm{H}^2\mathrm{R}R \pm b^2r^2)}{\mathrm{H}^2\mathrm{R}^2 - b^2r^2} + a\sqrt{\frac{(\mathrm{H}^2\mathrm{R}R \pm b^2r^2)^2}{(\mathrm{H}^2\mathrm{R}^2 - b^2r^2)^2} - \frac{\mathrm{H}^2R^2 - b^2r^2}{\mathrm{H}^2\mathrm{R}^2 - b^2r^2}}$$

$$= \frac{(\mathrm{H}^2\mathrm{R}R \pm b^2r^2 + \mathrm{H}br(\mathrm{R} \pm R))}{\mathrm{H}^2\mathrm{R}^2 - b^2r^2} = \frac{a(\mathrm{H}R + br)}{\mathrm{HR} \mp br}$$: esto

es la mayor $\lambda = \frac{a(\mathrm{H}R + br)}{\mathrm{HR} - br}$, que sucede quando la palanca CL está á la parte opuesta de CA, y forman ambas una misma línea: y la menor $\lambda = \frac{a(\mathrm{H}R + br)}{\mathrm{HR} + br}$, que sucede quando la palanca CL coincide con la CA.

Corolario 1.

Habrá, pues, siempre ventaja en hacer que las dos palancas coincidan lo mas que se pueda: y si se procura ó establece esto, la potencia necesaria para vencer la friccion, será, como antes, $\lambda = \frac{a(\mathrm{H}R + br)}{\mathrm{HR} + br}$.

Corolario 2.

Es asimismo ventajoso procurar que sea $\mathrm{R} > R$, ó que sea la palanca CL mayor que sea posible, pues con ello se hace mayor el denominador de la expresion.

Corolario 3.

Si fuere $\mathrm{R} = R$, quedará $\lambda = \frac{a(\mathrm{HR} + br)}{\mathrm{HR} \mp br}$, donde se ve que en el caso de coincidir las dos palancas, el instrumento ó máchina ya no da ventaja alguna, y que produce desventaja en el de estar opuestas las palancas.

Corolario 4.

Si fuere R $< R$, el instrumento será desventajoso en ambos casos, por ser $\lambda > \alpha$.

Corolario 5.

Para saber aquel en que ya no será ventajoso, estando opuestas las palancas, no hay sino suponer $\alpha = \lambda$ en la equacion $\lambda = \frac{\alpha(\mathrm{H}R + br)}{\mathrm{HR} - br}$, y tendremos $\mathrm{HR} - br = \mathrm{H}R + br$, que da $\mathrm{R} = \frac{\mathrm{H}R + 2br}{\mathrm{H}}$, longitud que ha de tener R para que ya no sea ventajosa la máchina en este caso.

Corolario 6.

Habrá asimismo ventaja en disminuir la r, no solo en el caso de ser $\lambda = \frac{\alpha(\mathrm{H}R + br)}{\mathrm{HR} + br}$ en que disminuye el numerador, y aumenta el denominador, sino tambien en el de ser $\lambda = \frac{\alpha(\mathrm{H}R + br)}{\mathrm{HR} - br}$; pues aunque disminuya el denominador, no es en tanta razon como el numerador, á causa de suponerse, para conseguir ventaja, que es $R < \mathrm{R}$.

Corolario 7.

Si se supone nula la friccion, será $b = 0$, y quedará en general $\lambda = \frac{\alpha(\mathrm{H}^2\mathrm{R}R \pm 0)}{\mathrm{H}^2\mathrm{R}^2 - 0} + \alpha\sqrt{\frac{(\mathrm{H}^2\mathrm{R}R \pm 0)^2}{(\mathrm{H}^2\mathrm{R}^2 - 0)^2} - \frac{\mathrm{H}^2R^2 - 0}{\mathrm{H}^2\mathrm{R}^2 - 0}}$ $= \frac{\alpha R}{\mathrm{R}}$: en cuyo valor habiendose desvanecido el

de Σ, se sigue, que suponiendo nula la friccion, es indiferente la situacion de la palanca CL.

Escolio I.

Por este motivo han padecido generalmente los Autores de Mechânica el error de suponer indiferente la situacion de la palanca CL: no menos que hacer $\lambda = \frac{\alpha R}{R}$, aunque en esto ya advierten algunos que es menester aumentar la λ lo que la fraccion requiriere; pero siempre sin advertirnos nada de la situacion de la palanca CL, que ya hemos visto lo que altera el valor de λ.

Corolario 8.

Si en lugar de una sola palanca CL, actuasen dos iguales y opuestas, con potencias iguales aplicadas á sus extremos, será DB $= 0$; y la potencia que fuerza al exe, y produce la friccion, se reducirá solamente á α, y la que la ha de vencer á $\frac{b}{H}\alpha$: con que para este caso se tendrá $\frac{R}{r}\lambda - \frac{R}{r}\alpha = \frac{b}{H}\alpha$, que dá en general $\lambda = \frac{\alpha(HR + br)}{HR}$: en cuya expresion λ expresa la suma de las dos potencias iguales aplicadas á los extremos de las dos palancas iguales opuestas.

Corolario 9.

Lo mismo se debe entender aunque las palancas sean muchas mas, con tal que todas sean iguales, y lo mismo las potencias que en ellas se apliquen, destruyéndose las positivas á las negativas.

Co-

Corolario 10.

Esto mismo sucederá en la rueda HIKL, con tal que potencias iguales se apliquen á los extremos de sus diámetros. Fig.43. 44.

Corolario 11.

Convendrá pues, asimismo, en todos estos casos, no solo que se aumente la R, sino que disminuya en general la *r*.

Corolario 12.

Como puesto en movimiento el exe en peritrochîo, y llevandolo con una velocidad constante, con esta misma debe seguir, si las potencias que actuaren se destruyeren mutuamente, lo que sucede venciendo la friccion, que es la misma en el caso del movimiento que al tiempo de vencerla: la potencia necesaria para mantener el exe en peritrochîo en movimiento con una velocidad constante ya adquirida, será asimismo, $\lambda = \frac{a(HR + br)}{HR}$ en caso de la rueda, ó que palancas iguales y opuestas actuen asimismo con potencias iguales; y quando no actuare sino una sola $\lambda =$

$$\frac{a(H^2RR \pm b^2r^2 Cof.\Sigma)}{H^2R^2 - b^2r^2} + a\sqrt{\frac{(H^2RR \pm b^2r^2 Cof.\Sigma)^2}{(H^2R^2 - b^2r^2)^2} - \frac{H^2R^2 - b^2r^2}{H^2R^2 - b^2r^2}}.$$

Corolario 13.

Una potencia qualquiera, mayor que la asignada λ, puede dar al exe una velocidad determinada: con que una vez empleada esta por el tiempo preciso, ya no se necesita para conservar el mismo movimiento sino la sola potencia λ.

Es-

Escolio 2.

No se ha querido incluir en el cálculo, por no complicarle mas, la potencia que procede de la gravedad de la misma máchina; pero es facil hacer atencion á ella, suponiendola agregada á la α, ó suponien-
Fig. 43, do que esta sea la compuesta de la que actua en Q, y
44. de la que produce la gravedad, como asimismo que
Fig. 45. la direccion AI es la que resulta de las dos.

Corolario 14.

De esto se infiere claramente, que será ventajoso en el exe en peritrochio que la potencia procedente de la gravedad de la máchina, se oponga quanto es dable á la que actua en Q, porque con ello se disminuirá esta.

Corolario 15.

En el exe vertical no actúa la potencia procedente de la gravedad, porque se dirige segun el exe; pero resultará de ella friccion, que será menor, quanto menos diste del centro del exe el apoyo ó punto sobre que cargue el peso de la máchina.

Del Carrucho ó Monton.

DEFINICION 54.

Carrucho ó *Monton* es una pequeña rueda que gira sobre un exe, obligada de una línea flexíble que se le aplica.

Fig. 46. En una pieza BD de madera, ú otro qualquiera material sólido, que es lo que efectivamente se llama moton, se abre una hendidura LI, nombrada *caxera*,

y

y en ella se aplica la rueda IGL, llamada *roldana*, y que gira sobre el exe C, apoyado en la pieza BD ó moton. Este se hace firme en B, y una potencia aplicada en H, en la línea flexîble HLIA, que pasa sobre la rueda, actua en la direccion de la misma línea LH, cuya fuerza se comunica á IA, y vence otra potencia aplicada en A, y que se dirige segun IA.

Corolario 1.

Las potencías aplicadas en H y A actuan del mísmo modo que si estubieran colocadas en los puntos L y I, donde son tangentes á la roldana las líneas HL, AI: por lo que el carrucho ó monton se reduce á un exe en peritrochîo, cuyas palancas $CL = R$, y $CI = R$, son entre sí iguales.

Corolario 2.

La relacion general dada (*Cor.*12. *Prop.*73.) entre las potencias λ y α que actuan en H y A, ó en L y I, se reducirá en el moton á $\lambda = \frac{\alpha(H^2R^2 \pm b^2r^2 Cos.\,\Sigma)}{H^2R^2 - b^2r^2}$
$\pm \alpha\sqrt{\frac{(H^2R^2 \pm b^2r^2 Cof.\Sigma)^2}{(H^2R^2 - b^2r^2)^2} - 1}$.

Corolario 3.

La potencia λ necesaria para vencer la friccion es, pues, proporcional á la potencia α que se ha de vencer.

Corolario 4.

La mayor y menor λ sucederán (*Prop.*73.) quando sea

sea *sen.* $\Sigma = o$: aquella será $\lambda = \frac{\alpha(HR + hr)}{HR - hr}$; y la menor $\lambda = \frac{\alpha(HR + hr)}{HR + hr} = \alpha$.

Corolario 5.

No puede darse en el moton caso en que suceda la menor $\lambda = \alpha$; porque siendo preciso para esto, que la IA se dirija al lado opuesto, ó segun HL, no actuará la línea flexîble sobre la roldana en esta ocasion.

Corolario 6.

En el caso de la mayor $\lambda = \frac{\alpha(HR + hr)}{HR - hr}$, conviene que el exe de la roldana sea lo menor posible, porque con ello disminuye λ, no solo porque será menor el numerador, sino porque aumentará el denominador.

Escolio.

Puede dudarse si hallandose libre la línea HLIA sobre la roldana IL, ó no sujeta en algun modo á esta, no correrá la línea sobre la roldana, quedando esta parada ó sin moverse sobre el exe C: pues la potencia λ, aplicada en H, tira á la línea, y esta á la potencia en A, cuyo movimiento puede hacerse sin necesidad de que la roldana se mueva sobre el exe C. Para aclarar esta duda no es menester sino probar que las fuerzas que resisten, en caso de hacerse el movimiento sobre el exe, son menores que haciendose con la roldana firme: ó lo que es lo mismo, que λ es menor en el primer caso que en el segundo.

PRO-

PROPOSICION 74.

Determinar si en el moton debe hacerse el movimiento sobre el exe, y no sobre la roldana firme.

La potencia $\frac{b}{H}\sqrt{\lambda^2+\alpha^2\pm 2\lambda\alpha Cos.\Sigma}$ que vence la friccion la igualamos (*Prop.* 72.) á la diferencia de las dos potencias aplicadas en L y I, pero reducidas, en caso del movimiento sobre el exe C, al mismo exe: en el de no hacerse el movimiento sino sobre la circunferencia de la roldana, ya no necesitan reduccion, puesto que en ella estan aplicadas: tendremos, pues, para este caso $\lambda-\alpha=\frac{h}{H}\sqrt{\lambda^2+\alpha^2\pm 2\lambda\alpha Cos.\Sigma}$: ó $\frac{R}{R}\lambda-\frac{R}{R}\alpha=\frac{b}{H}\sqrt{\lambda^2+\alpha^2\pm 2\lambda\alpha Cos.\Sigma}$; cuya expresion es la misma que la dada (*Prop.* 72.) si colocamos $R=R$, y $R=r$: substituyendo, pues, este valor en el de $\lambda=\frac{\alpha(H^2R^2\pm b^2r^2Cos.\Sigma)}{H^2R^2-b^2r^2}+\alpha\sqrt{\frac{(H^2R^2\pm b^2r^2Cos.\Sigma)^2}{(H^2R^2-b^2r^2)^2}-1}$, que es el de la potencia λ, en caso de hacerse el movimiento sobre el exe, tendremos para aquel en que se hiciere el movimiento sobre la circunferencia de la roldana $\lambda=\frac{\alpha(H^2\pm b^2Cos.\Sigma)}{H^2-b^2}+\alpha\sqrt{\frac{(H^2\pm b^2Cos.\Sigma)^2}{(H^2-b^2)^2}-1}$; cuya cantidad es mayor que la otra, como se infiere de solo reducir $\frac{H^2R^2\pm b^2r^2Cos.\Sigma}{H^2R^2-b^2r^2}$ á serie infinita: pues siendo esta $1+\frac{b^2r^2}{H^2R^2}(1\pm Cos.\Sigma)+\frac{b^4r^4}{H^4R^4}(1\pm Cos.\Sigma)+$&c, se ve que este valor es mayor quando mayor sea r: luego el movimiento se hace sobre el exe, y no sobre la circunferencia de la roldana.

Corolario I.

Esta conclusion se ha deducido, baxo la suposicion de ser la friccion la misma en un caso que en otro, ú de ser $\frac{h}{H}$ el mismo valor en ambos casos: de donde se infiere, que si fuere $\frac{h}{H}$ menor quando se hiciere el movimiento sobre la circunferencia de la roldana, puede efectivamente lograrse este: pues si se supone $h = 0$ en este caso, quedará para él $\lambda = \alpha$, cuya cantidad es la menor posible.

Corolario 2.

No se hace el movimiento, pues, sobre el exe, sino á causa de la friccion: siendo esta nula, queda para todos casos $\lambda = \alpha$, y por consiguiente fuera indiferente la determinacion al movimiento sobre el exe, ó sobre la circunferencia de la roldana.

Escolio.

El moton fixo en B no contribuye á facilitar ó vencer el movimiento de la potencia α, puesto que la necesaria para ello λ, es mayor que aquella, siempre que la línea HLIA apoye sobre la roldana; pero haciendose preciso esto por alguna necesidad, contribuye mucho, puesto que la potencia λ, en caso de hacerse el movimiento sobre el exe, es menor que en caso de hacerse sobre la circunferencia de la roldana.

PROPOSICION 75.

Determinar la relacion entre las potencias λ y α, y la que actua en el punto fixo B, donde está hecho firme el moton.

La

La potencia en B es igual y contraria á la que actua en el exe C, que se compone de las dos que actuan en H y A; pero esta potencia compuesta se halló (*Prop.* 72.) $= \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha Cos.\Sigma}$: luego si suponemos esta Ω, tendremos $\Omega = \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha Cos.\Sigma}$: que dá $\lambda = \mp \alpha Cos.\Sigma \pm \sqrt{\Omega^2 - \alpha^2 sen.\Sigma^2}$, ó ---- $\alpha = \mp \lambda Cos.\Sigma \pm \sqrt{\Omega^2 - \lambda^2 sen.\Sigma^2}$.

DEFINICION 55.

El moton es tambien movible. Si se hace firme la línea HLIA en el punto A, y actuan dos potencias, una en H, y otra en B, aquella puede vencer á esta, y ponerla en movimiento con el moton. Por esto se llama *moton movible.*

PROPOSICION 76.

Hallar la relacion entre las potencias λ y Ω en el moton movible.

Habiendo hallado (*Proposicion* 75.) ------- $\alpha = \mp \lambda Cos.\Sigma \pm \sqrt{\Omega^2 - \lambda^2 sen.\Sigma^2}$: y (*Pro.*74.) $\lambda =$

$$\frac{\alpha(H^2R^2 \pm b^2r^2 Cos.\Sigma)}{H^2R^2 - b^2r^2} + \alpha\left(\frac{(H^2R^2 \pm b^2r^2 Cos.\Sigma)^2}{(H^2R^2 - b^2r^2)^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}:$$

$$\text{ó } \alpha = \frac{\lambda}{\dfrac{H^2R^2 \pm b^2r^2 Cos.\Sigma}{H^2R^2 - b^2r^2} + \left(\dfrac{(H^2R^2 \pm b^2r^2 Cos.\Sigma)^2}{(H^2R^2 - b^2r^2)^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

tendremos $\mp \lambda Cos.\Sigma \pm \sqrt{\Omega^2 - \lambda^2 sen.\Sigma^2} =$ -----

$$\frac{\lambda}{\dfrac{H^2R^2 \pm b^2r^2 Cos.\Sigma}{H^2R^2 - b^2r^2} + \left(\dfrac{(H^2R^2 \pm b^2r^2 Cos.\Sigma)^2}{H^2R^2 - b^2r^2)^2} - 1.\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Corolario.

En el caso de la mayor λ, ú de estar paralelas las líneas HL, AI, es $\Sigma = o$: luego quedará-----

$$-\lambda + \Omega = \frac{\lambda}{\frac{H^2R^2+b^2r^2}{H^2R^2-b^2r^2} + \left(\frac{(H^2R^2+b^2r^2)^2}{(H^2R^2-b^2r^2)^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}} :$$

$$\text{ó } -\lambda + \Omega = \frac{\lambda(HR-br)}{HR+br} : \text{ que da } \Omega = \frac{2HR.\lambda}{HR+br}, \text{ y}$$

$$\lambda = \frac{\Omega(HR+br)}{2HR}.$$

De los Aparejos.

DEFINICION 56.

Aparejo es una máchina compuesta de varios motones.

Fig.47. Por un moton fixo en B, y otro movible D, pasa una línea HFEDGC, fixa en C al moton B. Una potencia λ actua en H en la direccion FH, y tira otra potencia aplicada en A, que resiste al movimiento del moton DG sobre que actua en la misma direccion.

Fig.48, 49. Por dos motones fixos en B, unidos uno á otro por sus planos, ó por sus extremos, y otro movible DG, pasa una línea HFEDGIKC fixa en C al moton DG. Una potencia λ actua en H en la direccion FH, y tira otra potencia aplicada en A, que resiste al movimiento del moton DG, sobre que actua en la misma direccion.

Fig.50. Del mismo modo, por tres motones fixos en B, y unidos entre sí, y dos movibles fixos entre sí, pasa otra línea: en cuyo extremo H actua una potencia, y otra en A del mismo modo que antes: y asi de muchos mas motones, si se quisiere, es la composicion de estos llamada *aparejos*. Es-

Escolio.

Supondremos, para facilidad del cálculo, que las líneas ó vueltas de los aparejos, como ED, CG, FH sean sensiblemente paralelas, lo que nos dá $\Sigma = o$: y asimismo que todas las roldanas sean iguales, para no tener que introducir varios valores de R.

PROPOSICION 77.

Hallar la relacion entre la potencia actuante y la resistente en los aparejos.

Puesto que se supone $\Sigma = o$, el caso se reducirá á aquel en que sucede la máxîma λ, y que (*Cor.*4. *Def.* 54.) hallamos $\lambda = \frac{\alpha(HR + br)}{HR - br}$, suponiendo λ la potencia que actua en H, y α la que debe sufrir ó tirar la línea ED: serán, pues, estas dos potencias entre sí, como $HR + br$, á $HR - br$: y la que debe sufrir la línea $ED = \frac{\lambda(HR - br)}{HR + br}$. Por la misma razon, la que sufre la línea ED, á la que sufre la GC, es tambien como $HR + br$, á $HR - br$: luego la que sufre $GC = \frac{\lambda(HR - br)^2}{(HR + br)^2}$. Esta misma es la que sufre la línea GI: y esta á la que sufre KC, será tambien como $HR + br$, á $HR - br$: luego la que sufre $KC = \frac{\lambda(HR - br)^3}{(HR + br)^3}$: y así al infinito de quantas vueltas fuere dando la línea por los motones. Si fueren, pues, dos líneas solas como ED, CG las que sostubieren al moton movible DG, las fuerzas que estas exercirán serán $\frac{\lambda(HR - br)}{(HR + br)}$ y $\frac{\lambda(HR - br)^2}{(HR + br)^2}$: si fueren tres, serán - - - - - - - -

λ

$\frac{\lambda(HR-hr)}{(HR+hr)}$, $\frac{\lambda(HR-hr)^2}{(HR+hr)^2}$ y $\frac{\lambda(HR-hr)^3}{(HR+hr)^3}$, y asi al infinito. Como las fuerzas que exercieren estas líneas han de ser iguales á la potencia Ω aplicada en A, tendremos $\Omega = \frac{\lambda(HR-hr)}{(HR+hr)} + \frac{\lambda(HR-hr)^2}{(HR+hr)^2} + \frac{\lambda(HR-hr)^3}{(HR+hr)^3} + \&c.$: constando esta serie de tantos términos como líneas sostubiere el moton movible.

Corolario 1.

Substitúyase $\frac{HR-hr}{HR+hr} = 1-Q$, que da $Q = \frac{2hr}{HR+hr}$, y será $\Omega = \lambda(1-Q+(1-Q)^2+(1-Q)^3+(1-Q)^4+\&)$: constando la serie de tantos términos como líneas sostubiere el moton movible; ó si n representa el número de estas, será $\Omega = \lambda\left((1-Q)^{n}+(1-Q)^{n-1}+(1-Q)^{n-2}+(1-Q)^{n-3}+\&\right)$, siendo el último término de la serie aquel en que sea su exponente la unidad.

Corolario 2.

Tambien será $\lambda = \frac{\Omega}{(1-Q)^{n}+(1-Q)^{n-2}+(1-Q)^{n-3}+(1-Q)^{n-4}+\&}$, donde se ve quanto conduce en los aparejos que sea Q ó su igual $\frac{2hr}{HR+hr}$ lo menor que sea posible: esto es, que sea la friccion $\frac{h}{H}$, y el radio del exe r lo menor posible, y el radio de la roldana R lo mayor posible.

Co-

Corolario 3.

Si se eleva cada término de la serie á la potestad que le corresponde, seran - - - - - - - - - - -

$$(1-Q)^{n} = 1-n.Q+\frac{n.(n-1)}{2}Q^{2}-\frac{n.(n-1)(n-2)}{2.3}Q^{3}+\&$$

$$(1-Q)^{n-1} = 1-(n-1)Q+\frac{(n-1)(n-2)}{2}Q^{2}-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3}Q^{3}+\&.$$

$$(1-Q)^{n-2} = 1-(n-2)Q+\frac{(n-2)(n-3)}{2}Q^{2}-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3}Q^{3}+\&$$

$$(1-Q)^{n-3} = 1-(n-3)Q+\frac{(n-3)(n-4)}{2}Q^{2}-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{2.3}Q^{3}+\&$$

&=&. El número de renglones de que ha de constar esta serie se deduce del coeficiente de $1-Q$, porque habiendo de ser (*Cor.* 1.) el ultimo la unidad, y encerrando el número, que se substrahe de la n en el coeficiente, tantas unidades como renglones hay menos uno, siendo q el número de renglones, tendremos $n-q+1 = 1$ por el ultimo coeficiente, que da $q=n$: esto es, los renglones de que consta la serie ha de ser de tantos como unidades tenga el número n, ó líneas sostubiere el moton movible. La suma de las unidades de todos los renglones será pues n: y por consiguiente $\Omega=$

$$\lambda\left[n-\left\{\begin{matrix}n.\\ n-1\\ n-2\\ n-3\\ \&\end{matrix}\right\}Q+\left\{\begin{matrix}n.\quad(n-1)\\ (n-1)(n-2)\\ (n-2)(n-3)\\ (n-3)(n-4)\\ \&\end{matrix}\right\}\tfrac{1}{2}Q^{2}-\left\{\begin{matrix}n.\quad(n-1)(n-2)\\ (n-1)(n-2)(n-3)\\ (n-2)(n-3)(n-4)\\ (n-3)(n-4)(n-5)\\ \&\end{matrix}\right\}\tfrac{1}{6}Q^{3}+\right]$$

ó sumando las cantidades de todos los términos $\Omega=$ $\lambda\left(\frac{n}{1}-\frac{(n+1)nQ}{1.2}+\frac{(n+1)n(n-1)Q^{2}}{1.2.3}-\frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)Q^{3}}{1.2.3.4}+\&\right)$; que dá

$$\lambda=\frac{\Omega}{\frac{n}{1}-\frac{(n+1)n}{1.2}Q+\frac{(n+1)(n)(n-1)}{1.2.3}Q^{2}-\frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}Q^{3}+\&}$$

cons-

constando las series de tantos términos como unidades tiene la n mas uno, ó como líneas tiran el moton fixo B.

Corolario 4.

La fuerza que se exerce en B es la misma que se exerce en A con mas la potencia λ que actua en la línea FH: luego la fuerza que se exerce en B $= \Omega + \lambda$

$$= \lambda\left(\frac{n+1}{1} - \frac{(n+1)(n)}{1.2}Q + \frac{(n+1)(n)(n-1)}{1.2.3}Q^2 - \frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}Q^3 + \&\right)$$

Corolario 5.

Es, pues, mayor de la cantidad λ la potencia que se puede vencer en B, que la que se puede vencer en A: y por consiguiente es ventajoso en los aparejos colocarlos de forma que la potencia que se ha de vencer esté en B, ó que este sea el moton movible, y DG el fixo.

Corolario 6.

Si se multiplica por Q la equacion precedente (*Cor.* 4.), y de una y otra parte se substrahe λ, tendremos

$$(\Omega + \lambda)Q - \lambda = -\lambda\left(1 - \frac{(n+1)}{1}Q + \frac{(n+1)(n)}{1.2}Q^2 - \frac{(n+1)(n)(n-1)}{1.2.3}Q^3 + \right) =$$

$-\lambda(1-Q)^{n+1}$, que reduciendo da $\Omega = \frac{\lambda(1-Q)\left(1-(1-Q)^n\right)}{Q}$

$$\text{y } \lambda = \frac{\Omega Q}{(1-Q)\left(1-(1-Q)^n\right)}.$$

Escolio 1.

Supóngase con *Mr. Bilfinger* $\frac{b}{H} = \frac{1}{4}$, y $\frac{r}{R}$

$\frac{r}{R} = \frac{1}{5}$, y será (*Cor.* 1. *Prop.* 77.) $Q = \frac{2}{21}$, cuyo valor substituido en el de λ (*Corol.* 6. *Propos.* 77.) dá

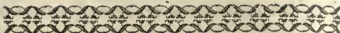
$$\lambda = \frac{\frac{2}{21}.\Omega}{(1.-\frac{2}{21})\left(1-(1-\frac{2}{21})^n\right)} = \frac{2.\Omega}{19\left(1-(\frac{19}{21})^n\right)}.$$

Suponiendo ahora $n = 3$, será $\lambda = \frac{2.\Omega}{19\left(1-\frac{6859}{9261}\right)} = \frac{9291\Omega}{22819}$.

En el caso de suponerse la friccion nula son $h = 0$, $Q = 0$; y la equacion $\lambda = \frac{\Omega Q}{(1-Q)\left(1-(1-Q)^n\right)}$ nada resuelve; pero acudiendo á la del (*Cor.* 3.) que dá $\lambda = \frac{\Omega}{n}$, y es la fórmula general que dan todos los Autores, conseqüente de esta suposicion, será, en este caso de $n = 3$, $\lambda = \frac{1}{3}\Omega$, ó $\lambda = \frac{1000}{3000}\Omega$: y esta potencia sería á la determinada antes, como $\frac{1}{3}$ á $\frac{9261}{22819}$; ó como 22819 : 27783: cuya diferencia es bien considerable.

Escolio 2.

Hemos escusado, para facilidad del cálculo, el peso de los aparejos, y el de las cuerdas, que se han supuesto líneas: puedese introducir con facilidad si se quisiere: se hace muy necesario quando la potencia que hubiere que vencer fuere corta; siendo grande se hace despreciable. Hemos escusado tambien el grueso de las cuerdas, con su inflexîbilidad, que á veces cuesta vencer, particularmente quando las potencias son cortas; pero asimismo se podrá despreciar quando sean grandes.



LIBRO SEGUNDO.

DE LOS FLUIDOS.

CAPITULO PRIMERO.

Del equilibrio de los fluidos, y de la fuerza con que actuan en el reposo.

DEFINICION I.

F*Luido* es un cuerpo, cuyas partes ceden á qualquiera fuerza, y cediendo facilmente se mueven entre sí.

Es la definicion que da el *Cavallero Newton* en la Seccion 5. del libro 2. de su *Philosophia natural.* Es conseqüente á lo dicho en el Libro primero: aun en el caso de que qualesquiera de las partes se impeliesen perpendicularmente contra una superficie inmovil, deben, en virtud de haberse de formar en ellas impresion, separarse lateralmente, y tanto mas quanto menor fuere la densidad del fluido. Se hace abstraccion aqui del caso en que una sola partícula infinitamente chica fuese la impelida: pues, como ya se ha dicho, no necesitamos exâminarle para lo que nos proponemos.

PROPOSICION I.

Quando toda la masa del fluido está en reposo, la fuerza que padecen las partículas de ella en qualquiera direccion es la misma.

Si

Si la fuerza que padece una partícula por todas partes no fuera la misma, cediera su lugar á la mayor fuerza por la definicion precedente, y se pusiera en movimiento; lo que es contra lo supuesto: luego la fuerza que padece qualquiera partícula del fluido, quando este está en reposo, es la misma en todas direcciones.

PROPOSICION 2.

La fuerza ó peso que, en virtud de la gravedad, comprime verticalmente hacia abaxo qualquiera partícula de un fluido que está en reposo, es igual al peso de la coluna vertical del fluido que está sobre ella.

Qualquiera partícula de fluido gravita sobre su inferior por la propiedad general de los graves, y esta gravitacion se comunica de unas á otras partículas por el contacto de ellas: luego la inferior sufre el peso ó fuerza de todas, ú de la coluna vertical que las encierra.

Corolario.

Como qualquiera partícula está impelida con igual fuerza en todas direcciones, se sigue que qualquiera partícula está impelida en todas direcciones con una fuerza igual al peso de la coluna vertical que está sobre ella.

DEFINICION 2.

A la superficie superior de un fluido, tenga la figura ú disposicion que tubiere, llamaremos solamente *superficie del fluido*, á fin de evitar repeticiones.

PROPOSICION 3.

Quando toda la masa del fluido está en reposo, su superficie es horizontal, ó perpendicular á la direccion de los graves.

Si la superficie del fluido no es horizontal, las colunas verticales inmediatas á una partícula del fluido, y cuyo peso sufrirá en todas direcciones, no serán iguales: por consiguiente la partícula se ha de poner en movimiento, lo que es contra lo supuesto: luego la superficie del fluido que está en reposo es horizontal.

Corolario 1.

Si la superficie del fluido fuere horizontal, toda la masa de él estará en reposo.

Corolario 2.

Quando toda la masa del fluido no estubiere en reposo, su superficie no será horizontal: ó no siendo esta horizontal, no estará toda la masa del fluido en reposo.

Escolio 1.

Se prescinde de la atraccion, ú otra qualquiera fuerza, excepto la gravedad, que los vasos ó cuerpos que encierran los fluidos pueden tener, como siendo de poquísima consideracion para nuestro intento.

Escolio 2.

Debe entenderse esto quando todo el fluido comprehendido en el vaso, ó el de dos ó mas vasos que se comunican, es el mismo ú de igual densidad: porque, en este caso, cada canal pesa, por lo demostrado, lo mismo que su correspondiente. Pero no será lo propio si, siendo distintos los fluidos de dos ó mas vasos, se comunican de uno á otro por un orificio. Supóngase que la densidad ó el peso de un pie cúbico de un fluido sea m, y la del otro M. El peso que el primero

exer-

exercerá en el orificio será *madbde*, y el que exercerá el segundo *MAdbde*, denotando *dbde* el area del orificio, y la profundidad que tubiere este debaxo de la superficie de los fluidos *a* y A. Para que haya equilibrio tendremos $madbde = MAdbde$: ó $a : A = \frac{1}{m} : \frac{1}{M}$: esto es, las alturas de las superficies de los fluidos sobre el orificio, han de ser en razon inversa de las densidades de los mismos fluidos, ó en razon inversa de sus pesos.

PROPOSICION 4.

La fuerza que padece qualquiera diferencio-diferencial de una superficie que encierra el fluido, es perpendicular á dicha superficie.

De qualquiera manera que esté impelida una superficie por un fluido, las fuerzas se pueden descomponer en perpendiculares y paralelas á la superficie; pero estas se destruyen mutuamente (*Prop.* 1.): luego no quedan sino aquellas, y por consiguiente la fuerza que padece qualquiera diferencio-diferencial de una superficie que encierra el fluido, es perpendicular á dicha superficie.

PROPOSICION 5.

La fuerza que padece qualquiera diferencio-diferencial de superficie que encierra el fluido, quando este está en reposo, es igual al peso de una coluna vertical del mismo fluido, cuya base sea igual á la diferencio-diferencial de la superficie, y su altura á la vertical que tubiere el fluido sobre la diferencio-diferencial.

Cada partícula del fluido de las que comprimen la di-

diferencio-diferencial de la superficie sufre una fuerza igual al peso de la coluna vertical del fluido, que está sobre ella: luego toda la fuerza que comprime la diferencio-diferencial es igual al peso de tantas colunas verticales como partículas del fluido la tocan: esto es, al de una coluna vertical, cuya base sea igual á la diferencio-diferencial de la superficie, y la altura á la vertical que tubiere el fluido sobre la misma diferencio-diferencial.

Corolario 1.

Fig. 51. Si se cortare, pues, una superficie AB por dos horizontales infinitamente cercanas FG, HI, y por otras dos perpendiculares á ellas KL, MN, la fuerza que padecerá el area diferencio-diferencial LKMN en la direccion CD que le es perpendicular, estando el fluido en reposo, será $= m.a.$LN.NM: en cuya expresion, tomandose las medidas por pies, m denota el peso de un pie cúbico del fluido, y a la altura vertical de su superficie sobre la diferencio-diferencial.

Corolario 2.

La fuerza ma.LN.NM, segun la perpendicular CD, se puede descomponer en dos, una horizontal CE, y otra vertical ED: y serán las tres fuerzas entre sí como CD, CE, y ED: ó tirando la horizontal NO, y la vertical MO, como NM, MO, y ON, respecto de ser los triángulos CED, MON semejantes, y el ángulo MNO $=$ EDC. Tendremos, pues, NM á MO, como la fuerza perpendicular segun CD, ma.LN.NM, á ma.LN.MO, fuerza horizontal segun CE. Y tambien NM á NO, como la fuerza perpendicular segun CD, ma.LN.NM, á ma.LN.NO, fuerza vertical segun ED.

Co-

Corolario 3.

La fuerza horizontal será, pues, á la vertical, como MO á NO, ó como el seno al coseno del ángulo MNO.

Corolario 4.

La MO es igual á la diferencial vertical, ó á la diferencial *da* de la altura del fluido: luego tambien será la fuerza horizontal CE que padecerá el area diferencio-diferencial LKMN, en caso de estar el fluido en reposo, $= mada$.LN.

Corolario 5.

La fuerza horizontal CE se puede igualmente descomponer en otras dos horizontales: una, segun la direccion dada CP, y otra perpendicular á esta CQ: y serán las tres fuerzas como CE, CP, CQ; ó tirando las LR, NR paralelas á las direcciones CP, CQ, por ser los triángulos CEP, CEQ, NLR semejantes, como LN, NR y LR. Tendremos, pues, LN á NR, como la fuerza horizontal, segun CE, $= mada$.LN, á *mada*.NR, fuerza horizontal segun CP: y del mismo modo LN á LR, como *mada*.LN, á *mada*.LR, fuerza horizontal segun CQ. Fig. 52.

Corolario 6.

El producto LN.NO es el area NT$=$PQRS en la superficie horizontal del fluido terminada por las quatro verticales LP, TS, NQ, OR levantadas de los quatro ángulos del paralelogramo LO: luego tambien será la fuerza vertical que padece la diferencio-diferencial LKMN$= ma$.PQ.PS. Fig. 53. Fig. 51.

PRO-

PROPOSICION 6.

La suma de las fuerzas horizontales que padece un cuerpo qualquiera que está sumergido en un fluido quando este está en reposo, es cero: y por consiguiente el cuerpo ha de quedar en reposo en quanto al movimiento horizontal.

Fig.54. Sea ADBE un cuerpo qualquiera, y ACBE un plano que le corte, coincidente con la superficie del fluido, quando este esté en reposo. Paralelos á este córtense los dos FOI, LQR infinitamente cercanos: y entre ellos la diferencio-diferencial OQNP. Levántese el plano vertical OTMK: báxese á este la perpendicular PG, y tírense las verticales GH, OK, y TM. Sean $MH = TG = u$, $HK = GO = du$, $HG = KO = z$, y la altura vertical entre los dos planos FOI, LQR $= dz$; y será (*Cor.5. Prop.5.*) la fuerza horizontal que padecerá la diferencio-diferencial OQNP, en la direccion FT, ó su paralela AM, $= mzdzdu$: y la que padece FOQL, á causa de ser z constante por hallarse el fluido en reposo, $= muzdz$. Pero para que esta expresion sea la que padezca FOIRQL, hemos de substituir $u = o$, por ser este el valor de u en el punto I: luego la suma de las fuerzas horizontales que padece la zona FOIRQL $= o$. Lo mismo se demonstrará de todas las demas zonas en que se divida el cuerpo; y lo propio en qualesquiera otras direcciones: luego la suma de las fuerzas horizontales que padece todo el cuerpo es cero; y por consiguiente quedará este en reposo en quanto al movimiento horizontal.

PROPOSICION 7.

La fuerza vertical que padece un cuerpo, ó que le comunica el fluido, quando este está en reposo, es igual al peso del fluido que desocupa el cuerpo.

Sea

Sea ADBE un cuerpo qualquiera, y ACBE un plano que le corte coincidente con la superficie del fluido quando este esté en reposo. Tómese la AB para medir en ella las abcisas, y sus perpendiculares EC, FG infinitamente cercanas para medir las ordenadas: tírense tambien las HI, KL infinitamente cercanas y paralelas á las abcisas: y haciendo AM $= x$, MH $= u$, será HK . HL $= dudx$: y la fuerza vertical que padecerá la diferencio-diferencial NPOQ de la superficie, será (*Cor.6. Prop.5.*) $= ma . dudx$; ó por ser $a =$ HN altura del fluido sobre dicha superficie, poniendo HN $= z$ variable, será la fuerza vertical $= mzdudx$; pero la expresion $zdudx$ es la diferencio-diferencial del espacio del cuerpo LN comprehendido entre las quatro verticales HN, KP, IQ, LO: luego su integral $\int zdudx$, será todo el espacio que ocupa el cuerpo debaxo del fluido, y $m\int zdudz$ el peso del fluido que ocupara el mismo espacio: luego la fuerza que padece el cuerpo verticalmente hacia arriba, ó que le comunica el fluido que está en reposo, es igual al peso de este que desocupa el cuerpo. Fig.55.

PROPOSICION 8.

Para que un cuerpo sumergido en un fluido que está en reposo esté sin movimiento vertical, es preciso que el peso del cuerpo sea igual al del fluido que haya desocupado: y ademas, que la vertical que pasa por el centro del espacio del fluido desocupado, coincida con la que pasa por el centro de gravedad.

Las fuerzas $mzdudx$ son otras tantas potencias que impelen al cuerpo verticalmente hacia arriba, ó lo que es equivalente (*Pro.14.Lib.1.y sus Cor.*) $m\int zdudx$ es una potencia, que impele al cuerpo verticalmente hacia arriba, colocada en el centro de todas ellas, ú del espacio que ocupa el cuerpo en el fluido: y M, supo-

niendo esta cantidad la masa de todo el cuerpo, es otra potencia que le impele verticalmente hacia abaxo: luego (*Cor.* 10. *Prop.* 17. *Lib.* 1.) ha de ser $msfzdudx - M = 0$ para que el centro de gravedad quede sin movimiento: esto es, ha de ser el peso del cuerpo M, igual á $msfzdudx$ peso del fluido que haya desocupado. A mas de esto, si llamamos p la distancia horizontal desde la vertical, que pasa por el centro de gravedad, á la que pasa por la potencia $msfzdudx$, ó centro del espacio ó volúmen del cuerpo sumergido en el fluido, tendremos (*Cor.* 6. *Prop.* 20. *Lib.* 1.) $\frac{msdtfpdtfzdudx}{S}$ por el ángulo giratorio; pero esta cantidad no puede ser cero desde el principio de la accion si no fuere $p = 0$: luego para que tampoco resulte rotacion, es preciso que la vertical, que pasa por el centro del espacio del fluido desocupado, coincida con la que pasa por el centro de gravedad.

CAPITULO 2.

De la fuerza con que en el movimiento actuan los fluidos contra una diferencio-diferencial de superficie.

PROPOSICION 9.

Si en la superficie que comprime al fluido que está en reposo, se hace un agujero, que por ahora se puede suponer infinitamente pequeño, saldrá por él el fluido con una velocidad igual á la que adquiriera este cayendo libremente de la altura vertical a que tenga el fluido sobre el agujero.

Supuesta A una partícula del fluido, y α la potencia que la anima cayendo libremente, tendremos (*Cor.*

(*Cor.*2.*Prop.*4. *Lib.*1.) $\frac{\alpha t}{A} = u$. Supóngase ahora la misma partícula saliendo por el agujero: la potencia que la animará será la fuerza de todas las partículas que estan contenidas en la altura a (*Prop.*2.): con que siendo n un número infinito, representará tambien este el número de partículas contenidas en dicha altura, y $n\alpha$ será la potencia que anima á la que sale por el agujero; pero el tiempo en que actua esta sobre la partícula ha de ser infinitamente pequeño, que debemos representar por $\frac{t}{n}$: con que tambien tendremos (*Cor.*2.*Prop.*4.*Lib.*1.) $\frac{n\alpha}{A} \cdot \frac{t}{n} = V$; denotando V la velocidad con que sale la partícula por el agujero: esto es, reduciendo $\frac{\alpha t}{A} = V$: luego las dos velocidades V y u son iguales.

Corolario.

Como las fuerzas que padecen las partículas del fluido son iguales en todas direcciones, se sigue, que en qualquiera direccion tomará la partícula impelida una velocidad $u = 8\sqrt{a}$: que es la que (*Cor.*1. *Princ.*3. *Lib.*1.) debe tomar un cuerpo ó partícula de fluido que cae libremente de la altura vertical a.

Escolio.

En la práctica no resulta jamas la velocidad del fluido sino menor de la que asignamos. Esta diferencia procede de la friccion que debe resultar en el choque de las partículas del fluido contra los lados del agujero: y aun de la que precisamente han de producir en el choque de unas partículas con otras, aun antes

tes de llegar á salir por el mismo agujero. Pero prescindiremos de estas fricciones, porque para el asunto no son necesarias, como mas adelante se verá.

PROPOSICION 10.

Hallar la relacion entre la fuerza perpendicular que padece una diferencio-diferencial de superficie, y la velocidad con que saliera por ella el fluido si tubiera libre pasage.

Fig. 51. La fuerza la hallamos (*Cor.* 1. *Prop.* 5.) $ma.$LN.NM, denotando LN.NM el area diferencio-diferencial de la superficie: y la velocidad con que saliera el fluido por esta diferencio-diferencial la hemos acabado de hallar $u = 8\sqrt{a}$: lo que da $a = \frac{u^2}{64}$: con que tambien tendremos la fuerza representada por $\frac{mu^2}{64}$.LN.NM.

Corolario.

Teniendo la velocidad con que saliera el fluido por la diferencio-diferencial, se tendrá la fuerza que esta padecerá, multiplicando su area LN.NM por el quadrado de la velocidad u, y por la constante $\frac{m}{64}$.

PROPOSICION 11.

La fuerza perpendicular que padecerá una diferencio-diferencial de superficie LN.NM, quando esta se mueva dentro del fluido en direccion que le sea perpendicular, será $= m.$LN.NM.$(\sqrt{a} \pm \frac{1}{8}u)^2$, denotando u la velocidad perpendicular de la superficie.

La velocidad con que saliera el fluido por la diferencio-diferencial de una superficie, si tubiera libre pa-

pasage, es (*Cor. Prop.9.*) $8\sqrt{a}$: con que si la superficie se mueve con la velocidad u en la misma direccion perpendicular por donde se dirige el fluido, la velocidad relativa será $8\sqrt{a} \pm u$: mas en el caso de moverse la superficie contra el fluido, y menos en el de apartarse ó huir de él: con que la fuerza perpendicular que padecerá, será (*Corol. Propos.* 10.)

$$= \frac{m.LN.NM}{64}\left(8\sqrt{a} \pm u\right)^2 = m.LN.NM.\left(\sqrt{a} \pm \tfrac{1}{8}u\right)^2$$

denotando a la altura vertical desde la diferencio-diferencial de la superficie, hasta la superficie del fluido estando este en reposo.

PROPOSICION 12.

Si el ángulo MNO que forma la superficie con la horizontal NO, perpendicular á LN, se llama n, será tambien la fuerza perpendicular que padecerá la diferencio-diferencial LKMN, moviendose esta perpendicularmente $= m.LN.\frac{MO}{sen.n}.\left(\sqrt{a} \pm \tfrac{1}{8}u\right)^2 = - - - - m.db.\frac{da}{sen.n}.\left(\sqrt{a} \pm \tfrac{1}{8}u\right)^2$: haciendo la diferencial horizontal $LN = db$.

Porque son $MN : MO = 1 : sen.n$, y $NM = \frac{MO}{sen.n} = \frac{da}{sen.n}$: cuyo valor substituido en la expresion $m.LN.NM.\left(\sqrt{a} \pm \tfrac{1}{8}u\right)^2$ hallada (*Propos.* 11.) la reduce á $\frac{m.db.da}{sen.n}.\left(\sqrt{a} \pm \tfrac{1}{8}u\right)^2$, fuerza perpendicular que padecerá la diferencio-diferencial LKMN moviendose esta perpendicularmente.

PRO-

PROPOSICION 13.

Si en lugar de moverse la diferencio-diferencial LKMN en direccion que le sea perpendicular, se moviese en otra qualquiera que la corte con un ángulo dado θ, la fuerza perpendicular que padecerá la diferencio-diferencial, será $= \frac{m.db.da}{sen.n} \cdot \left(\sqrt{a} \pm \frac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$.

La velocidad segun la direccion que tubiere la diferencio-diferencial, será á la velocidad perpendicular, como 1 á $sen.\theta$: con que será esta velocidad perpendicular $= u sen.\theta$, cuyo valor puesto en la expresion $\frac{m.db.da}{sen.n}\left(\sqrt{a} \pm \frac{1}{8} u\right)^2$ hallada (*Prop.* 12.) en lugar de u sola, que alli representó la velocidad perpendicular, resulta la fuerza perpendicular de la diferencio-diferencial $= \frac{m.db.da}{sen.n}\left(\sqrt{a} \pm \frac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$.

PROPOSICION 14.

La fuerza que padecerá la diferencio-diferencial de la superficie LKMN en qualquiera direccion que la corte con un ángulo dado $\varkappa$, será = - - - - $\frac{m.db.da.sen.\varkappa}{sen.n}\left(\sqrt{a} \pm \frac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$

Fig. 56. Sea la direccion qualquiera DL: báxese del punto D la perpendicular DC á la superficie, y tirada la LC, será $\varkappa$ el ángulo DLC, ó su igual DFG, siendo FG perpendicular á LD. Si representare, pues, DF la fuerza perpendicular, DG representará la que padece la diferencio-diferencial de la superficie en la direccion DL: y siendo DF á DG, como 1 : $sen.\varkappa$; serán tambien 1 á $sen.\varkappa$, como $\frac{m.db.da}{sen.n}\left(\sqrt{a} \pm \frac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$; fuerza per- pen-

pendicular, á $\frac{m.db.da.sen.x}{sen.n}\left(\sqrt{a} \pm \frac{1}{8}usen.\theta\right)^2$, fuerza segun la direccion DL.

Corolario.

En caso de pedirse la fuerza segun la direccion del movimiento, es $x = \theta$: luego la fuerza que padecerá la diferencio-diferencial de la superficie LKMN en la direccion de su movimiento, será $\frac{m.db.da.sen.\theta}{sen.n}\left(\sqrt{a} \pm \frac{1}{8}usen.\theta\right)^2$.

Lema 1.

Si por qualquiera punto D, de la direccion DL, se tira el plano vertical IED, perpendicular á la diferencio-diferencial LKMN, y el horizontal NLA, que coincida con la base LN: elevada la vertical DAI: tiradas las perpendiculares AB, DC, AH: llamando λ al ángulo NLA, y μ el LDA; será $sen.x$ del ángulo CLD, que forma la direccion DL con la diferencio-diferencial, $= sen.\lambda sen.n sen.\mu + Cos.\mu Cos.n$.

Supuesta $LA = q$, será $AE = q sen.\lambda$: y en el triángulo rectángulo BAE, por ser $sen.n$ el seno de BEA, será $BA = CH = q sen.n$. En el triángulo tambien rectángulo LAD, es $DA = \frac{qCos.\mu}{sen.\mu}$; y por ser semejantes los triángulos DAH, DIC, EIA, es IEA $=$ HDA, y el seno de este ángulo $= sen.n$: por lo que es $DH = \frac{qCos.\mu Cos.n}{sen.\mu}$: con que $CH + HD = CD$ $= q sen.\lambda sen.n + \frac{qCos.\mu Cos.n}{sen.\mu}$. DL es $= \frac{q}{sen.\mu}$: luego

en

en el triángulo rectángulo CLD serán $\frac{q}{sen.\mu}$: $q sen.\lambda sen.n + \frac{q Cos.\mu Cos.n}{sen.\mu} = 1$: $sen.x = sen.\lambda sen.n . sen.\mu + Cos.\mu Cos.n$.

Corolario 1.

Substituyendo este valor de $sen.x$ en la fuerza $\frac{m.db.da.sen.x}{sen.n}\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u sen.\theta\right)^2$ que padece la diferencio-diferencial; se reducirá esta á ---------- $m.db.da\left(sen.\lambda sen.\mu + \frac{Cos.\mu Cos.n}{sen.n}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u sen.\theta\right)^2$.

Corolario 2.

Si del extremo N de la base LN se baxa, sobre la direccion LR que pasa por el otro extremo, la perpendicular NR: suponiendo esta $= dc$, será NR $= db . sen.\lambda = dc$, y $db = \frac{dc}{sen.\lambda}$.

Corolario 3.

Substituyendo este valor de db en la fuerza $m.db.da\left(sen.\lambda sen.\mu + \frac{Cos.\mu Cos.n}{sen.n}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u sen.\theta\right)^2$, se reducirá esta á $m.dc.da\left(sen.\mu + \frac{Cos.\mu Cos.n}{sen.\lambda sen.n}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u sen.\theta\right)^2$.

Corolario 4.

En caso de pedirse la fuerza horizontal es $sen.\mu = 1$, y $Cos.\mu = 0$: luego será aquella $= m.dc.da\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u sen.\theta\right)^2$.

Co-

Corolario 5.

La fuerza horizontal será á la que se exerce en una direccion qualquiera, como la unidad á $fen.\mu + \frac{Cof.\mu Cof.n}{fen.\lambda fen.n}$: ó como $fen.n fen.\lambda$ á $fen.n fen.\lambda fen.\mu + Cof.\mu Cof.n$.

Corolario 6.

Si fuere H la fuerza horizontal, será la que se exerce en una direccion qualquiera $= H\left(fen.\mu + \frac{Cof.\mu Cof.n}{fen.\lambda fen.n}\right)$.

Corolario 7.

En el caso de pedirse la fuerza vertical, es $fen.\mu = 0$, y $Cof.\mu = 1$: luego será aquella $= \frac{HCof.n}{fen.\lambda fen.n}$.

Corolario 8.

Si la horizontal NO, perpendicular á la base LN, se supone $= de$, será $Cof.n : fen.n = de : da = \frac{defen.n}{Cof.n}$: cuyo valor substituido en la fuerza ---
$m.db.da\left(fen.\lambda fen.\mu + \frac{Cof.\mu Cof.n}{fen.n}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{5}{8} u fen.\theta\right)$, será tambien esta $= m.db.de\left(\frac{fen.n fen.\lambda fen.\mu}{Cof.n} + Cof.\mu\right)\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{5}{8} u fe.\theta\right)$.

Corolario 9.

En caso de pedirse la fuerza vertical, es $fen.\mu = 0$, y $cof.\mu = 1$: luego será aquella $= m.db.de\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{5}{8} u fen.\theta\right)$.

Corolario 10.

Respecto que θ expresa el ángulo que forma la direccion del movimiento con la diferencio-diferencial, tambien será $sen.\theta = sen.\lambda\, sen.\eta\, sen.\mu + Cos.\mu\, Cos.\eta$, caso de pedirse la fuerza segun esta direccion.

Corolario 11.

Siendo el movimiento horizontal, es $sen.\mu = 1$, y $Cos.\mu = 0$: luego en este caso es $sen.\theta = sen.\lambda\, sen.\eta$.

Corolario 12.

Siendo el movimiento vertical; es $sen.\mu = 0$, y $Cos.\mu = 1$: luego en este caso será $sen.\theta = Cos.\eta$.

Corolario 13.

La fuerza horizontal, y en la direccion del movimiento asimismo horizontal, será pues $= - m.dc.da \left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8} u\, sen.\lambda\, sen.\eta\right)^2$: y la fuerza vertical con movimiento asimismo vertical $= m.db.de \left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8} u\, Cos.\eta\right)$.

Escolio.

Estos casos deben entenderse quando la superficie
Fig. 51. AB está parte dentro del fluido, y parte fuera, de suerte que sea a la altura vertical desde la diferencio-diferencial LKMN, hasta la superficie del fluido P, estando este en reposo; pero puede estar la superficie AB toda sumergida en este, de suerte que sea Q un punto en la superficie del fluido. En este caso debiera representar a la altura vertical QM del fluido sobre la dife-

ferencio-diferencial LKMN; y no la altura PM de la superficie. Para evitar este inconveniente haremos $QP = D$, y $PM = a$, de suerte que ya no será a la altura vertical del fluido sobre la diferencio-diferencial LKMN, sino $D + a$: cuyo valor substituido en las expresiones en lugar de a sola, que antes denotaba dicha altura vertical, serán (*Propos.* 14. *y Cor.* 1. *Lem.* 1.) $\frac{m.db.da\,sen.\varkappa}{sen.\eta}\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2 = -$
$m.db.da\left(sen.\lambda\,sen.\mu + \frac{Cos.\mu\,Cos.\eta}{sen.\eta}\right)\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u\,se.\theta\right)^2$ la fuerza segun una direccion qualquiera: (*Cor.* 4. *Lem.* 1.) $m.dc.da\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2$ la horizontal: y (*Cor.* 9. *Lem.* 1.) $m.db.de\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2$ la vertical. Y si se piden las fuerzas segun la direccion del movimiento, en cuyo caso es $\varkappa = \theta$, serán $-$ $\frac{m.db.da\,sen.\theta}{sen.\eta}\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u\,se.\theta\right)^2$ en una direccion qualquiera: (*Co.* 13. *Le.* 1.) $m.dc.da\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u\,sen\lambda\,sen.\eta\right)^2$ la horizontal, y $m.db.de\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u\,Cos.\eta\right)^2$ la vertical.

PROPOSICION 15.

Si un fluido se mueve en virtud de su propia gravedad, y toma una velocidad constante, parte de la accion de cada una de sus partículas queda destruidá por una fuerza qualquiera.

Sea CI la superficie del fluido inclinada al horizonte, y B una partícula de él, cuya accion de la gravedad segun la vertical BD se descomponga en dos, una Fig. 57.

segun BA, perpendicular á la superficie CI, y otra segun AD, paralela á la misma. Por la primera debe quedar en equilibrio el fluido, y por la segunda debiera accelerar su velocidad; pero, por la suposicion, la velocidad es constante: luego $du = 0$, y la suma de las potencias que actuan para aumentar la velocidad es cero: con que por precision hay una fuerza ó potencia en direccion opuesta que destruye á la que actua segun AD.

PROPOSICION 16.

Hallar la fuerza que padece una diferencio-diferencial de superficie, quando está esta en reposo, y es el fluido el que se mueve y la choca.

A primera vista se ofrece, que siendo la accion y la reaccion iguales, parece que para el efecto lo mismo es que se mueva la superficie que el fluido, y que toda la diferencia consiste en suponer que la velocidad u la tenga el fluido en direccion contraria: en efecto, si la gravitacion de las particulas del fluido fuera siempre perpendicular á la superficie de este, no se ofreciera duda en ello; pero no es asi, en caso de moverse el fluido: su movimiento depende de su desnivelacion, y por consiguiente ya no es perpendicular á su superficie la direccion, segun la qual gravitan las particulas del fluido. Que el fluido corra con la superficie CI inclinada al horizonte, y con la velocidad constante u: la gravitacion vertical α de las particulas del fluido en FB se puede descomponer en dos, una β segun BA perpendicular á la superficie CI, y otra γ paralela á la misma superficie; y siendo ω el ángulo ADB que forma la vertical con la superficie del fluido, será $\beta = \alpha sen.\omega$, y $\gamma = \alpha Cos.\omega$. Esta gravitacion ó potencia queda destruida (*Prop.*15.), y solo queda la $\beta = \alpha sen.\omega$ perpendicular á la superficie CI: con que ten-

Esta proposicion 15 es mui cierta; pero yo sacaria de ella una consequencia contraria à la que saca D. Jorge Juan en la propn. siguiente. Con efecto, si en virtud de su pendiente pudiese el fluido aumentar su velocidad, esta fuerza acceleratriz en la direccion de FC disminuiria por una parte la presion del fluido sobre la area FD, y por la otra la aumentaria de la misma cantidad, siendo asi que la presion que resulta sobre la cara que mira acia C = $(a^2 \text{ sen.}\omega - \frac{1}{2}u.u.\text{sen.}\theta).m.$ LN.NM., y por la cara que mira acia I, siendo m.LN.NM. [illegible]. Como se supone uniforme la velocidad del fluido, se sigue que la fuerza acceleratriz esta destruida, y por consiguiente que ni hay el fluido por una parte la superficie impelida por razon de esta fuerza acceleratriz, ni por la otra aumenta su presion. Por consequencia, si esta reflexion es legitima, sera que haya pendiente ò no en el fluido, siempre que su velocidad sea uniforme ò nula, la presion que padecera una diferencio-diferencial de superficie submergida en el, prescindiendo del choque que recibe por razon de la velocidad del fluido, sera igual al peso de la columna entera de fluido, contando desde la superficie de este verticalmte. sobre esa diferencial.

tendremos equilibrio en el fluido por la accion de ella, y su valor será el que hayamos de substituir en las fórmulas precedentes en lugar de α solo. Suponiendo ahora, como antes, la vertical FB $= a$, será EB $= a sen.\omega$, y substituyendo tambien este valor en lugar de a en la equacion hallada (*Cor. 2. Propos. 6. Lib. 1.*) $a = \frac{Au^2}{2\alpha}$, tendremos $a sen.\omega = \frac{Au^2}{2\alpha sen.\omega}$, que dá $\frac{\alpha}{A} = \frac{u^2}{2a sen.\omega^2}$; pero (*Cor.1. Prin.3. Lib.1.*) es $\frac{\alpha}{A} = 32$: con que será $32 = \frac{u^2}{2a sen.\omega^2}$, que produce $u = 8a^{\frac{1}{2}} sen.\omega$, velocidad con que saldrá el fluido por un orificio hecho en B en virtud de sola la accion de la potencia $\beta = a sen.\omega$. La velocidad relativa con que se moverá, pues, el fluido en el orificio, será $8a^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm u sen.\theta$; y el peso ó fuerza perpendicular que suportará la diferencio-diferencial de la superficie LN.NM, será $m.LN.NM\left(a^{\frac{1}{2}} se.\omega \pm \frac{1}{8} u se.\theta\right)^2$, ó $m.LN.NM\left((D+a)^{\frac{1}{2}} se.\omega \pm \frac{1}{8} u se.\theta\right)^2$, en cuyo valor colocando los de LN y NM hallados, ó bien substituyendo, en las fórmulas halladas (*Escolio Lem. 1.*) $(D+a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega$, en lugar de $(D+a)^{\frac{1}{2}}$, serán $\frac{m.db.da.sen.x}{sen.n}\left((D+a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \frac{1}{8} u sen.\theta\right)^2 = - -$ $m.db.da\left(sen.\lambda sen.\mu + \frac{Cos.\mu Cos.n}{sen.n}\right)\left((D+a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \frac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$ la fuerza segun una direccion qualquiera: ------ $m.dc.da\left((D+a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \frac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$ la horizontal, y $m.db.de\left((D+a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \frac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$ la vertical: y si se piden las fuerzas segun la direccion del movimien-

miento $\frac{m.db.da\,sen.\theta}{sen.n}\left((D+a)^{\frac{1}{2}}sen.\omega \pm \frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2 = -$ $m.dc.da\left((D+a)^{\frac{1}{2}}sen.\omega \pm \frac{1}{8}u\,sen.\lambda\,sen.n\right)^2$ la horizontal, y $m.db.de\left((D+a)^{\frac{1}{2}}sen.\omega \pm \frac{1}{8}u\,Cos.n\right)^2$ la vertical.

Corolario I.

Si el fluido se moviere horizontalmente será $sen.\omega = 1$, y las fuerzas se reducirán á las mismas que quando el fluido se halla parado, y se mueve la superficie chocada; por lo que en este caso solo corresponde bien el principio, generalmente recibido, de que lo mismo es, para el efecto, que se mueva la superficie, que el fluido.

Corolario 2.

En estas fórmulas se encierran, pues, las otras, solo con hacer $sen.\omega = 1$.

PROPOSICION 17.

Hallar la fuerza que padece una diferencio-diferencial de superficie quando se mueven á un tiempo, tanto la diferencial, como el fluido.

Para este caso no hay sino hallar la velocidad compuesta de las dos, que se pondrá en estas últimas fórmulas en lugar de u: y el ángulo que formare la direccion compuesta con la diferencio-diferencial de la superficie, se colocará por θ: y quedará el caso resuelto, como es claro por la descomposicion y composicion de fuerzas.

Es-

Escolio.

Como el fluido es cuerpo, debieramos habernos sujetado en la theórica de este Capítulo á las leyes y principios que se dieron (*Cap.6. Lib.*1.), pues el impulso de una superficie contra el fluido es una efectiva percusion. Su fuerza, denotada allá por $\pi = \frac{DHDH}{DH + DH}$ es, en este caso de ser la dureza ú densidad del fluido D despreciable respecto á la del cuerpo, $\pi = DH$: esto es, la fuerza que padezca la superficie, es en razon directa de la densidad del fluido, y de la amplitud H de la impresion; pero esto no nos hubiera conducido á un perfecto conocimiento de la fuerza, pues aunque sepamos el valor de H en el caso del reposo, que se reduce al area superficial del cuerpo chocante perpendicular á la direccion del movimiento, no lo sabemos en el caso del actual movimiento, porque en este se altera dicho valor. Tampoco hubieramos logrado mejor conocimiento valiendonos de la igualacion (*Cor.*2. *Prop.*42. *Lib.*1.) $\pi = \frac{H}{I}\left(\frac{1}{2}AU^2 + \alpha x\right)$ á que se reduce este caso, ó suponiendo la velocidad primitiva U con que se mueva la superficie igual cero, $\pi = \frac{H\alpha x}{I}$: pues siendo la impresion total I como Hx, solo nos quedara por esta equacion el conocimiento de que la fuerza π que padeciera la superficie, sería como la potencia α que la impeliese. Por esto hemos procurado tomar otro camino que, como se ha visto, nos ha conducido al verdadero conocimiento del valor de $\pi = \frac{m.db.da\,sen.x}{sen.n}\left((D + a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \frac{1}{8} u\,se.\theta\right)^2$; pero por muy simple que sea la theórica que hemos em-

empleado, no dexara de combatirse con muy sólidos fundamentos, si la práctica no nos la verificara por quantos medios se proporcionan, como se verá mas adelante. Estos tropiezos han hecho el asunto, en todos tiempos, de la mayor dificultad, y los mas célebres Geómetras confiesan, que solo han procurado satisfacer, sin haberlo conseguido enteramente.

El *Doctor Wallis*, en sus *Obras Mathemáticas*, establece esta fuerza solamente como la simple velocidad: y baxo de esta doctrina funda sus cálculos en la proyeccion de los cuerpos arrojados por el ayre. No dá mas razones para seguir su regla, sino que con dupla velocidad aparta la superficie dupla cantidad de fluido, con tripla tripla, y asi en adelante. Añade podersele objetar, que con dupla velocidad, mueve la superficie dupla cantidad de fluido con dupla velocidad, y que por consiguiente parece que la superficie necesita duplicada fuerza para moverle; pero satisface con que la superficie no mueve, sino que solo separa el fluido. Es notable como no se le ofreció al *Doctor* la dificultad que de esto redunda, pues se hace dificil comprehender como pueda la superficie separar al fluido sin moverle: y sin moverle con velocidad proporcional á la suya.

El gran Geómetra *Leonardo Eulero*, en su *Ciencia*
Fig. 58. *naval*, dice: supóngase una superficie plana AB, cuya area sea a^2, puesta en movimiento dentro del agua, segun la direccion CO perpendicular á dicha superficie. Sea M el peso del cuerpo del qual AB es la superficie, y v la altura de donde hubiera de caer para obtener la velocidad que llevare en su movimiento. Sea asimismo $Cc = dx$ la longitud que caminare en un instante de tiempo, de suerte que en este instante pase la superficie de la situacion AB á la ab, siendo $Aa = Cc = Bb$: y como disminuye el cuerpo su velocidad, pone $v - dv$ por la altura de la qual debiera

caer

caer para obtener su velocidad disminuida. Esto supuesto, sigue el mismo Autor, el cuerpo habrá impelido en dicho instante de tiempo al agua contenida en el espacio A*ab*B, cuyo peso es igual á ma^2dx, puesta m por la gravedad ó densidad del agua: y dado que el centro de gravedad de la superficie se dirija por la misma línea C*c*, donde se halla el del volumen de agua A*ab*B, á fin que no redunde rotacion, está agua se pondrá en movimiento, y despues del primer instante de tiempo irá con la misma velocidad que el cuerpo: será, pues, el movimiento despues de este instante el del cuerpo y el del agua: esto es, $(M+ma^2dx)(v-du)^{\frac{1}{2}}$; que debe ser igual al que tubo el cuerpo al principio del movimiento, que era $Mv^{\frac{1}{2}}$: luego $Mv^{\frac{1}{2}}=(M+ma^2dx)(v-dv)^{\frac{1}{2}}=(M+ma^2dx)\left(v^{\frac{1}{2}}-\frac{dv}{2\sqrt{u}}\right)$: que dá $Mdv=2ma^2vdx$. Supone despues, que sea p una potencia que dirigida segun CO sea capaz de producir el mismo efecto que la fuerza que impele la superficie: de que deduce $Mdv=pdx=2ma^2vdx$, ó $p=2ma^2v$: esto es, la potencia equivalente á la fuerza, ó la misma fuerza igual al duplo peso de una coluna de agua, cuya base es la superficie impelida, y la altura aquella de donde fuera necesario que cayese el cuerpo para que obtubiera la velocidad con que se mueve. Para reducir esta theórica á la nuestra supondremos en la equacion $m.dc.da\left((D+a)^{\frac{1}{2}}sen.\omega+\frac{1}{8}usen.\theta\right)^2$ $sen.\omega=1$, $sen.\theta=1$, y quedará en $m.dc.da\left((D+a)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}u\right)^2$: donde se ve, que solo pueden convenir una con otra haciendo $D+a=0$, ó suponiendo que la diferenciodiferencial chocada coincida con la superficie del fluido, pues en este caso queda la fuerza $=m.dc.da.\frac{1}{64}u^2$: ó

ó substituyendo $v = \frac{1}{64} u^2$, $m.dc.da.v$: cuya expresion es la misma que la de *Eulero*, con sola la diferencia de ser la suya dupla de lo que es esta. Pero en substancia, su theórica no conviene con la nuestra, sino en un caso solamente casi imposible de darse : y aun en él resulta que la fuerza es igual al duplo peso de una coluna de agua, cuya base es la superficie impelida, y la altura aquella de donde fuera necesario que cayese el cuerpo para obtener la velocidad con que se mueve ; cuya disonancia confiesa aun el mismo Autor, considerando que el peso que sufre una superficie no es sino el simple de la misma coluna de agua, como resulta de nuestra theórica. Pero mas notable se hace aun este reparo, si en lugar de $Mdv = pdx$, se coloca $Mdv = \frac{pdx}{32}$, que es la legítima equacion. En los cuerpos graves que caen verticalmente es (*Prop.* 6. *y Cor.* 1. *Prin.* 3. *Lib.* 1.) $dv = \frac{Mudu}{32M}$, suponiedo u la velocidad con que se mueva el cuerpo : y en el caso de que la potencia p mueva á este, es $dx = \frac{Mudu}{p}$. De una y otra equacion resulta $32dv = \frac{pdx}{M}$; ó $Mdv = \frac{pdx}{32}$: que dá $\frac{pdx}{32} = 2ma^2vdx$; ó $p = 64ma^2v$: esto es, la resistencia igual al peso de 64 colunas de agua, cuya base sea la superficie impelida, y la altura aquella de donde fuera necesario que cayese el cuerpo para obtener la velocidad con que se mueve : peso espantoso, y muy distante de lo que nos enseñan los principios del Capítulo antecedente. A mas de esto, el peso del agua que mueve el cuerpo no es ma^2dx ; sino (*Cor.* 1. *Prop.* 5.) el de una coluna, cuya base es la su-

per-

perficie a^2, y la altura aquella que tubiere el fluido hasta su superficie: de suerte que el peso será mayor, quanto mas profunda se halle la superficie en el fluido, y por consiguiente tambien será mayor la resistencia: cuya resulta, tan clarísima, en ninguna manera la deduce el cálculo é igualaciones supuestas. Sin esta consideracion se pudiera quedar convencido de lo mismo: no es necesario para ello sino leer el Escolio al fin de la Proposicion 35. del Libro 2. de la *Philosophia natural del Cavallero Newton*, donde se verá claramente que el cuerpo, aunque solo choque al fluido ma^2dx, este choca al que tiene delante: este al otro que se sigue, y asi sin límite conocido: de suerte, que impele el cuerpo una cantidad de fluido que no se conoce; tan lexos está de impeler solamente al contenido en el espacio a^2dx.

Daniel Bernoulli, bien conocido en la Republica literaria por sus científicas Obras, trahe semejante cálculo, en que del mismo modo concluye, (*a*) que no siendo el fluido elástico, la resistencia será igual á la dupla coluna del propio fluido, cuya base es la superficie impelida, y la altura aquella de donde debe caer para obtener la velocidad con que se mueve; pero añade, que si el fluido fuere elástico, la resistencia será la quádrupla coluna, ó dupla que la primera. Esta resulta se hace conseqüente por la velocidad que les queda á los cuerpos, no solo elásticos, sino perfectamente elásticos, despues de fenecida la máxima impresion. Esta se halló (*Cor.*4. *Prop.*31. *Lib.*1.) para nuestro caso, $= \frac{(M - ma^2dx)u}{M + ma^2dx}$: esto es, $(M - ma^2dx)u =$ $(M + ma^2dx)(u - du)$, ó $Mudu = 2ma^2dxu^2$: donde substituyendo $Mudu = pdx$, queda $p = 2ma^2u^2$; esto

(*a*) *Comentarios de la Academia de Petersbourgo M.M. de Junio y Octubre de 1727.*

esto es, la resistencia dupla de la que se halló no siendo el fluido elástico. No es necesario decir de este cálculo sino que encierra las mismas dificultades y tropiezos que el antecedente, agregandose ademas la suposicion de que sea el fluido perfectamente elástico, sin embargo de no haber de exercer su total elasticidad, sino despues de un tiempo infinito. Lo mas particular de este asunto es, que no habiendo determinado nuestros Autores sino la fuerza que padecian las superficies, no se les ofreciese la imposibilidad de que fuese solamente como una funcion de la velocidad; pues siendo esta cero, tambien debia serlo la fuerza: lo que es contra todos los principios del Capítulo primero, que ellos, y todo el mundo, admiten por certísimos.

El *Cavallero Newton* empieza el exâmen de la qüestion por camino enteramente opuesto. (*a*) En la Seccion 1. dá las resultas ó propiedades que deben seguirse de suponer las resistencias como las simples velocidades: y en el Escolio, al fin de la misma Seccion, dice: *Pero esta resistencia de los cuerpos en la razon de las simples velocidades, es mas hypóthesis mathemática que physica: en los medios destituidos de toda tenacidad, la resistencia que se experimenta en los cuerpos es en razon duplicada de las velocidades. Porque*, sigue el mismo Autor, *por la accion de un cuerpo que se mueve con mayor velocidad, mayor movimiento se le comunica al fluido en la proporcion de la velocidad, y esto en menos tiempo; en igual tiempo por la razon de moverse mayor cantidad de fluido, aumenta el movimiento en razon duplicada de las velocidades: y la resistencia, por ser la fuerza de reaccion, es igual ó proporcional á aquel movimiento.* Este discurso, que es general entre todos los Autores, despues de lo que hemos dicho del *Dr. Wallis*, apoya asimismo nuestro Philosopho, y con él pasa en la Sec. 2.

d

(*a*) *Philosophia naturalis, Lib.* 2.

á deducir las propiedades que deben resultar de suponer las resistencias como los quadrados de las velocidades. Sigue despues en la 3. á exâminar las propiedades que resultaran si la resistencia es parte como las simples, y parte como los quadrados de las velocidades, á fin de consultar despues las experiencias, y ver qual de estas suposiciones verifican. En las Secciones 4. y 5. determina el movimiento que deben tomar los cuerpos que giran en los fluidos que resisten, segun las suposiciones primeras: la densidad y compresion que padecen: y en la *6.* trata del movimiento y resistencia que padecen los péndulos ó perpendículos que giran sobre un punto fixo en virtud de su gravedad. En la ultima Proposicion, que es la 31, demuestra que las diferencias de sus arcos descendentes, á los ascendentes, son como las mismas resistencias; pero para ello supone, que los péndulos oscilen en la cycloide, para que todas sus oscilaciones sean de igual duracion; ó como diximos (*Cor.* 4. *Prop.* 48. *Lib.* 1.), que sean las oscilaciones del péndulo muy cortas, para que los arcos que describen degeneren en cycloides. No dexó el mismo Cavallero de hacer y repetir las experiencias para conocer un principio tan necesario. Todas las expone en el Escolio general que trahe al fin de la Proposicion 31. Para las primeras se valió de un péndulo de $10\frac{1}{2}$ pies Ingleses de largo, compuesto de una bola de madera de $6\frac{7}{8}$ pulgadas de diámetro, que puso en movimiento. La primera Tabla que de ellas nos dá es esta.

Medios arcos descriptos en pulgadas. ------	2	4	8	16	32	64
Diferencias de los arcos.	$\frac{1}{656}$	$\frac{1}{242}$	$\frac{1}{69}$	$\frac{4}{71}$	$\frac{8}{37}$	$\frac{24}{29}$

Los primeros números están en la razon de 1 á 2; luego para que las resistencias sean como los quadrados de las velocidades, segun creyó y dixo en su Escolio, al

al fin de la 1. Seccion, han de estár los segundos en la razon de 1 á 4.

La primera razon es de $\frac{1}{656}$ á $\frac{1}{242}$, ó como 1 á 2 $\frac{172}{242}$.

La segunda de 69 á 242, ó como 1 á 3 $\frac{35}{69}$.

La tercera de 71 á 276, ó como 1 á 3 $\frac{63}{71}$.

La quarta de 37 á 142, ó como 1 á 3 $\frac{31}{37}$.

La quinta de 29 á 111, ó como 1 á 3 $\frac{24}{29}$.

Donde se ve, que todas estas razones son mayores que de 1 á 4 en que están los quadrados de los medios arcos, ú de las velocidades. No obstante repara nuestro respetable Autor, que las últimas en que el péndulo hacía grandes oscilaciones, están muy cerca de ser como dichos quadrados, y por consiguiente, que en estas oscilaciones será la resistencia proxîmamente como los mismos quadrados. Pero no sucede lo propio en las oscilaciones pequeñas: en la primera fue como 1 á 2 $\frac{172}{242}$, y es muy regular que si hubiera hecho experiencias con menores oscilaciones, hubiera hallado en ellas la razon de las resistencias en la de 1 á 2, ó como las simples velocidades, pues quanto menores eran las oscilaciones, mayor halló la razon.

No dieron mejor suceso otra serie de observaciones hechas con el mismo péndulo, y trahe en su Tabla, que es

Medios arcos descriptos en pulgadas. ------	2	4	8	16	32	64
Diferencias de los arcos observadas. ------	$\frac{1}{748}$	$\frac{1}{272}$	$\frac{4}{325}$	$\frac{12}{250}$	$\frac{24}{125}$	$\frac{36}{68}$,

Porque comparadas cada una de estas con su inmediata, resultan las razones de 1 á 2 $\frac{204}{272}$, de 1 á 3 $\frac{113}{325}$, de 1 á 3 $\frac{285}{250}$, de 1 á 4, y de 1 á 2 $\frac{103}{136}$. Es cierto, no obstan-

tante, que hay una exactamente como 1 á 4, que es la razon de los quadrados de las velocidades; pero la siguiente no es sino como 1 á 2 $\frac{103}{136}$, que es mayor, debiendo ser menor segun la disminucion en que las otras van: lo que prueba claramente que la diferencia $\frac{24}{125}$ es demasiado grande, y que cupo en ella alguna equivocacion. Disminuyéndola resultará mayor la razon, y yá no será la de 1 á 4.

Lo que antes adelantamos se verifica en otras dos Tablas que dá de observaciones hechas con una bala de plomo de 2 pulgadas de diámetro en lugar de la de madera.

Primera Tabla.

Medias oscilaciones descriptas en pulgadas.--	1	2	4	8	16	32	64
Diferencias de los arcos observadas. -------	$\frac{1}{1808}$	$\frac{1}{912}$	$\frac{1}{386}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{4}{181}$	$\frac{4}{53}$	$\frac{8}{30}$

Segunda.

Medias oscilaciones descriptas en pulgadas. -	1	2	4	8	16	32	64
Diferencias de los arcos observadas. -------	$\frac{1}{2040}$	$\frac{1}{1036}$	$\frac{1}{420}$	$\frac{1}{159}$	$\frac{1}{51}$	$\frac{8}{121}$	$\frac{6}{35}$

Todas dan las razones mayores que de 1 á 4; pero particularmente las primeras de cada Tabla son de 1 á 1 $\frac{896}{912}$, y de 1 á 1 $\frac{1004}{1036}$, que están bien cerca de ser como las simples velocidades.

Los mismos sucesos resultan de otras experiencias hechas en el agua que tambien añade; pero de qualquiera forma, la resulta no concluye que las resistencias sean como los quadrados de las velocidades: antes bien como las simples velocidades, puesto que las pe-

pequeñas obscilaciones las dan así, y que se deben executar pequeñas, para que se verifique que las oscilaciones circulares degeneren en las de cycloide.

Sea como quiera, estas disparidades, ó la fuerza que al mismo Cavallero hacia su Escolio al fin de la 1. Seccion, le obligan á confesar, que no estaba muy confiado de sus experiencias, y que deseaba se repitiesen. Del mismo modo le hacen que solicite la resistencia, no baxo el principio de que sea como los quadrados, ó como las simples velocidades, sino como una funcion $hu + ku^{\frac{3}{2}} + lu^2$: y resuelve el caso; pero de ello nacen tambien no menos disparidades quando se comparan unas observaciones con otras: de suerte, que de todas estas experiencias nada se puede concluir. En fin, en la Seccion 7. trata de la resistencia que padecen los cuerpos arrojados al traves de un fluido; pero todo lo funda en que dicha resistencia, que aqui llamamos fuerza que padecen las superficies, es como los quadrados de las velocidades: con que es suponer lo mismo que estaba en qüestion, y que se necesitaba especular.

Aun menos seguras resultas se han deducido de las experiencias physicas hechas con pequeñas máchinas ó instrumentos, de que los Libros están llenos: bastará decir, que solo la friccion de las mismas máchinas, ú de los fluidos contra las superficies de los orificios por donde salen, es capaz de producir efectos considerables, y de dexar duda en quantos experimentos de esta naturaleza se hagan, por mas cuidado que en ellos se ponga.

Quan lexos se estaba de llegar al verdadero conocimiento de las fuerzas por los caminos que hasta ahora se han conducido, se hará aun mas evidente quando por nuestra theórica se vea demonstrado, que las resistencias no siguen, ni la ley de las simples velo-

ci-

cidades, ni la de los quadrados, sino que varia segun las circunstancias, y disposicion de las superficies impelidas en los fluidos.

CAPITULO 3.

De las fuerzas con que en el movimiento actuan los fluidos contra superficies planas.

PROPOSICION 18.

Determinar la desnivelacion que resulta en la superficie de un fluido, por la accion ó movimiento de otra, que se mueve dentro de él.

Que sea AB una superficie plana quadrilonga con dos de sus lados horizontales, que se mueva en un fluido igualmente denso, y en reposo: y será (*Prop.* 14. *Lib.*2.) la fuerza que padecerá la diferencio-diferencial KLMN, no suponiendo toda la superficie AB dentro del fluido $= \frac{m.db.da.sen.x}{sen.n}\left(\sqrt{a} \pm \frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2$; ó integrando con respeto á la b, será la fuerza que padece todo el rectángulo diferencial FHIG = ---- $\frac{mb.da.sen.x}{sen.n}\left(\sqrt{a} \pm \frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2$. Supóngase ahora representada por la AH la misma superficie, vista de canto, siendo CD la superficie del fluido; y tendremos que para un punto como E, en que la superficie se aparta ó húye del fluido, será $\sqrt{a}\ \ \frac{1}{8}u\,sen.\theta = o$, aun antes de ser $a = o$: lo que dá $a = PE = \frac{1}{64}u^2 sen.\theta^2$; por lo que en este punto E la fuerza diferencial ---- $\frac{mb.da.sen.x}{sen.n}\left(\sqrt{a} - \frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2 = o$, y por consiguiente

Fig.51.

Fig.59.

ya no la choca ó comprime el fluido, como tampoco á ninguno de los puntos mas arriba de E: con que debe formarse en el espacio CPE la cavidad CEP. Por el contrario, en la parte DF que la superficie impele al fluido, se forma la elevacion DFP, pues igualando $\sqrt{a}+\frac{1}{8}u\,sen.\theta$ á cero, resulta $\sqrt{a}=-\frac{1}{8}u\,sen.\theta$, cuyo signo negativo manifiesta que el punto á que esto corresponde está á la parte de arriba de P origen de la a. Quadrando la igualacion, dá $a=\frac{1}{64}u^2\,sen.\theta^2$ altura del punto sobre P: y asi con el movimiento de la superficie AH se desnivela el fluido en toda la longitud CD de la superficie.

Corolario.

Para deducir las fuerzas que padecen las diferenciales de las superficies en las desnivelaciones, tendremos que substituir $\sqrt{a}$ negativo en la superficie que impele al fluido, y positivo en la que se aparta de él: será, pues, la fuerza que padece una diferencial en la desnivelacion, tanto en una superficie, como en otra $=\frac{mb.da.sen.x}{sen.n}\left(a-\frac{1}{4}u\,sen.\theta\sqrt{a}+\frac{1}{64}u^2\,sen.\theta^2\right)$, ó quando fuese el fluido el que se mueva, será $=\frac{mb.da.sen.x}{sen.n}\left(a\,sen.\omega^2-\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}u\,sen.\omega\,sen.\theta+\frac{1}{64}u^2\,sen.\theta^2\right)$.

Escolio.

Estas desnivelaciones son las que se notan diariamente en los cuerpos que se mueven en los fluidos. En la parte que estos están impelidos horizontalmente se ve una entumescencia ó elevacion, y en la parte opuesta un hoyo ó cavidad. Las alturas verticales de estas desnivelaciones son las que antes hemos deter- mi-

minado ; pero no se pretende que todo el hueco carezca enteramente de presion , ni toda la igual entumescencia quede completa , porque por los lados de la superficie se introduce ó escapa el fluido , corriendo en direccion perpendicular al movimiento de la misma , y ocupa ó desocupa parte del hueco ó elevacion que hemos deducido. Estas cantidades se hacen notables siempre que se haya de determinar la justa ó absoluta fuerza que padecen las superficies , porque el aumento ó disminucion de efecto en la desnivelacion corresponde igualmente á todos los puntos de la superficie que están sumergidos en el fluido , y aunque sea cantidad insensible en la parte , es considerable en el todo, ó en la suma total. En efecto, por lo que corresponde á solo la parte desnivelada , es corta la diferencia , quando los cuerpos tienen mucha profundidad dentro del fluido , y se mueven con no muy crecidas velocidades : pues , como se verá en adelante , aun la accion de todo el hueco ó elevacion se hace despreciable en estos casos , mayormente quando los angulos θ y $\varkappa$ son muy agudos.

PROPOSICION 19.

El hueco CEP, y la elevacion DFP son iguales y semejantes : y las curvas CE, DF que terminan el fluido son ambas parábolas del primer género , cuyo parámetro es $64 sen.\omega^2$: y sus exes las verticales CB, DB, distantes del punto P la cantidad $CP = PD = u sen.\theta$.

Supóngase CB ó DB la abcisa , y BI la ordenada : y que la superficie AH pase en un tiempo determinado de CB á AH , ú de AH á DB. Todos los puntos ó partículas del fluido , como I , puestos en la superficie de la curva, habrán andado en el mismo tiempo su ordenada correspondiente , que (*Prop.* 16.) será proporcional á la velocidad que tubiere la partícula ,

 ó

Corolario

la expresion [illegible] aplicada al hueco que forma el fluido en la superficie que haya de él, no puede expresar la fuerza que padece una diferencial de superficie en este hueco, pues por el mismo hecho de suponer un hueco, no hai allí fluido que impela; lo que puede expresar esta formula, es la impulsion que recibiera la superficie si no hubiera hueco, y dexa de recibir por haberlo. en quanto a la desnivelacion en la superficie impelente, me parece que su efecto debe ser menor que lo que expresa nuestra formula, pues procede esta de lo establecido anteriormente quando el fluido es continuado y puede comunicarse el movimiento fluidamente, pero en la parte desnivelada siendo la amplitud horizontal del fluido de corta extension, la resistencia de este no puede ser tanta como si hubiera mas extension. lo que viene a ser lo mismo que se acaba de advertir sobre la pag. 18.

ó $= 8 sen.\omega \sqrt{CB}$, ó $8 sen.\omega.\sqrt{DB}$ Llamando, pues, CB ó DB $= x$, y BI $= y$, tendremos $8 sen.\omega \sqrt{x} = y$, ó $64 x sen.\omega^2 = y^2$, equacion á la parábola, cuyo parámetro es $64 sen.\omega^2$, y los exes CB, DB distantes de P la cantidad $CP = 8 sen.\omega \sqrt{PE.} = 8 sen.\omega \sqrt{\frac{u^2 sen.\theta^2}{64 sen.\omega^2}} = u sen.\theta$.

Escolio 1.

Para mayor facilidad é inteligencia llamaremos *superficie impelente* á la que impele el fluido, ó á la que este choca si fuere este el que se mueve: y *superficie impelida* á la que se aparta ó huye del fluido.

Escolio 2.

Como las fuerzas en una direccion qualquiera $\frac{m.db.da sen.x}{sen.n}\left((D+a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \frac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$ se reducen á las horizontales $m.dc.da\left((D+a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \frac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$ solo con substituir en aquellas dc en lugar de $\frac{db.sen.x}{sen.n}$, y al contrario; bastará, para mayor facilidad, hallar por ahora las fuerzas horizontales, que se reducirán despues á las otras, poniendo en ellas $\frac{db.sen.x}{sen.n}$ en lugar de dc, ó $\frac{b sen.x}{sen.n}$ en lugar de c, respecto de ser constante la cantidad $\frac{sen.x}{sen.n}$ á causa de tratarse por ahora solo de superficies planas.

PRO-

PROPOSICION 20.

Hallar la fuerza horizontal que padece una superficie plana y quadrilonga, que se mueve en un fluido inmovil con dos de sus lados paralelos al horizonte, en caso de ser $D = 0$, y estar el extremo superior de la superficie fuera del fluido de una cantidad igual ó mayor que $\frac{1}{64}u^2 sen.\theta^2$.

La fuerza horizontal que padece la diferencio-diferencial KLMN de la misma superficie es (*Cor.* 4. *Lem.* 1.) $= m.dc.da\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u sen.\theta\right)^2$. Su integral respecto de la c, $mc.da\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u sen.\theta\right)^2$ es la que padece el espacio diferencial FHIG: y el integral de esta cantidad con respeto á la a, $mc\left(\frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u sen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right)$ es la fuerza horizontal que padece toda la superficie, sin faltarle mas que completar el integral. Llamando, pues, H la cantidad que complete el integral, será la fuerza horizontal que padece toda la superficie $= mc\left(\frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u sen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right) + H$. Para hallar el valor de H considerese que, no atendiendo á la desnivelacion del fluido, y haciendo $a = 0$, todo el integral se ha de desvanecer: luego en este caso $H = 0$. Lo mismo habia de suceder en la superficie impelente sino tubiera parte fuera del fluido; pero suponemos que lo está, y es preciso que en ella haga fuerza la desnivelacion. Debemos, pues, añadir esta cantidad en la superficie impelente, y substraherla en la superficie impelida. Para hallarla nos puede servir el integral, colocando (*Corolar. Propos.* 14.) $a^{\frac{1}{2}}$ negativo para ambas superficies, lo que lo reduce á-----

Fig. 51.

mc

$mc\left(\frac{1}{2}a^2 - a^{\frac{3}{2}}u\,sen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right) - H$. Substituyendo ahora por a el valor de toda la altura de la desnivelacion $= \frac{1}{64}u^2 sen.\theta^2$, será la fuerza que procede de la desnivelacion $H = mc\left(\frac{u^4 sen.\theta^4}{2.64^2} - \frac{u^4 sen.\theta^4}{6.8.64} + \frac{u^4 sen.\theta^4}{64^2}\right) = \frac{mcu^4 sen.\theta^4}{6.64^2}$: y la total que padecerá la superficie $= mc\left(\frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,sen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2 \pm \frac{u^4 sen.\theta^4}{6.64^2}\right)$.

Corolario.

Como la altura de la desnivelacion es $= \frac{1}{64}u^2 sen.\theta^2$, si esta cantidad fuere despreciable, respecto de la a, altura total de la superficie sumergida en el fluido, se podrá despreciar la desnivelacion, ó todos los terminos de la fuerza, como $\frac{u^4 sen.\theta^4}{6.64^2}$ en que no se halla la a.

PROPOSICION 21.

Hallar la misma fuerza que padece la superficie impelente quando esta tubiere menor altura fuera del fluido que la que adquiere la desnivelacion.

Si el punto extremo A de la superficie cae entre Fig. 59. P y F, el fluido pasará por encima de la superficie, y no actuará sobre esta, sino en aquella efectiva porcion que la misma superficie tendrá fuera del fluido, que por suposicion es menor que $\frac{1}{64}u^2 sen.\theta^2$, altura total de la desnivelacion. Supóngase que sea n la altura efectiva que tenga la superficie fuera del fluido. Substitúyase en lugar de a en la fuerza que procede de la desnivelacion $mc\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,sen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right)$, y resultará

tará esta $= mc\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}u\,sen.\theta + \frac{1}{64}nu^2 sen.\theta^2\right)$: con que la fuerza total que padecerá la superficie, será $= mc\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,sen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right) +$ $mc\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}u\,sen.\theta + \frac{1}{64}nu^2 sen.\theta^2\right)$.

PROPOSICION 22.

Hallar la misma fuerza que padece la superficie quando fuere el fluido el que se moviere.

En este caso no podemos excluir de la fórmula el valor de ω. La fuerza que padece la diferencio-diferencial es $m.dc.da\left(a^{\frac{1}{2}}sen.\omega \pm \frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2$, y su integral $mc\left(\frac{1}{2}a^2 sen.\omega^2 \pm \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,sen.\omega\,sen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right)$ la que padece toda la superficie sin comprehender la que resulta de toda la desnivelacion. Para esta es el integral $mc\left(\frac{1}{2}a^2 sen.\omega^2 - \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,se.\omega\,sen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right)$, que substituyendo n por a en la superficie impelente, dá la fuerza que procede de la desnivelacion $=$ $mc\left(\frac{1}{2}n^2 sen.\omega^2 - \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}u\,sen.\omega\,sen.\theta + \frac{1}{64}nu^2 sen.\theta^2\right)$: y por la que padece toda la superficie impelente $=$ $mc\left(\frac{1}{2}a^2 sen.\omega^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,sen.\omega\,sen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right) +$ $mc\left(\frac{1}{2}n^2 sen.\omega^2 - \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}u\,sen.\omega\,sen.\theta + \frac{1}{64}nu^2 sen.\theta^2\right)$. Para la impelida se debe substituir $a\,sen.\omega^2 = \frac{1}{64}u^2 sen.\theta^2$: con que la fuerza que padecerá, será $=$ $mc\left(\frac{1}{2}a^2 sen.\omega^2 - \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,se.\omega\,sen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2 - \frac{u^4 sen.\theta^4}{6.64^4}\right)$:

Co-

Corolario 1.

Si el extremo superior de la superficie coincidiere con la superficie del fluido: esto es, si cayere el punto A sobre P, será $n = 0$, y la fuerza total en la superficie impelente, se reducirá á -------

$$mc\left(\tfrac{1}{2}a^2 sen.\omega^2 + \tfrac{1}{6}a^{\frac{3}{2}} u sen.\omega sen.\theta + \tfrac{1}{64} a u^2 sen.\theta^2\right).$$

Corolario 2.

Al contrario, si el extremo A de la superficie estubiere elevado sobre el fluido de igual ó mayor cantidad que $\frac{u^2 sen.\theta^2}{64 sen.\omega^2}$, será $n = \frac{u^2 sen.\theta^2}{64 sen.\omega^2}$: y la fuerza total en la superficie impelente se reducirá á

$$mc\left(\tfrac{1}{2}a^2 sen.\omega^2 + \tfrac{1}{6}a^{\frac{3}{2}} u sen.\omega sen.\theta + \tfrac{1}{64} a u^2 sen.\theta + \frac{u^4 sen.\theta^4}{6.64^2}\right).$$

Escolio.

En el integral $mc\left(\tfrac{1}{2}a^2 se.\omega^2 + \tfrac{1}{6}a^{\frac{3}{2}} u se.\omega se.\theta + \tfrac{1}{64} a u^2 sen.\theta\right)$ $+ mc\left(\tfrac{1}{2}n^2 sen.\omega^2 - \tfrac{1}{6}n^{\frac{3}{2}} u sen.\omega sen.\theta + \tfrac{1}{64} n u^2 sen.\theta^2\right)$ se hace notable el caso en que cayga el punto H en P, ó que sea $a = 0$: esto es, que la superficie no esté sumergida cosa alguna en el fluido: pues el integral se reduce á $mc\left(\tfrac{1}{2}n^2 sen.\omega^2 - \tfrac{1}{6}n^{\frac{3}{2}} u sen.\omega sen.\theta + \tfrac{1}{64} n u^2 sen.\theta^2\right)$, que es el valor de la fuerza que padeciera la parte elevada PF; pero como la superficie no hace presa en el fluido, tampoco actua sobre él, ni puede elevarle: luego para este caso debe desvanecerse la cantidad restante, sin embargo de no deducirse de la fórmula. PRO-

PROPOSICION 23.

misma observacion que sobre la prop. 22.

Hallar la fuerza horizontal que padece la superficie impelida, ó que huye del fluido, en caso de que el extremo superior A cayga entre P y E; ó que tenga algun valor la D menor que PE $= \frac{u^2 \mathrm{sen.}\theta^2}{64 \mathrm{sen.}\omega^2}$.

Como el fluido no llega sino á E, haciendo PE $= D + a$, y substituyendo en el integral $\frac{u^2 \mathrm{sen.}\theta^2}{64 \mathrm{sen.}\omega^2}$ en lugar de $D + a$, ha de resultar aquel igual á cero. El integral de la diferencial (*Proposicion* 16.) es

$$mc\left(Da\,\mathrm{sen.}\omega^2 + \tfrac{1}{2}a^2\,\mathrm{sen.}\omega^2 - \tfrac{1}{6}u(D+a)^{\frac{3}{2}}\mathrm{sen.}\omega\,\mathrm{sen.}\theta + \tfrac{1}{64}au^2\,\mathrm{se.}\theta^2\right) + H.$$

Substituyendo en él $\frac{u^2 \mathrm{sen.}\theta^2}{64 \mathrm{sen.}\omega^2} = D + a$, ó $a = \frac{u^2 \mathrm{sen.}\theta^2}{64 \mathrm{sen.}\omega^2} - D$, se reduce á $mc\left(-\tfrac{1}{2}D^2\,\mathrm{se.}\omega^2 - \tfrac{1}{64}Du^2\,\mathrm{se.}\theta^2 + \frac{u^4\,\mathrm{sen.}\theta^4}{6.64^2\,\mathrm{sen.}\omega^2}\right) + H = 0$: que dá $H = mc\left(\tfrac{1}{2}D^2\,\mathrm{se.}\omega^2 + \tfrac{1}{64}Du^2\,\mathrm{se.}\theta^2 - \frac{u^4\,\mathrm{se.}\theta^4}{6.64^2\,\mathrm{se.}\omega^2}\right)$: y el integral completo

$$= mc\left(\tfrac{1}{2}(D+a)^2\,\mathrm{se.}\omega^2 - \tfrac{1}{6}u(D+a)^{\frac{3}{2}}\mathrm{se.}\omega\,\mathrm{se.}\theta + \tfrac{1}{64}u^2(D+a)\,\mathrm{se.}\theta^2 - \frac{u^4\,\mathrm{sen.}\theta^4}{6.64^2\,\mathrm{se.}\omega^2}\right)$$

Corolario 1.

Si fuere $D = 0$, ó el extremo superior A de la superficie cayere en P, ó mas arriba de P, se reducirá la fuerza ó integral completo á --------

$$mc\left(\tfrac{1}{2}a^2\,\mathrm{sen.}\omega^2 - \tfrac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,\mathrm{sen.}\omega\,\mathrm{sen.}\theta + \tfrac{1}{64}au^2\,\mathrm{se.}\theta^2 - \frac{u^4\,\mathrm{sen.}\theta^4}{6.64^2\,\mathrm{se.}\omega^2}\right).$$

Corolario 2.

Si al contrario cayere el extremo superior A de

la superficie en E, será $D = \frac{u^2 sen.\theta^2}{64 sen.\omega^2}$: lo que dá para completar el integral $a = o$, y el integral completo $= mc\left(Da sen.\omega^2 - \frac{1}{2}a^2 sen.\omega^2 - \frac{1}{6}u\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}au^2 se.\theta^2\right)$.

Escolio.

Si el punto H, ó extremo inferior de la superficie, cayere en E, el integral ó fuerza que padece la superficie impelida debe desvanecerse, como en efecto se desvanece; pero no es lo propio si cae entre E y P, ó en P: en este caso es $D = o$, $a = o$, y la fuerza ó integral completo se reduce á $-\frac{mcu^4 sen.\theta^4}{6.64^2 sen.\omega^2}$, quando debe igualmente desvanecerse, puesto que no alcanza á impeler el fluido la superficie quando tenga menos parte sumergida en él que la cantidad PE. Esta resulta procede de que, despues de asignarse la fuerza que padece toda la superficie, despreciando la desnivelacion, se substrahe la fuerza con que el fluido dexa de actuar en el hueco CEP. En efecto debe ser asi, quando el punto H está mas baxo que el punto E, ó quando está sobre el mismo punto E; pero quando estubiere mas alto ya no es lo propio, porque se substragera aun mas de lo que sería la fuerza sin atender á la desnivelacion. La fuerza de la superficie impelida debe, pues, ser cero, siempre que el punto H llegue á E, ó que esté mas alto; y la expresion que se dió en la Proposicion solo sirve para quando cayga desde E hacia abaxo, ó que sea $(D+a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega =$, ó $> \frac{u sen.\theta}{8 sen.\omega}$.



PROPOSICION 24.

Hallar la fuerza horizontal que padecen las mismas

mas superficies quando tenga algun valor la D, ó que el extremo A esté sumergido en el fluido.

En este caso debe resultar el integral cero quando sea $a = o$, puesto que no actua el fluido sino hasta el extremo superior de la superficie, en que es $a = o$. La fuerza que padece la diferencio-diferencial es (*Propos.* 16.) $mdc.da\left((D+a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \frac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$, y su integral $=$

$$mc\left(Da sen.\omega^2 + \tfrac{1}{2}a^2 sen.\omega^2 \pm \tfrac{1}{6}u(D+a)^{\frac{3}{2}} se.\omega se.\theta + \tfrac{1}{64}au^2 se.\theta^2\right) + H,$$

la que padece toda la superficie, denotando H la cantidad que ha de completar el integral. Substitúyase $a = o$, y quedará $= \pm \frac{1}{6}uD^{\frac{3}{2}} sen.\omega sen.\theta + H = o$, que dá $H = \mp \frac{1}{6}uD^{\frac{3}{2}} sen.\omega\, sen.\theta$: y la fuerza que padece toda la superficie $=$ -----------------

$$mc\left(Da se.\omega^2 + \tfrac{1}{2}a^2 se.\omega^2 \pm \tfrac{1}{6}u\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) se.\omega se.\theta + \tfrac{1}{64}au^2 se.\theta^2\right)$$

Corolario.

Si fuere $D = o$: esto es, si cayere el extremo superior de la superficie en P, quedará la fuerza que padecerá la impelente $=$ ---------------

$mc\left(\frac{1}{2}a^2 sen.\omega^2 + \frac{1}{6}ua^{\frac{3}{2}} sen.\omega sen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right)$, como se halló (*Cor.* 1. *Prop.* 22.).

PROPOSICION 25.

Reducir las fuerzas horizontales halladas á las que padece una superficie plana en una direccion qualquiera.

Ya se dixo (*Esc.* 2. *Prop.* 19.) que para esto no es menester sino substituir $\frac{b sen.x}{sen.n}$ en lugar de c. Hecho así, se tendrán las siguientes fuerzas. La que padecerá

en esta propⁿ no se atiende al efecto de la desnivelacion.

cerán las superficies impelente ó impelida en el caso de estar enteramente sumergidas en el fluido, $=$

$$\frac{mbsen.x}{sen.n}\left(Dase.\omega^2 + \tfrac{1}{2}a^2se.\omega^2 \pm \tfrac{1}{6}u\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right)se.\omega se.\theta + \tfrac{1}{64}au^2se.\theta^2\right)$$

La que padecerá la superficie impelente quando su extremo superior esté elevado sobre la superficie del fluido de la cantidad $\frac{n}{sen.\omega^2}$ menor que $\frac{1}{64}u^2sen.\theta^2$, $=$

$$\frac{mbsen.x}{sen.n}\left(\tfrac{1}{2}a^2sen.\omega^2 + \tfrac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}usen.\omega sen.\theta + \tfrac{1}{64}au^2sen.\theta^2\right) +$$
$$\frac{mbnsen.x}{sen.n}\left(\tfrac{1}{2}nsen.\omega^2 - \tfrac{1}{6}n^{\frac{1}{2}}usen.\omega sen.\theta + \tfrac{1}{64}u^2sen.\theta^2\right)$$: ó

siendo n igual, ó mayor que $\frac{1}{64}u^2sen.\theta^2$, $=$

$$\frac{mbsen.x}{sen.n}\left(\tfrac{1}{2}a^2sen.\omega^2 + \tfrac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}usen.\omega sen.\theta + \tfrac{1}{64}au^2sen.\theta^2 + \frac{u^4sen.\theta^4}{6.64^2sen.\omega^2}\right).$$

La que padece la superficie impelida quando su extremo superior está mas baxo que la superficie del fluido, siendo $D < \frac{u^2sen.\theta^2}{64sen.\omega^2}$, $=$

$$\frac{mbsen.x}{sen.n}\left(\tfrac{1}{2}(D+a)^2se.\omega^2 - \tfrac{1}{6}u(D+a)^{\frac{3}{2}}se.\omega se.\theta + \tfrac{1}{64}u^2(D+a)se.\theta^2 - \frac{u^4sen.\theta^4}{6.64^2se.\omega^2}\right)$$

La que padece qualquiera de las dos superficies impelente ó impelida, siendo $D = o$, y despreciandose la desnivelacion, $=$

$$\frac{mbsen.x}{sen.n}\left(\tfrac{1}{2}a^2sen.\omega^2 \pm \tfrac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}usen.\omega sen.\theta + \tfrac{1}{64}au^2sen.\theta^2\right).$$

PROPOSICION 26.

Reducir las expresiones antecedentes á funciones de e y de.

Siendo, por construccion y suposicion, $Cof.n : sen.n = de : da$, será $da = \frac{sen.nde}{Cof.n}$, y $a = \frac{esen.n}{Cof.n}$, por ser en este caso constante $\frac{sen.n}{Cof.n}$. Substituyendo este valor

lor de a en las fórmulas precedentes, se reducen á

$$\frac{mbse.x}{Cos.n}\left(Dese.\omega^2+\frac{e^2se.nse.\omega^2}{2.\,Cos.n}\pm\frac{use.\omega se.\theta Cos.n}{6sen.n}\left(\left(D+\frac{ese.n}{Cos.n}\right)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{eu^2se.\theta^2}{64}\right)$$

$=$ á la fuerza que padecieran las superficies impelente ó impelida, en el caso de estar enteramente sumergidas en el fluido, y á mayor cantidad que $\frac{u^2sen.\theta^2}{64sen.\omega^2}$.

$$\frac{mbsen.x}{Cos.n}\left(\frac{e^2seu.\omega^2sen.n}{2Cos.n}+\frac{usen.\omega sen.\theta Cos.n}{6sen.n}\left(\frac{esen.n}{Cos.n}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{64}eu^2se.\theta^2\right)+$$
$$\frac{mbsen.x}{sen.n}\left(\tfrac{1}{2}n^2sen.\omega^2-\tfrac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}usen.\omega sen.\theta+\tfrac{1}{64}nu^2sen.\theta^2\right)=$$ á

la fuerza que padecerá la superficie impelente, quando su extremo superior esté elevado sobre la superficie del fluido de la cantidad $\frac{[illegible]}{sen.\omega^2}$. n.

$$\frac{mbse.x}{Cos.n}\left(Desen.\omega^2+\frac{e^2se.\omega^2se.n}{2Cos.n}-\frac{use.\omega se.\theta Cos.n}{6sen.n}\left(D+\frac{ese.n}{Cos.n}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{64}eu^2se.\theta^2\right)$$
$$+\frac{mbsen.x}{sen.n}\left(\tfrac{1}{2}D^2sen.\omega^2+\tfrac{1}{64}Du^2sen.\theta^2-\frac{u^4sen.\theta^4}{6.64^2sen.\omega^2}\right)=$$

á la fuerza que padecerá la superficie impelida, quando sea $D<\frac{u^2sen.\theta^2}{64sen.\omega^2}$.

$$\frac{mbse.x}{Cos.n}\left(\frac{e^2se.\omega^2sen.n}{2Cos.n}\pm\frac{use.\omega se.\theta Cos.n}{6sen.n}\left(\frac{ese.n}{Cos.n}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{64}eu^2sen.\theta^2\right)=$$

á la que padecerá qualquiera de las dos superficies, siendo $D=0$, y despreciandose la desnivelacion.

PROPOSICION 27.

Reducir al caso al de hallarse la superficie plana horizontal.

En este caso es $sen.n=0$, y $Cos.n=1$; pero antes de substituir estos valores en las fórmulas, es preciso re-

reducir $\left(D + \frac{e sen.n}{Cos.n}\right)$ á la serie $D^{\frac{3}{2}} + \frac{\frac{3}{2} D e sen.n}{Cos.n} + \frac{\frac{3}{8} e^2 sen.n^2}{D^{\frac{1}{2}} Cos.n^2}$ —&, y substituir asimismo este valor.

La primera fórmula se reduce á ----------

$mbe sen.x\,\left(D sen.\omega^2 \pm \frac{1}{4} D^{\frac{1}{2}} u se.\omega\, sen.\theta + \frac{1}{64} u^2 sen.\theta^2\right) =$

$mbe sen.x\,\left(D^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \frac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$. La segunda no tiene lugar, porque en este caso no puede estar parte de la superficie fuera del fluido; ó ha de estar toda dentro, ó toda fuera de él: y lo mismo sucede á la tercera. La quarta se reduce á la primera, que por consiguiente es la unica.

PROPOSICION 28.

Hallar la fuerza vertical que padecerá la misma superficie plana, baxo las condiciones supuestas.

Este caso se resuelve por el general dado (*Proposicion* 25.) solo con substituir $sen.x = Cos.n$, que es el efectivo valor que resulta de $sen.x$. Serán, pues,

$$\frac{mbCos.n}{sen.n}\left(D a se.\omega^2 + \frac{1}{2} a^2 se.\omega^2 \pm \frac{1}{6} u se.\omega\, se.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64} a u^2 se.\theta^2\right)$$

la fuerza que padecerán las superficies, impelente ó impelida, en el caso de estar enteramente sumergidas en el fluido.

$$\frac{mbCos.n}{sen.n}\left(D a sen.\omega^2 + \frac{1}{2} a^2 sen.\omega^2 + \frac{1}{6} u sen.\omega\, sen.\theta\,(D+a)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{64}\, a u^2 sen.\theta^2\right) +$$

$$\frac{mbCos.n}{sen.n}\left(\frac{1}{2} n^2 sen.\omega^2 - \frac{1}{6} u n^{\frac{3}{2}} sen.\omega\, sen.\theta + \frac{1}{64} n u^2 sen.\theta^2\right)$$ la que padecerá la superficie impelente, quando su extremo superior esté elevado sobre la superficie del fluido de la cantidad $\frac{n^4}{sen.\omega^4}$.

mb

$\frac{mbCof.n}{fen.n}\left(Dafe.\omega^2+a^2fe.\omega^2-\frac{1}{6}ufe.\omega fen.\theta(D+a)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{64}au^2fe.\theta^2\right)+$
$\frac{mbCof.n}{fen.n}\left(\frac{1}{2}D^2fen.\omega^2+\frac{1}{64}Du^2fen.\theta^2-\frac{u^4fen.\theta^4}{6.64^2fen.\omega^2}\right)$ la que padecerá la superficie impelida, quando sea D $<\frac{u^2fen.\theta^2}{64fen.\omega^2}$.

$\frac{mbCof.n}{fen.n}\left(\frac{1}{2}a^2fen.\omega^2\pm\frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}ufen.\omega fen.\theta+\frac{1}{64}au^2fen.\theta^2\right)$ la que padecerá qualquiera de las dos superficies, siendo D $=$ o, y despreciando la desnivelacion.

PROPOSICION 29.

Hallar las mismas expresiones en funciones de *e*.

Substitúyase (*Prop.* 26.) $a=\frac{efen.n}{Cof.n}$, y se tendrá

$mb\left(Defe.\omega^2+\frac{e^2f.\omega^2f.n}{2Cof.n}+\frac{uf.\omega f.\theta Cof.n}{6.fen.n}\left(\left(D+\frac{efe.u}{Cof.n}\right)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{1}{64}eu^2f.\theta^2\right)$

fuerza que padecerán las superficies, impelente ó impelida, en caso de estár enteramente sumergidas en el fluido, y á mayor cantidad que $\frac{u^2fen.\theta^2}{64fen.\omega^2}$.

$mb\left(\frac{e^2fe.\omega^2fe.n}{2Cof.n}+\frac{ufe.\omega fe.\theta fe.n}{6fen.n}\left(\frac{efen.n}{Cof.n}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{64}eu^2fe.\theta^2\right)+$
$\frac{mbCof.n}{fen.n}\left(\frac{1}{2}n^2fe.\omega^2-\frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}ufe.\omega fe.\theta+\frac{1}{64}nu^2fen.\theta^2\right)$, fuerza que padecerá la superficie impelente, quando su extremo superior esté mas alto que la superficie del fluido de la cantidad $\frac{u^2fen.\theta^2}{64fen.\omega^2}$.

$mb\left(Defe.\omega^2+\frac{e^2fe.\omega^2fen}{2Cof.n}-\frac{ufe.\omega fe.\theta Cof.n}{6Cof.n}\left(D+\frac{efe.n}{Cof.n}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{64}eu^2fe.\theta^2\right)+$
$\frac{mbCof.n}{fen.n}\left(\frac{1}{2}Dfe.\omega^2+\frac{1}{64}Du^2fe.\theta-\frac{u^4fen.\theta^4}{6.64^2fen.\omega^2}\right)$, fuerza que

que padecerá la superficie impelida, quando sea $D < \frac{u^2 sen.\theta^2}{64 sen.\omega^2}$.

$$mb\left(\frac{e^2 se.\omega^2 se.n}{2Cos.n} \pm \frac{u se.\omega se.\theta Cos.n}{6 sen.n}\left(\frac{e sen.n}{Cos.n}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{64} e u^2 se.\theta^2\right)$$

fuerza que padecerá qualquiera de las dos superficies, siendo $D = 0$, y despreciandose la desnivelacion.

Corolario 1.

Si se hallare la superficie horizontal, será (*Proposicion* 27.) la fuerza vertical que padecerá $= mbeCos.n\left(D^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \frac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$; pero en este caso es $Cos.n = 1$: luego la fuerza vertical será $= mbe\left(D^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \frac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$.

Corolario 2.

Si á mas de estas condiciones fuere la superficie la que se moviere verticalmente, serán $sen.\omega = 1$, $sen.\theta = 1$, y la fuerza vertical, que padecerá, se reducirá á $mbe(\sqrt{D} \pm \frac{1}{8}u)^2$: y si la velocidad u fuere la que toma el fluido, cayendo de la altura D, será (*Cor. Prop. 9. Lib.* 1.) $u = 8\sqrt{D}$, ó $\frac{1}{8}u = \sqrt{D}$, lo que reduce la fuerza que padeciera la superficie á $mbe(\sqrt{D} \pm \sqrt{D})^2$: esto es, la que padeciera la superficie impelente $= 4mbeD$, ó igual al peso de 4 colunas del fluido, cuya base es *be*, y D la altura, que es la que tubiera el fluido encima de la superficie impelente. La que padecerá la superficie impelida será $= 0$: lo que se hace bien notorio con solo reflexionar que el fluido no puede en este caso alcanzar á impeler la superficie.

Co-

Corolario 3.

Si fuere el fluido el que se moviere verticalmente quedando la superficie en reposo, y siendo, como antes, $sen. n = 0$, será $sen. \theta = 1$, y $sen. \omega = 0$: con que se reducirá la fuerza vertical que padecerá la superficie á $\frac{1}{64} mbeu^2$: y si la velocidad u fuere la que toma el fluido cayendo de la altura D, será, como antes, $\frac{1}{8}u = \sqrt{D}$, ó $\frac{1}{64}u^2 = D$, lo que reduce la fuerza á $mbeD$, igual al peso de la simple coluna del fluido, cuya base es be, y su altura D. Si cayere, pues, el fluido verticalmente, por la accion de su propia gavedad, de qualquiera altura D, y chocare una superficie horizontal be, la fuerza que padecerá esta, será igual al peso de la coluna del mismo fluido que estubiere encima de la superficie chocada.

Corolario 4.

La fuerza diferencio-diferencial - - - - - - - - - $m.db.de\left((D+a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \frac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$ nos hace conocer, que si fuere constante la cantidad $D+a$: esto es, si la superficie plana estubiere horizontal siempre, tendremos su fuerza vertical total, é integral $=$ - - $mbe\left((D+a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \frac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$.

Escolio 1.

Aqui se ve claramente quan distinto es que se mueva la superficie, ó que se mueva el fluido: en el primer caso, la fuerza que padece la superficie es $4mbeD$, y en el segundo, solo $mbeD$: aquella quatro veces mayor que esta. Sin embargo, no conozco Autor

que no haya supuesto hasta ahora que es lo mismo lo uno que lo otro: ó que no haya supuesto que siempre suporta el propio peso la superficie.

Escolio 2.

El *Cavallero Newton* en sus Corolarios 7, 8, 9 y 10 de la Propos. 36, Seccion 7 del Libro 2 de su *Philosophia natural*, dice: que una pequeña superficie horizontal, como la que suponemos *dbde*, ó *be*, quando el fluido cae libremente por la accion de su propia gravedad, sufre solamente un peso igual á la mitad de la columna del fluido, cuya base es *be*, y la altura D; lo que no és sino la mitad de lo que hemos deducido. Fig. 60. Supone para ello, que si ACDBA es un vaso constantemente lleno de un fluido, y que tenga el agugero EF en su fondo, el fluido no correrá sino en el espacio AMEFNB, que llama *cataratá*, formando las dos superficies curvas AME, BNF, y quedando el fluido sin movimiento, ó como un cuerpo duro, en los espacios CAE y DBF. Supone despues, que se ponga en medio del agugero EF la superficie PQ, y dice, que quedará sobre ella el espacio del fluido PHQ, del mismo modo sin movimiento, á causa de formarse los otros dos lados HQ, HP convexôs, y de dividirse el fluido como si fuera en dos cataratas. Dice mas, y es, que el peso que sufrirá la superficie PQ, será solo el del espacio PHQ, porque supone que todo el fluido contenido en AMEPH, y HQFNB corre con toda libertad, y sin actuar sobre las superficies HP, HQ. Dexamos al juicio del Lector la consideracion de como es posible que el fluido cayga con velocidad conocida sobre la superficie HP sin forzarla. Esto sería contra todos los principios, y aun contra los dados por el mismo Docto Autor. Segun los nuestros, la fuerza vertical que padecerá una diferencio-diferencial de la pro-

propia superficie HP, es $m.db.de\left((D+a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega + \frac{1}{8}u sen.\theta\right)^{2}$; ó por ser $sen.\omega = 0$, y $\frac{1}{8}u = a^{\frac{1}{2}}$ será $= m.db.de.a sen.\theta^{2}$. Donde se ve que, aun en el caso de suponerse todo lo que supone el Docto Autor, no solo sufre la superficie PQ el peso del fluido PHQ, sino tambien $m\int db.de.a sen.\theta^{2}$, en cuya expresion θ denota el ángulo que formare la vertical con la curva HP, y a la altura del fluido sobre el orificio: de suerte, que suponiendo θ constante, este peso es el de la coluna del fluido, cuya base es PQ, multiplicado por $sen.\theta^{2}$.

CAPITULO 4.

De la fuerza con que en el movimiento actuan los fluidos contra qualesquiera superficies.

PROPOSICION 30.

Hallar la fuerza horizontal que padece una superficie qualquiera que se mueve en un fluido.

Divídase la superficie en pequeñas quadrículas sensiblemente planas, por planos horizontales y verticales. Hállese la fuerza positiva ó negativa que cada una padeciere, y sumandolas, se tendrá la fuerza total. Que sea D la altura vertical que hubiere desde la superficie del fluido hasta el canto alto de una quadrícula, y a la que tubiere esta misma. Con esto $mcda\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u sen.\theta\right)^{2}$ será (*Proposicion* 20.) la fuerza horizontal que padece una diferencial de la misma quadrícula. El integral - - - - - - - - - - - - -
$$mc\left(Da + \frac{1}{2}a^{2} \pm \frac{1}{6}u\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) sen.\theta + \frac{1}{64}au^{2} sen.\theta^{2}\right)$$

Kk 2 será

si segun lo observado en la propon 33, es la equacion diferencial $mcda(D+a \pm \frac{1}{64}a^{2} sen\theta)$ será la integral = $mc(Da + \frac{1}{2}a^{2} \pm \frac{1}{64}au^{2} sen\theta)$ é si D representa la altura vertical hasta el centro de la quadricula es la integral = $mc(Da \pm \frac{1}{64}au^{2} sen\theta)$ y la fuerza que padece la superficie total = $m\int c(Da \pm \frac{1}{64}au^{2} sen\theta)$

será la fuerza que padece toda ella, denotando a toda la altura vertical: ó substituyendo $D-\frac{1}{2}a$ por D, á fin que D denote la altura vertical desde la superficie del fluido hasta el centro de la quadrícula, será la fuerza horizontal que padece esta $=$ ---------

$$mc\left(Da \pm \tfrac{1}{6}u\left((D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) sen.\theta + \tfrac{1}{64}au^2 se.\theta^2\right):$$

y la que padece toda la superficie entera $=$ ----

$$msc\left(Da \pm \tfrac{1}{6}u\left((D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) sen.\theta + \tfrac{1}{64}au^2 se.\theta^2\right).$$

Corolario 1.

La fuerza en una y otra desnivelacion del fluido, será (*Corolario Proposicion* 18.) $=$ -----

$$msc\left(Da \pm \tfrac{1}{6}u\left((D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) sen.\theta + \tfrac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right).$$

Corolario 2.

Reduciendo $(D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}$ á serie, es esta cantidad $= \frac{3}{2}D^{\frac{1}{2}}a\left(1-\frac{a^2}{96D^2}-\frac{a^4}{2048D^4}-\&c.\right)$: luego tambien será la fuerza horizontal que padecerá una quadrícula $=$ -----------------------

$$mc\left(Da \pm \tfrac{1}{4}D^{\frac{1}{2}}au\,sen.\theta\left(1-\frac{a^2}{96D^2}-\frac{a^4}{2048D^4}-\&\right)+\tfrac{1}{64}u^2 a\,sen.\theta^2\right).$$

Corolario 3.

Si fuere D muy grande respecto de a, ó se tratare a como una diferencial respecto de D, se pueden despreciar todos los terminos de la serie, excepto el primero, y quedará la fuerza que padecerá qualquiera quadrícula de las impelentes ó impelidas $=$ ----

mc

$mc\left(Da \pm \frac{1}{4}D^{\frac{1}{2}}ausen.\theta + \frac{1}{64}u^2asen.\theta^2\right) = mca\left(D^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}usen.\theta\right)^2.$

Corolario 4.

El caso en que puede ser mayor la relacion $\frac{a}{D}$ es, quando las quadrículas son de las contiguas á la superficie del fluido. Como D expresa la altura vertical desde la superficie del fluido hasta el centro de la quadrícula, será $D = \frac{1}{2}a$. Substituyendo este valor en la serie, se reduce á $1 - \frac{1}{24} - \frac{1}{128} - \&$: donde se ve que, aun en este caso extremo, se hacen casi despreciables todos los terminos de la serie, excepto el primero.

Corolario 5.

Como en este caso extremo de ser $D = \frac{1}{2}a$, es $(D + \frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$, será en él la fuerza que padece la quadrícula $= mc\left(\frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}usen.\theta + \frac{1}{64}au^2sen.\theta^2\right)$.

Corolario 6.

Será, pues, tambien en este caso la serie $\frac{3}{2}D^{\frac{1}{2}}a\left(1 - \frac{a^2}{96D^2} - \frac{a^4}{2048D^4} - \&\right) = \frac{3}{2}a\sqrt{\frac{1}{2}a}\left(1 - \frac{1}{24} - \frac{1}{128} - \&\right) = a^{\frac{3}{2}}$: que dá $\left(1 - \frac{1}{24} - \frac{1}{128} - \right) = \frac{2}{3}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{8}{9}}$: donde se ve lo poco que se aparta la serie de reducirse al primer termino, aun en este caso extremo.

Corolario 7.

No obstante, siendo a una diferencial respecto de

de D, siempre se reduce la serie al primer termino, aun en las quadriculas contiguas.

PROPOSICION 31.

Hallar la fuerza horizontal que padecerá la superficie de un cuerpo formado por la revolucion de una línea, recta ó curva, al rededor de un exe horizontal, moviendose aquel en un fluido segun este propio exe, y paralelamente al horizonte.

Fig. 61. Sea ACG una curva que, girando sobre el exe horizontal AM, forme el cuerpo ADSM, y que este se mueva en la direccion ó exe AM, conservándose siempre este paralelo al horizonte. Tírense los dos planos horizontales infinitamente cercanos STOPV, XYQNZ, y los dos verticales BGOQW, MCPN que formarán el quadrilátero diferencio-diferencial QOPN, del qual se levantará la perpendicular QE, y tirará la QB, que será igual á la ordenada $BG = y$. Tírense, asimismo, la vertical QI, y la horizontal QF paralela al exe: con lo que esta formará un ángulo con el quadrilátero QOPN igual al complemento de FQR, siendo QR la prolongacion de EQ; pero BEQ es igual á FQR: luego el ángulo que forma la direccion QF del movimiento con el quadrilátero diferencio-diferencial QOPN es igual al complemento de BEQ, ó igual al ángulo EQB, cuyo seno se mide por la razon de la subperpendicular BE á la perpendicular EQ: será, pues, este seno $sen.\theta = \frac{BE}{EQ}$: y como en qualquiera curva, la subperpendicular es á la perpendicular, como la diferencial de la ordenada á la diferencial de la curva, será tambien, llamando $AB = x$, $BG = BQ = y$, $BI = c$, y $IQ = a$, $sen.\theta = \frac{dy}{\sqrt{dy^2 + dx^2}}$: y $BQ = y = \sqrt{c^2 + a^2}$: lo

que,

que, suponiendo a constante, dá $dc = \frac{ydy}{\sqrt{y^2 - a^2}}$. Puestos estos valores en la expresion de la fuerza horizontal $mdcda\left(\sqrt{D+a} \pm \frac{1}{8}u sen.\theta\right)^2$, tendremos por la fuerza horizontal, y segun el exe que padece el quadrilátero diferencio-diferencial QOPN de qualquiera curva ó recta $\frac{mdaydy}{\sqrt{y^2-a^2}}\left(\sqrt{D+a} \pm \frac{udy}{8\sqrt{dy^2+dx^2}}\right)^2$: ó integrando respecto de la y, será la fuerza que padece una zona como VOQZ $= mda(D+a)\int\frac{ydy}{\sqrt{y^2-a^2}} \pm \frac{1}{4}muda\sqrt{D+a}\int\frac{ydy^2}{\sqrt{y^2-a^2}\sqrt{dy^2+dx^2}} + \frac{1}{64}mu^2da\int\frac{ydy^3}{\sqrt{y^2-a^2}(dy^2+dx^2)}$: y volviendo á integrar respecto de la a, será la fuerza que padece una superficie como AGQZA $=$

$$m\int da(D+a)\int\frac{ydy}{\sqrt{y^2-a^2}} \pm \frac{1}{4}mu\int da\sqrt{D+a}\int\frac{ydy^2}{\sqrt{y^2-a^2}\sqrt{dy^2+dx^2}} + \frac{1}{64}mu^2\int da\int\frac{ydy^3}{\sqrt{y^2-a^2}(dy^2+dx^2)} + H.$$

Corolario.

Si se supone $x = o$, se reduce la superficie á un plano circular, que se mueve horizontal y perpendicularmente á su superficie: la fuerza que este padecerá, será pues $m\int da(\sqrt{D+a} \pm \frac{1}{8}u)^2\int\frac{ydy}{\sqrt{y^2-a^2}} + H = m\int da(\sqrt{D+a} \pm \frac{1}{8}u)^2\sqrt{y^2-a^2} + H$: ó substituyendo r por y, y por el radio de cuya rotacion resultó el plano circular, será la fuerza que este padecerá $= m\int da(\sqrt{D+a} \pm \frac{1}{8}u)^2 \sqrt{r^2-a^2} + H$.

PRO-

PROPOSICION 32.

Hallar la fuerza horizontal que padecerá la superficie de un cylindro que flota y se mueve horizontalmente en direccion perpendicular á su exe.

Fig. 62. Que sea BCQDE el cylindro, H su exe, BE un diámetro horizontal, GI la superficie del fluido, y CAL vertical. La resistencia que padece la diferencial horizontal en C, es (*Corolario* 3. *Proposicion* 30.) $= mca\left(D^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2$, en cuya fórmula debemos substituir da por a, $D = CA = a$, y $sen.\theta =$ al seno de LCH, que llamando $AL = f$, será $sen.\theta = \frac{\sqrt{R^2-(a+f)^2}}{R}$, expresando R el radio del cylindro: hecha, pues, la substitucion, resulta la fuerza que padece la diferencial $= mcda\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u\sqrt{R^2-(a+f)^2}}{8R}\right)^2$: y la que padece toda la superficie GCQ = $mc\int da\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u\sqrt{R^2-(a+f)^2}}{8R}\right)^2$.

PROPOSICION 33.

Hallar la fuerza vertical que padece una superficie qualquiera, moviendose esta en un fluido inmovil.

Divídase la superficie del cuerpo, que estubiese dentro del fluído, en pequeñas quadrículas sensiblemente planas, por líneas horizontales y verticales. Hállese la fuerza vertical, positiva ó negativa, que cada una de estas padeciere, y sumando se tendrá la fuerza total. Esta práctica se tiene ya explicada (*Prop.* 30.) para hallar la fuerza horizontal: y respecto que esta

esta se reduce á otra en una direccion qualquiera, solo subtituyendo (*Esc.*2. *Prop.*19.) $\frac{b.sen.x}{sen.n}$ en lugar de c: y como en este caso, en que se hace el movimiento vertical, es (*Prop.*28.) $sen.x = Cos.n$, será $\frac{b.Cos.n}{sen.n}$ lo que debamos substituir en la fórmula (*Propos.* 30.) en lugar de c, para hallar la fuerza vertical que padece una superficie qualquiera: será, pues, esta $=$

$$m\int\frac{bCos.n}{sen.n}\left(Da \pm \tfrac{1}{6}u\left((D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right)sen.\theta + \tfrac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right)$$

Corolario.

Del mismo modo (*Co.*2. *Pro.*30.) será la fuerza vertical que padece una quadrícula impelente ó impelida, $=$

$$\frac{mbCos.n}{sen.n}\left(Da \pm \tfrac{1}{4}D^{\frac{1}{2}}ausen.\theta\left(1-\frac{a^2}{96D^2}-\frac{a^4}{2048D^4}-\&c\right)+\tfrac{1}{64}u^2 ase.\theta^2\right);$$

ó por ser (*Propos.* 26.) $\frac{aCos.n}{sen.n} = e$, substituyendo este valor, será asimismo dicha fuerza vertical $=$

$$mbe\left(D \pm \tfrac{1}{4}D^{\frac{1}{2}}use.\theta\left(1-\frac{e^2 sen.n^2}{96D^2Cos.n^2}-\frac{e^4 sen.n^4}{2048D^4Cos.n^4}-\&c\right)+\tfrac{1}{64}u^2 sen.\theta^2\right):$$

ú despreciando por cortos todos los terminos de la serie, excepto el primero, será asimismo $=$ $mbe\left(D^{\frac{1}{2}} \pm \tfrac{1}{8}usen.\theta\right)^2$.

PROPOSICION 34.

Hallar la fuerza vertical que padecerá la superficie de un cylindro que flota y se mueve horizontalmente en direccion perpendicular á su exe.

La fuerza horizontal que padece una diferencial horizontal del cylindro en C, se halló (*Prop.* 32.) $=$

$mcda\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}{8R}\right)^2$, expresando R el radio del cylindo, a = CA altura desde la diferencial á la superficie del fluído, y AL = f: luego será la vertical (*Pro.* 33.) $= \frac{mdbdaCof.n}{fen.n}\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}{8R}\right)^2$, ó substituyendo el valor de $\frac{Cof.n}{fen.n} = \frac{CL}{LH} = \frac{a\pm f}{\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}$ quedará la fuerza vertical que padecerá la superficie GCQ

$= mb\int \frac{da(a\pm f)}{\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}{8R}\right)^2$: y toda la

$GQI = 2mb\left(\int \frac{(a\pm f)ada}{\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}} + \int (a\pm f)u^2 da \frac{\sqrt{R-(a\pm f)^2}}{64R^2}\right)$.

CAPITULO 5.

De las resistencias horizontales que padecen los cuerpos quando estos se mueven en los fluidos: ó al contrario, quando estos se mueven contra los cuerpos.

PROPOSICION 35.

HAllar la resistencia horizontal que padece un cuerpo movido en un fluido.

Las resistencias que padecen los cuerpos movidos en los fluidos, se reducen á la resulta de las fuerzas que padecen las superficies segun una determinada direccion: ó á la suma de todas las fuerzas segun esta propia direccion, tomando positivas las que lo fueren, y negativas las que tambien lo fueren. Deduzcanse, pues, por las reglas del Capítulo precedente

las

las fuerzas horizontales que padecen las superficies que terminan el cuerpo, y sumadas, se tendrá la resistencia.

PROPOSICION 36.

Hallar la resistencia horizontal que padece un paralelepípedo rectángulo que flota sobre un fluido con dos de sus lados paralelos al horizonte, moviendose el paralelepípedo, y no el fluido en direccion paralela á otros dos lados, en caso de ser $a >$, ó $= \frac{u^2 sen.\theta^2}{64 sen.\omega^2}$.

La fuerza que padece la superficie impelente es (*Proposicion* 21.) $= \left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u sen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right) +$ $mc\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}u sen.\theta + \frac{1}{64}nu^2 sen.\theta^2\right)$. La que padece la impelida, por ser $sen.\omega = 1$, es (*Cor.2. Prop.23.*) $=$ $mc\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u sen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2 - \frac{u^4 sen.\theta^4}{6.64^2}\right)$. La que padecen las dos superficies laterales es cero, porque siendo paralelas á la direccion del movimiento es $c = 0$: y la que padece la base ó superficie inferior es tambien cero, por ser en ella $da = 0$. No se experimentan, pues, mas fuerzas, segun la direccion, que las de las dos superficies impelente ó impelida. Esta ultima es negativa, por actuar en direccion contraria á la primera: con que la resistencia que padecerá el paralelepípedo será = - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$mc\left(\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u sen.\theta + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}u sen.\theta + \frac{1}{64}nu^2 sen.\theta^2 + \frac{u^4 sen.\theta^4}{6.64^2}\right)$$

Corolario 1.

Si el paralelepípedo tubiere bastante altura fuera del fluido, de suerte que no le pase este por encima,

ó que dicha altura sea mayor ó igual á $\frac{u^2 sen.\theta^2}{64}$, será entonces $n = \frac{u sen.\theta^2}{64}$, y la resistencia se reducirá á

$$mc\left(\tfrac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}usen.\theta + \frac{u^4 sen.\theta^4}{3.64^2}\right) = \tfrac{2}{3}mcusen.\theta\left(a^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3 sen.\theta^3}{64^2}\right).$$

Corolario 2.

Si al contrario no tubiere altura alguna sobre el fluido, sino que la superficie superior esté de nivel con la del fluido, será $n = o$, y la resistencia se reducirá

$$á\, mc\left(\tfrac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}usen.\theta + \frac{u^4 sen.\theta^4}{6.64^2}\right) = \tfrac{2}{3}mcusen.\theta\left(a^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3 sen.\theta^3}{2.64^2}\right).$$

Corolario 3.

Despreciandose la desnivelacion del fluido, se han de substraher todos los terminos donde no se halle la a (*Cor. Prop.* 20.): luego la resistencia que padecerá el paralelepípedo, despreciandose la desnivelacion del fluido, será $= \tfrac{2}{3}mca^{\frac{3}{2}}usen.\theta$.

Corolario 4.

Para despreciarse la desnivelacion del fluido, no es menester sino que la altura a que tiene el paralelepípedo dentro del fluido sea muy grande respecto de $\tfrac{1}{64}u^2 sen.\theta^2$. Siendo, pues, el paralelepípedo muy grande ó profundo, respecto de la velocidad $usen.\theta$, se podrá despreciar la desnivelacion, y quedará la funcion que expresa la resistencia en una sola cantidad, que será como las simples velocidades u.

Es-

Escolio.

En esta theórica hemos sentado, que la fuerza con que actua el fluido contra una diferencio-diferencial de superficie es proporcional á $(8\sqrt{a \pm u sen. \theta})^2$, y el principio que nos conduxo fuè, haber deducido que la velocidad con que saliera el fluido por la misma diferencio-diferencial, si tubiera libre pasage, fuera $8\sqrt{a \pm u sen. \theta}$. No obstante lo sólido de este fundamento, puede ofrecerse el reparo de que quizas sería igualmente sólido suponer, que el peso que debe sufrir la diferencio-diferencial, no ha de ser sino el de la coluna del fluido incumbente, que es $a \pm \frac{1}{64} u^2 sen. \theta^2$, siendo $\frac{1}{64} u^2 sen. \theta^2$ la altura de la entumescencia ó cavidad. Si asi se supone, el peso que suportará la diferencial de la superficie impelente ó impelida del paralelepípedo será $mcda (a \pm \frac{1}{64} u^2 sen. \theta^2)$, cuyo integral $mc(\frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{64} u^2 a sen. \theta^2 + H)$, ó ---------- $mc\left(\frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{64} u^2 a sen. \theta^2 + \frac{u^4 sen. \theta^4}{2.64}\right)$, pues resulta $H = \frac{u^4 sen. \theta^4}{2.64}$ haciendo $a = \mp \frac{1}{64} u^2 sen. \theta^2$, será el peso total que suportará qualquiera de las dos superficies impelente ó impelida del paralelepípedo, y la resistencia que de ambos resulta, $= \frac{1}{32} mcau^2 sen. \theta^2$, cuya cantidad, como se verá despues en el Capítulo 7, debe reducirse á la mitad $\frac{1}{64} mcau^2 sen. \theta^2$ quando el paralelepípedo es solo un plano. Esta determinacion, que tanto se conforma con la opinion general, y lo que es mas con las experiencias que nos dá *M. Mariotte* en el tercer discurso de la parte segunda de su Tratado del movimiento de las aguas, pudiera muy bien equiponderar, ó quizas inducirnos á suprimir nuestra theórica; pero el cúmulo de experiencias que la acreditan,

no

no solo de la especie de las que practicó *M. Mariotte*, sino de quantas he podido averiguar, como se verá en el discurso del tratado, la han acreditado á la mayor justificacion. Pondremos solo por ahora las que absolutamente revocan las de *M. Mariotte*. Este Autor, en la regla 5 del discurso citado, trahe dos experiencias que hizo, exponiendo perpendicularmente á la corriente del Rio de la *Sena* una tabla de medio pie en quadro, valiendose de un instrumento que expone. Dice, que con la corriente de $3\frac{1}{4}$ pies por segundo, sostubo la tabla el peso de $3\frac{3}{4}$ libras. La tabla reducida á medida Inglesa es de $\frac{16^2}{4.15^2}$, y la corriente de $\frac{52}{15}$ pies. Para comparar estas experiencias con la fórmula $\frac{1}{64}mcau^2 fen.\theta^2$, tenemos $m = 1000$ onzas, que es el peso de un pie cubico de agua, $ca = \frac{1}{4}.\frac{16^2}{15^2}$, $fen.\theta = 1$, y $u = \frac{52}{15}$. Será, pues, segun la fórmula, el peso que debia soportar la tabla $= \frac{1}{64}.1000.\frac{16^2}{4.15^2}.\frac{52^2}{15^2} = \frac{21632}{405} = 53\frac{1}{2}$ onzas, ó 3 libras $5\frac{1}{2}$ onzas solo $6\frac{1}{2}$ onzas menos que lo que dice halló *M. Mariotte*. En la segunda experiencia dice, que sostubo la tabla 9 onzas con la corriente de $1\frac{1}{4}$ pies por segundo: con que será segun la fórmula el peso $= \frac{1}{64}.1000.\frac{16^2}{4.15^2}.\frac{16}{9} = 8$ onzas, solo 1 onza menos de lo que expone el Autor, cuyas diferencias no se pueden tener por sensibles en materias de esta calidad. Pero vease quanto se apartan estas experiencias, que el mismo Autor tiene por tan exâctas, de las que yo practiqué para certificarme. Una tabla quadrilonga de un pie de ancho, expuesta perpendicularmente á una corriente de 2 pies por segundo, suportó

$15\frac{1}{2}$ libras estando sumergida un pie justo en el fluido. Segun la opinion general debió suportar $\frac{1}{64}\cdot 1000\cdot 4 = 62\frac{1}{2}$ onzas, ó 3 libras $14\frac{1}{2}$ onzas, cantidad bien distante de la que dió la experiencia. La misma tabla suportó $26\frac{1}{4}$ libras en una corriente de $\frac{4}{3}$ pies por segundo, estando sumergida de 2 pies justos. En la opinion general debió suportar $\frac{1}{64}\cdot 1000\cdot 2\cdot\frac{16}{9} = 56$ onzas, ó $3\frac{1}{2}$ libras, cantidad extremamente distante de lo que dió la experiencia. Lo mas notable, y que absolutamente debe revocar la opinion general es que, segun esta, el segundo peso debió ser menor que el primero, y fue tan al contrario como que se halló de $10\frac{3}{4}$ libras mayor, que es el triple del peso total $3\frac{1}{2}$ libras que se cree debió suportar. Al contrario, nuestra fórmula es (*Cor.* 1. *Pro.* 36.) $\frac{1}{3}mcu\,sen\theta\left(a^{\frac{3}{2}}+\frac{u^3\,sen.\theta^3}{64.64}\right)$, que por ser las velocidades cortas, y $sen.\theta = 1$, se reduce á $\frac{1}{3}mca^{\frac{3}{2}}u$: ó por lo que se expondrá (*Cor.* 5. *Prop.* 52.) á la mitad $\frac{1}{6}mca^{\frac{3}{2}}u$. Será, pues, el peso que debió suportar la tabla en la primera experiencia $= \frac{1}{6}\cdot 1000\cdot 2 = 333$ onzas, ú de $20\frac{1}{2}$ libras, solo 5 libras mayor de lo que dió la experiencia, cuya diferencia debe resultar asi por lo expuesto (*Esc. Pro.* 18.). En la segunda experiencia el peso que debió suportar la tabla habia de ser $= \frac{1}{6}\cdot 1000\cdot (2)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{4}{3} = 628$ onzas, ú de $39\frac{1}{4}$ libras, 13 libras mayor que lo que dió la experiencia, cuyo exceso debe ser asi como se tiene expresado. Para que se vea la conformidad de estas experiencias con la theórica que hemos dado, no hay sino exâminar la razon $2 : (2)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{4}{3} = 15 : 28$ en que deben estar, segun ella, los dos pesos suportados, pues

se

se aparta muy poco de la de los pesos $15\frac{1}{2} : 26\frac{1}{4}$. En la opinion general esta razon debiera ser la de 4 á $\frac{2.16}{9} = 9 : 8$ en que están los productos de las superficies chocadas por los quadrados de las velocidades: razon excesivamente distante de la experimentada $15\frac{1}{2} : 26\frac{1}{4}$, pues como se dixo debiera de ser de mayor igualdad, quando no fue sino de menor. Las dos experiencias dan, con corta diferencia, la medida absoluta de la resistencia menor de un tercio de lo que resulta por la theórica, como se ha visto, y como lo debiamos esperar segun el *Esc. Prop.* 18: de esta suerte para obtener la justa ó absoluta medida de ella, debemos tomar los dos tercios de lo que resulte por la theórica.

PROPOSICION 37.

Hallar la resistencia horizontal que padecerá el mismo paralelepípedo rectángulo moviendose con las mismas condiciones, caso de ser $a =$, ó $< \frac{u^2 sen.\theta^2}{64}$.

En este caso ya se dixo (*Esc. Prop.* 23.) que no padece fuerza alguna la superficie posterior: con que se reducirá la resistencia á la fuerza que padeciere la superficie anterior $= mc\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u sen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right) +$

$$mc\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}u sen.\theta + \frac{1}{64}nu^2 sen.\theta^2\right).$$

Corolario 1.

Si el paralelepípedo tubiere bastante altura fuera del fluido, de suerte que no le pase este por encima, ó que sea dicha altura mayor ó igual á $\frac{u^2 sen.\theta^2}{64}$, será en-

entonces $n = \frac{1}{64}u^2 sen\theta^2$, y la resistencia se reducirá á $mc\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}} usen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2 + \frac{u^4 sen.\theta^4}{6.64^2}\right)$.

Corolario 2.

Si al contrario no tubiere altura alguna sobre el fluido será $n = 0$, y la resistencia se reducirá á $mc\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}} usen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right)$, la misma que resulta despreciandose la desnivelacion del fluido.

PROPOSICION 38.

Hallar la resistencia horizontal que padecerá el mismo paralelepípedo rectángulo, moviendose con las mismas condiciones, y en caso de estar enteramente sumergido en el fluido, siendo $D < \frac{u^2 sen.\theta^2}{64}$, y $D + a =$, ó $> \frac{u^2 sen.\theta^2}{64}$.

La fuerza que padecerá la superficie impelente, será (*Pr.*24.) $= mc\left(Da + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}usen.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}au^2 se.\theta^2\right)$: y la que padecerá la impelida (*Propos.* 23.) $= mc\left(\frac{1}{2}(D+a)^2 - \frac{1}{6}usen.\theta(D+a)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{64}u^2 sen.\theta^2(D+a) - \frac{u^4 sen.\theta^4}{6.64^2}\right)$. Substrayendo esta de aquella, y despejando, queda la resistencia $= \frac{1}{3}mcusen.\theta(D+a)^{\frac{3}{2}}$ ——— $mc\left(\frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{6}D^{\frac{3}{2}} usen.\theta + \frac{1}{64}Du^2 sen.\theta^2 - \frac{u^4 sen.\theta^4}{6.64^2}\right)$.

Corolario.

Si fuere $D = 0$, se reducirá la resistencia, como se dixo (*Cor.*2. *Prop.*36.) á $\frac{1}{3}musen.\theta\left(a^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3 sen.\theta^3}{2.64^2}\right)$.

PROPOSICION 39.

Hallar la resistencia horizontal que padecerá el mismo paralelepípedo rectángulo moviendose con las mismas condiciones, en caso de estar enteramente sumergido en el fluido, ó ser $D < \frac{u^2 sen.\theta^2}{64}$, y $D + a =$, ó $< \frac{1}{64} u^2 sen.\theta^2$.

En este caso no padece fuerza alguna la superficie posterior (*Esc. Prop.* 23.), y la resistencia se reduce á la fuerza que padece la superficie anterior $=$ (*Pro.* 24) $mc\left(Da + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}u sen.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64} a u^2 sen.\theta^2\right)$.

Corolario.

Si fuere $D = 0$, y por consiguiente $n = 0$, se reducirá la resistencia á $mc\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}} u sen.\theta + \frac{1}{64} a u^2 se.\theta^2\right)$: la misma que resulta despreciandose la desnivelacion del fluido.

PROPOSICION 40.

Hallar la resistencia horizontal que padecerá el mismo paralelepípedo rectángulo, moviendose con las propias condiciones, y en caso de estar enteramente sumergido en el fluido, siendo $D =$, ó $> \frac{1}{64} u^2 sen.\theta^2$.

La fuerza que padecerá la superficie impelente será (*Pr.* 24) $= mc\left(Da + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}u se.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64} a u^2 se.\theta^2\right)$: y la que padece la impelida $=$ - - - - - - - - - - - - $mc\left(Da + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}u sen.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64} a u^2 sen.\theta^2\right)$.

Subs-

Substrayendo esta de aquella, y despejando, queda la resistencia $= \frac{2}{3} mcu sen.\theta \left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}} \right)$.

Corolario 1.

Reduciendo $(D+a)^{\frac{3}{2}}$ á serie, será tambien esta resistencia $= \frac{2}{3} mc D^{\frac{1}{2}} au sen.\theta \left(1 + \frac{a}{4D} - \frac{a^2}{24D^2} + \&c \right)$.

Corolario 2.

Si fuere D muy grande respecto de a: esto es, si estubiere el paralelepípedo á una profundidad muy grande, de suerte que su altura a sea muy chica, respecto de la profundidad D, pueden despreciarse todos los terminos de la serie, excepto el primero, y quedará la resistencia $= \frac{2}{3} mc D^{\frac{1}{2}} au sen.\theta$.

Corolario 3.

Como para completar el integral, tanto de la fuerza que padece la superficie impelente, como la impelida, en caso de estar enteramente sumergidas en el fluido, y ser $D =$, ó $> \frac{1}{64} u^2 sen.\theta^2$, se ha de suponer $a = 0$, se pueden sumar ó restar primero las fuerzas de las diferenciales, y hallar su resistencia, que integrada despues por medio de suponer $a = 0$, dará la resistencia que padece el paralelepípedo. La fuerza que padece la diferencial impelente es (*Proposicion* 16.) despues de integrar respecto de la c, $= mcda \left((D+a)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} u sen.\theta \right)^2$, y la que padece la impelida $= mcda \left((D+a)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} u sen. \right)^2$: restando esta de aquella

lla queda la resistencia procedente de estas dos diferenciales $=\frac{1}{2}mcda.usen.\theta(D+a)^{\frac{1}{2}}$; ó integrando será la resistencia que padezca el paralelepípedo $=$ - - $\frac{1}{3}mcusen.\theta(D+a)^{\frac{3}{2}}+H$. Suponiendo ahora $a=0$, queda $\frac{1}{3}mcD^{\frac{3}{2}}usen.\theta+H=0$, que dá $H=+\frac{1}{3}mcD^{\frac{3}{2}}usen.\theta$: con que el integral completo ó resistencia que padecerá el paralelepípedo será $=\frac{1}{3}mcusen.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)$, como antes (*Prop.* 40.).

Corolario 4.

Siempre que para completar los integrales, tanto de las superficies impelentes, como de las impelidas hubieremos de suponer $a=0$, como en el caso de ser $D=$, ó $>\frac{1}{64}u^2sen.\theta^2$; ó lo que es lo mismo si se pudiese despreciar la desnivelacion del fluido por ser $\frac{1}{64}u^2sen.\theta^2$ muy corta respecto de a, se podrá hallar primero la resistencia de las diferenciales, y por ella, integrando, la de todo el cuerpo.

Corolario 5.

Como en ninguna de las expresiones de las resistencias horizontales que padece el paralelepípedo, en los varios casos que se han especulado, no se halla la dimension de la longitud de él, segun la direccion del movimiento, se sigue, que sea dicho paralelepípedo largo ó corto, segun dicha dimension, siempre padecerá la misma resistencia horizontal.

Corolario 6.

Como hecha dicha dimension igual cero, queda el paralelepípedo un plano ó quadrilongo que se mueve

con

con dos de sus lados paralelos al horizonte; se sigue, que todas las expresiones de las resistencias horizontales dadas para el paralelepípedo convienen tambien para este quadrilongo.

PROPOSICION 41.

Hallar la resistencia horizontal que padece un paralelepípedo rectángulo AB que flota sobre un fluido con sus lados AF, KB inclinados al horizonte, moviendose el paralelepípedo, y no el fluido, horizontalmente, y en direccion paralela al lado AB, en caso de ser $a =$, ó $> \frac{1}{64}u^2 sen.\theta^2$, y no pasarle el fluido por encima. Fig. 63.

Sea ED la superficie del fluido, AJ su paralela, CH, EG, FQ verticales, y llamando EG $= a$, será la fuerza que padece la superficie impelente DJ $= mc\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u sen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2 + \frac{u^4 sen.\theta^4}{6.64^2}\right)$: ó llamando Δ al ángulo que forma la base AF con la horizontal AJ, será el seno que forma esta con CJ $= Cof.\Delta$, cuyo valor substituido en la expresion en lugar de $sen.\theta$, la reduce á $mc\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u Cof.\Delta + \frac{1}{64}au^2 Cof.\Delta^2 + \frac{u^4 Cof.\Delta^4}{6.64^2}\right)$. Por igual razon la fuerza que padece la superficie impelida EA es $= mc\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u Cof.\Delta + \frac{1}{64}au^2 Cof.\Delta^2 - \frac{u^4 Cof.\Delta^4}{6.64^2}\right)$: con que la resistencia que procede de estas dos fuerzas será $= \frac{1}{3}mcu Cof.\Delta \left(a^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3 Cof.\Delta^3}{64^2}\right)$. La fuerza que padece JF es $=$ - - - - - - - - - - - - - - - - $mc\left(Da + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}u sen.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right)$: ó llamando e la base AF, será FI $= e sen.\Delta$: con que substituyendo $Cof.\Delta$ por $sen.\theta$, $e sen.\Delta$ por a, y

a por D, será esta fuerza $=$ - - - - - - - - - - - - - - - -

$$mc\left(ae\text{sen}.\Delta+\tfrac{1}{2}e^2\text{se}.\Delta^2+\tfrac{1}{6}u\text{Cos}.\Delta\left((a+e\text{sen}.\Delta)^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}\right)\right)$$

$+\frac{mcu^2e}{64}\text{sen}.\Delta\text{Cos}.\Delta^2$. Por igual razon la que padece la base AF es $=$ - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$mc\left(ae\text{sen}.\Delta+\tfrac{1}{2}e^2\text{sen}.\Delta^2-\tfrac{1}{6}u\text{sen}.\Delta\left((a+e\text{sen}.\Delta)^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}\right)\right)$$

$+\frac{mcu^2e}{64}\text{sen}.\Delta^3$: con que la resistencia que procede de las fuerzas que padecen los dos lados JF, AF será $=$

$$mc\left(\tfrac{1}{6}u(\text{Cos}.\Delta+\text{sen}.\Delta)\left((a+e\text{se}.\Delta)^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{64}u^2e\text{se}.\Delta(\text{Co}.\Delta^2-\text{se}.\Delta^2)\right):$$

y la que padecerá todo el paralelepípedo $=$ - - - -

$$mc\left(\tfrac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u\text{Co}.\Delta+\frac{u^4\text{Cos}.\Delta^4}{3.64^2}+\tfrac{1}{6}u(\text{Cos}.\Delta+\text{se}.\Delta)\left((a+e\text{se}.\Delta)^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}\right)\right)$$

$$+\frac{mcu^2e}{64}\text{sen}.\Delta(\text{Cos}.\Delta^2-\text{sen}.\Delta^2).$$

Corolario 1.

Reduciendo $(a+e\text{sen}.\Delta)^{\frac{3}{2}}$ á serie, y despejando, será tambien la resistencia que padecerá el paralelepípedo $=$

$$mc\left(\tfrac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u\text{Cos}.\Delta+\frac{u^4\text{Cos}.\Delta^4}{3.64^2}+\tfrac{1}{64}u^2e\text{sen}.\Delta(\text{Cos}.\Delta^2-\text{sen}.\Delta^2)\right)+$$

$$\tfrac{1}{4}mca^{\frac{1}{2}}u\text{sen}.\Delta(\text{Cos}.\Delta+\text{sen}.\Delta)\left(1+\frac{e\text{sen}.\Delta}{4a}-\frac{e^2\text{sen}.\Delta^2}{24a^2}+\&\right).$$

Corolario 2.

En caso de despreciarse la desnivelacion se deben quitar (*Corol. Propos.* 20.) todas las cantidades en que no se halle la *a*, ó la *esen.*Δ, que tambien hizo oficio de ella: luego para este caso será la re-

resistencia $= mc\left(\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u\,Cos.\Delta + \frac{1}{64}u^2 e\,sen.\Delta(Cos.\Delta^2 - se.\Delta^2)\right) +$
$\frac{1}{4}mca^{\frac{1}{2}}u\,sen.\Delta(cos.\Delta + sen.\Delta)\left(1 + \frac{e\,sen.\Delta}{4a} - \frac{e^2 sen.\Delta^2}{24a^2} + \&\right).$

Corolario 3.

Si se suponen u y Δ infinitamente chicas, se pueden despreciar todos los términos en que estén elevadas á mayor potestad, y quedará la resistencia $=$ $mc\left(\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u + \frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}ue\,sen.\Delta\right) = mca^{\frac{1}{2}}u\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}e\,sen.\Delta\right).$

PROPOSICION 42.

Hallar la resistencia horizontal que padecerá un cylindro que flota y se mueve horizontalmente en direccion perpendicular á su exe.

La fuerza horizontal que padece la superficie GCQ, ó IDQ del cylindro BQE, se halló (*Prop.* 32.) Fig. 62.
$= mc\int da\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u\sqrt{R^2 - (a \pm f)^2}}{8R}\right)$, expresando R el radio del cylindro, $a = CA$ la altura vertical desde una diferencial horizontal en C, hasta la superficie del fluido GI, y $f = AL$. Restando, pues, la fuerza que padece la superficie impelida IDQ, de la que padece la impelente GCQ, quedará la resistencia que padece el cylindro $= \frac{mcu}{2R}\int a^{\frac{1}{2}}da\sqrt{R^2 - (a \pm f)^2}$.

Escolio.

Puede hallarse por otro méthodo particular la exâcta resistencia que padece una esphera, cylindro, y otros cuerpos formados por la revolucion de un exe ho-

horizontal, segun el qual se supone moverse el cuerpo, quando estan de tal manera sumergidos en el fluido, que a se hace despreciable respecto de D. En este caso, una zona vertical del mismo cuerpo se puede tomar por cda, siendo c toda la circunferencia de la misma zona, y da la diferencial de la ordenada. La fórmula $mcda\left(\sqrt{D+a} \pm \frac{1}{8}u sen.\theta\right)^2$, se reducirá á --- $mcda\left(\sqrt{D} \pm \frac{1}{8}u \frac{da}{\sqrt{da^2+dx^2}}\right)^2$, suponiendo x la abcisa, y la resistencia á $\frac{\frac{1}{2}mcuda^2\sqrt{D}}{\sqrt{da^2+dx^2}}$; ó si suponemos c la semicircunferencia del círculo, cuyo radio es la unidad, tendremos que substituir por c solo, $2ca$, y quedará la resistencia $= \frac{mcuada^2\sqrt{D}}{\sqrt{da^2+dx^2}}$. En la esphera es $\frac{da}{\sqrt{da^2+dx^2}} = -\frac{x}{r}$ siendo r el radio de ella, y $ada = -xdx$: luego $\frac{ada^2}{\sqrt{da^2+dx^2}} = \frac{x^2dx}{r}$, cuyo integral es $\frac{x^3}{3r}$, ó poniendo $x = r$, será la resistencia que padezca toda la esphera $\frac{1}{3}r^2.mcu\sqrt{D}$. En el cylindro $\frac{da}{\sqrt{dx^2+da^2}} = 1$: luego $\frac{ada^2}{\sqrt{dx^2+da^2}} = ada$, cuyo integral es $\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}r^2$, y la resistencia $= \frac{1}{2}r^2mcu\sqrt{D}$: de suerte que la resistencia de la esphera es los $\frac{2}{3}$ de la del cylindro de igual diámetro. Si en lugar de r colocamos $\frac{1}{2}a$, siendo a el diámetro de esphera ó cylindro, serán sus resistencias $\frac{1}{12}a^2mcu\sqrt{D}$, y $\frac{1}{8}a^2mcu\sqrt{D}$.

PRO-

PROPOSICION 43.

Hallar la resistencia horizontal que padece un cuerpo qualquiera, moviendose en un fluido inmóvil.

Divídase la superficie del cuerpo en pequeñas quadrículas, como se dixo (*Prop.* 30.), y hállese la fuerza positiva, ó negativa, que cada una padezca: súmense, y resultará la resistencia que padecerá el cuerpo. O súmese la fuerza que padeciere una quadrícula impelente con la correspondiente impelida, ó que está en la misma direccion, y se tendrá la resistencia que procede de estas dos quadrículas: súmese esta con todas las demas que resultaren de las otras quadrículas, y se tendrá la resistencia total.

Corolario 1.

Si expresare θ el ángulo que formare la direccion horizontal con la quadrícula impelente, y Θ el que formare con la correspondiente impelida, ó que está en la misma direccion, será - - - -

$$mc\left(Da+\tfrac{1}{6}u\,sen.\theta\left((D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{64}u^2a\,sen.\theta^2\right)$$

la fuerza que padecerá la primera, y - - - - - - - -

$$mc\left(Da-\tfrac{1}{6}u\,sen.\Theta\left((D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{64}u^2a\,sen\Theta^2\right)$$

la que padecerá la segunda. Restando esta de aquella queda $\tfrac{1}{6}mcu(sen.\theta+sen.\Theta)\left((D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\tfrac{1}{2}a)\right)+$ - - $\tfrac{1}{64}mcu^2a(sen.\theta^2-sen.\Theta^2)$, que es la resistencia que resulta en el cuerpo, procedente de la accion del fluido en estas dos quadrículas correspondientes, ó que estan en la misma línea horizontal, paralela á la direccion.

Corolario 2.

Tambien será la misma resistencia que padecen qualesquiera dos quadrículas correspondientes $= \pm \frac{1}{4} mcau D^{\frac{1}{2}} (sen.\theta + sen.\Theta)\left(1 - \frac{a^2}{96D^2} - \frac{a^4}{2048D^4} - \right) + \frac{mcau^2}{64}\left(sen.\theta^2 - sen.\Theta^2\right)$.

Corolario 3.

Si fuere D muy grande, respecto de a, se reducirá á $mc\left(\pm \frac{1}{4} D^{\frac{1}{2}} au(sen.\theta + sen.\Theta) + \frac{1}{64} au^2 (sen.\theta^2 - sen.\Theta^2)\right)$.

Corolario 4.

Si la parte anterior del cuerpo fuere igual y semejante á la posterior, tendremos generalmente en las quadrículas correspondientes $\theta = \Theta$, y la resistencia de estas se reducirá á $\frac{1}{3} mcusen.\theta\left((D + \frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right)$: ó á $\frac{1}{2} mcu D^{\frac{1}{2}} asen.\theta\left(1 - \frac{a^2}{96D^2} - \frac{a^2}{2048D^2} - \&c\right)$, que es unicamente como las simples velocidades.

Corolario 5.

Si fuere a muy corta respecto de D, quedará $= \frac{1}{2} mcu D^{\frac{1}{2}} asen.\theta$.

Escolio.

Para hacer atencion á la desnivelacion del fluido se calcularán las fuerzas que padecen las quadrículas an-

anteriores ó impelentes, á las quales alcanza la elevacion ó entumescencia del mismo fluido: y del mismo modo de aquellas que dexan de padecer las quadrículas posteriores ó impelidas, encerradas en el hueco ó cavidad que se forma en la parte posterior, segun se dixo (*Proposic.* 18.). Unas y otras se deben agregar á la resistencia antes determinada: las primeras porque actuan efectivamente contra la direccion del movimiento: y las segundas porque, habiendose substraido en el cálculo antecedente, deben agregarse de nuevo: las primeras son - - - -

$$mc\left(Da - \tfrac{1}{6}u\,sen.\theta\left((D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \tfrac{1}{64}u^2 a\,sen.\theta^2\right),$$

y las segundas $mc\left(Da - \tfrac{1}{6}u\,se.\Theta\left((D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \tfrac{1}{64}u^2 a\,se.\Theta^2\right)$

Corolario 6.

No siendo las desnivelaciones excesivas, se puede suponer que todas las quadrículas que se hallan sobre la misma vertical estan chocadas por el fluido con el propio ángulo θ, suponiendo ser este un medio entre todas. En este caso, reduciendo la expresion de la fuerza que padece una de las quadrículas á - - - - - $mcda\left(a - \tfrac{1}{4}ua^{\frac{1}{2}}sen.\theta + \tfrac{1}{64}u^2 sen.\theta^2\right)$, tendremos el integral $mc\left(\tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{6}ua^{\frac{3}{2}}sen.\theta + \tfrac{1}{64}u^2 a\,sen.\theta^2\right) =$ á la fuerza de todas aquellas que estan sobre la propia vertical: cuya cantidad, substituyendo $a^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{8}u\,sen.\theta$, se reduce á $\frac{mu^4 fc\,sen.\theta^4}{6.(64)^2}$; y por consiguiente la resistencia horizontal que resulta de la desnivelacion será $\frac{mu^4 fc\,sen.\theta^4}{6.(64)^2}$.

Corolario 7.

La resistencia horizontal que procede de la desnivelacion, será pues generalmente en esta suposicion, como la quarta potestad de la velocidad.

Corolario 8.

Será, asimismo en general, la resistencia horizontal que padece qualquiera cuerpo, como tres cantidades: una que es como las simples velocidades, otra como los quadrados de las mismas, y otra como los quadrados-quadrados.

CAPITULO 6.

De las resistencias verticales que padecen los cuerpos quando estos se mueven en los fluidos: ó al contrario, quando estos se mueven contra los cuerpos.

PROPOSICION 44.

HAllar la resistencia vertical que padecerá un paralelepípedo rectángulo quando se halle enteramente sumergido en el fluido, conservando dos lados paralelos al horizonte, y el superior á mayor ó igual profundidad que $\frac{u^2 sen.\theta^2}{64 sen.\omega^2}$.

La fuerza que padecerán los lados verticales es cero, porque en ellos es $cof.n = o$: lo que dá la expresion (*Proposicion* 28.) -----------

mb

$\frac{mbcof.n}{fen.n}\left(Dafe.\omega^2+\frac{1}{2}a^2fe.\omega^2\pm\frac{1}{6}ufe.\omega fe.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D)^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{1}{64}aufe.\theta^2\right)=0.$

La que padecen los dos horizontales es (*Cor.* 1. *Prop.* 29.) $=\pm mbe(D^{\frac{1}{2}}fen.\omega\pm\frac{1}{8}ufen.\theta)^2$ en cuya expresion *be* denota el area de las superficies ó lados, y D la altura vertical que hubiere desde el lado á la superficie del fluido. Como en el paralelepípedo los dos lados horizontales estan á distinta profundidad, debe variar en ellos la D. Que sea la del superior D, y la del inferior $D+a$, denotando *a* la altura del paralelepípedo, y tendremos $mbe\left((D+a)^{\frac{1}{2}}fen.\omega\pm\frac{1}{8}ufen.\theta\right)^2$ por la fuerza que padece el lado inferior: y $mbe\left(D^{\frac{1}{2}}fen.\omega\pm\frac{1}{8}ufen.\theta\right)^2$ por la que padece el superior. Restando una de otra queda $mbe\left(\pm afen.\omega^2+\frac{1}{4}u\left((D+a)^{\frac{1}{2}}+D^{\frac{1}{2}}\right)fen.\omega fen.\theta\right)$ por la resistencia vertical que padecerá el paralelepípedo: + en el caso de moverse este hacia abaxo, y — en el de moverse hacia arriba.

Corolario 1.

Si fuere el paralelepípedo el que se mueva, y no el fluido, será $fen.\omega=1$: y la resistencia se reducirá á $mbe\left(\pm a+\frac{1}{4}u\left((D+a)^{\frac{1}{2}}+D^{\frac{1}{2}}\right)fen.\theta\right)$.

Corolario 2.

Si á mas de esta condicion fuera $a=0$, ó que el paralelepípedo se redugese á un plano horizontal, será la resistencia vertical que este padecerá = - - - $\frac{1}{2}mbeuD^{\frac{1}{2}}fen.\theta$.

Co-

Corolario 3.

Lo mismo sucederá si D fuere muy grande respecto de a, de suerte que pueda despreciarse sin error sensible esta cantidad, como sucede en los cuerpos que caen por el ayre proxîmos á la superficie de la tierra.

Corolario 4.

Si el movimiento fuere vertical, será $sen.\theta = 1$, y esta resistencia se reducirá á $mbe\left(\pm a + \frac{1}{4}u\left((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}}\right)\right)$.

Corolario 5.

Si el movimiento fuere horizontal será $sen.\theta = 0$; y la resistencia vertical será $mbea =$ al peso de un cuerpo de fluido de la misma magnitud que el paralelepípedo.

Corolario 6.

Lo mismo resultará si el paralelepípedo no se moviere, ó fuere $u = 0$: pues se reduce la resistencia, del mismo modo, á $mbea$.

Corolario 7.

La resistencia será cero si haciendose el movimiento hacia arriba, fuere $u = \dfrac{4a\,sen.\omega}{\left((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}}\right)sen.\theta}$: y será negativa si fuere $u < \dfrac{4a\,sen.\omega}{\left((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}}\right)sen.\theta}$; ó siendo el paralelepípedo

el

el que se mueva, y no el fluido, será cero si fuere $u = \frac{4a}{\left((D+a)^{\frac{1}{2}}+D^{\frac{1}{2}}\right) sen.\theta}$, y negativa si fuere --- $u < \frac{4a}{\left((D+a)^{\frac{1}{2}}+D^{\frac{1}{2}}\right) sen.\theta}$.

Corolario 8.

Si fuere el fluido el que se mueva, y no el paralelepípedo, será $sen.\theta = cos.\omega$: y la resistencia vertical se reducirá á $mbe\left(\pm a sen.\omega^2 + \frac{1}{4}u\left((D+a)^{\frac{1}{2}}+D^{\frac{1}{2}}\right) sen.\omega cos.\omega\right)$. Esta expresion no es, sin embargo, legitima, sino quando la velocidad u es igual en ambas superficies superior é inferior.

Corolario 9.

Como este caso pide que el paralelepípedo esté enteramente sumergido en el fluido, no se puede estender la fórmula, sino hasta ser $D^{\frac{1}{2}} sen.\omega - \frac{1}{8}u sen.\theta = 0$, en caso de hazerse el movimiento hacia abaxo: ó hasta ser $(D+a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega - \frac{1}{8}u se.\theta = 0$, en caso de hacerse el movimiento hacia arriba. En el primero será la resistencia $=$

$$mbe\left(a sen.\omega^2 + \frac{1}{4}u\left(\left(\frac{u^2 sen.\theta^2}{64 sen.\omega^2} + a\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{u sen.\theta}{8 sen.\omega}\right) sen.\omega sen.\theta\right),$$

y en el segundo $=$ ------------------

$$mbe\left(-a sen.\omega^2 + \frac{1}{4}u\left(\left(\frac{u^2 sen.\theta^2}{64 sen.\omega^2} - a\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{u sen.\theta}{8 sen.\omega}\right) sen.\omega se.\theta\right):$$

esto es para ambos casos $=$ ---------------

$$mbe\left(\pm a sen.\omega^2 + \frac{1}{4}u\left(\left(\frac{u^2 sen.\theta^2}{64 sen.\omega^2} \pm a\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{u se.\theta}{8 se.\omega}\right) se.\omega se.\theta\right).$$

Co-

Corolario 10.

Suponiendo que el paralelepípedo se reduzca á un plano, á fin de tener la misma velocidad en una y otra superficie, lo que dá $a = 0$: será la resistencia $= \frac{1}{4} mbeu \left(\frac{u sen.\theta}{4 sen.\omega}\right) sen.\omega sen.\theta = \frac{1}{64} mbeu^2 sen.\theta^2$.

PROPOSICION 45.

Hallar la resistencia que padecerá el mismo paralelepípedo rectángulo, que se mueve con las mismas condiciones, quando su superficie superior esté fuera del fluido.

En este caso será la resistencia la fuerza que padece la superficie inferior $= mbe\left(a^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \frac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$: denotando a la altura vertical que tubiere el paralelepípedo dentro del fluido.

Corolario 1.

Si fuere el paralelepípedo el que se mueva, y no el fluido, será $sen.\omega = 1$: y la resistencia quedará $= mbe\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$.

Corolario 2.

Si ademas se hiciere el movimiento vertical, será $sen.\theta = 1$: y se reducirá á $mbe\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8} u\right)^2$.

Corolario 3.

Si en este caso la velocidad u fuere la que pudiera to-

tomar el fluido cayendo de la altura a, será $\sqrt{a} = \frac{1}{8}u$: luego la resistencia será $= mbe(\frac{1}{8}u \pm \frac{1}{8}u)^2 = \frac{1}{64}mbeu^2(1 \pm 1)^2$; ó $mbe(\sqrt{a} \pm \sqrt{a})^2 = mbea(1 \pm 1)^2$: esto es, quando se hiciere el movimiento hacia abaxo $= 4mbea$, y en el de hacerse hacia arriba, $= 0$.

Corolario 4.

Si no se moviere tampoco el paralelepípedo, será $u = 0$: y la resistencia quedará $= mbea$.

Corolario 5.

Si el movimiento fuere horizontal, será $sen.\theta = 0$: y la resistencia, del mismo modo, quedará $= mbea$.

Corolario 6.

Si fuere el fluido el que se mueva, y no el paralelepípedo, será $sen.\theta = cos.\omega$: con que la resistencia se reducirá á $mbe\left(a^{\frac{1}{2}}sen.\omega \pm \frac{1}{8}ucos.\omega\right)^2$.

Corolario 7.

Si, á mas de esto, fuere $sen.\omega = 0$, ó se moviere el fluido verticalmente, quedará la resistencia $= \frac{1}{64}mbeu^2$: ó por ser $\frac{1}{64}u^2 = a$, $= mbea$.

CAPITULO 7.

De lo que las desnivelaciones del fluido en unas superficies alteran la fuerza que padecen otras, como tambien las resistencias.

PROPOSICION 46.

La desnivelacion del fluido, que procede de la accion de una superficie qualquiera, se estiende todo al rededor de ella con igual y semejante parábola.

Fig. 64. Siendo PF la desnivelacion procedente del movimiento de una superficie, CD la superficie del fluido, y FD la parábola que lo termina, es preciso que se forme igual y semejante parábola CF al lado opuesto de PF, pues de la elevacion FP, y de la gravedad que esta comunica á todas las partículas del fluido, se forma la parábola FD: con que habiendose de comunicar igual gravedad hacia las de FC, igual parábola FC se debe formar. Semejante argumento existe para todo el rededor de la desnivelacion PF: luego semejante parábola se forma todo al rededor de dicha desnivelacion.

Corolario 1.

Esta regla se hace general para qualquiera superficie impelente ó impelida, vertical, inclinada ú horizontal.

Corolario 2.

Si fuere un cuerpo AG el que movido produgere la desnivelacion, siendo PG menor que PC = PD, no impedirá aquel que se formé la desnivelacion CGB,

aun-

aunque sí la BGPF, por ocupar su lugar el mismo cuerpo.

Corolario 3.

Las desnivelaciones deben, por consiguiente, producir fuerza positiva ó negativa en las demas superficies que circundan, ó á que alcanzan, alterando las que padecian sin esta circunstancia: como tambien la velocidad con que saliera el fluido por un agugero hecho en las mismas.

Corolario 4.

Si la superficie fuere plana, será $PC = PD = u \, sen. \theta$, expresando θ el ángulo que formare la misma con la direccion del movimiento.

PROPOSICION 47.

Hallar la velocidad con que saldrá el fluido por un orificio hecho en una superficie, atendiendo al efecto que causa en ella la desnivelacion que otra produce.

La velocidad que toma el fluido por qualquiera orificio de una superficie, tiene relacion con la altura de la desnivelacion en la vertical del mismo orificio. Siendo $\frac{1}{64} u^2 sen. \theta^2$ la desnivelacion, toman las partículas del fluido, colocadas en la misma vertical, la velocidad $u \, sen. \theta$: luego si en general se tiene la altura de la desnivelacion sobre un orificio, multiplicandola por 64, y sacando la raiz quadrada, se tendrá la velocidad que tomarán las partículas del fluido; la que añadida ó substrahida de la que debe resultar, por la altura que tubiere la superficie del fluido sobre el orificio, se tendrá la velocidad con que saldrá por este.

PROPOSICION 48.

Hallar la fuerza horizontal que padece una superficie plana impelente, que está enteramente sumergida en el fluido, atendiendo á la desnivelacion que produce otra igualmente impelente.

Fig. 65. Que sea CL la superficie impelente que padece la fuerza que se desea inquirir: CN la que causa la desnivelacion: OQ la superficie del fluido: OANQ la desnivelacion que resulta del movimiento de la superficie NC; y OFED la que resulta del movimiento de LC, que se supone menor que la primera, por ser el ángulo que forma CN con la direccion del movimiento mayor que el que forma LC. Sea en la vertical BCT, BC $=$ D, CG $= x$, y será la horizontal GH $= \frac{x cos.n}{sen.n}$, la vertical HK $=$ D$+x$, y KI, desnivelacion correspondiente al punto H, $= \frac{1}{64}$OK^2 $= \frac{1}{64}$(BO$-$BK)^2 $= \frac{1}{64}\left(u sen.\Theta - \frac{x cos.n}{sen.n}\right)^2$, expresando Θ el ángulo que formá la direccion del movimiento con CN; de suerte que la velocidad con que saldrá el fluido por el orificio hecho en H fuera $8(\text{D}+x)^{\frac{1}{2}} + u sen.\Theta - \frac{x cos.n}{sen.n}$. La fuerza horizontal que padecerá una diferencio-diferencial en H, será pues $=$------ $m.dc.dx\left((\text{D}+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}\left(u sen.\Theta - \frac{x cos.n}{sen.n}\right)\right)^2$: ó siendo c constante, será la fuerza que padece una diferencial $=$ $mc.dx\left((\text{D}+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}\left(u sen.\Theta - \frac{x cos.n}{sen.n}\right)\right)^2$: cuyo integral $mc\left(\text{D}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}u\left((\text{D}+x)^{\frac{3}{2}} - \text{D}^{\frac{3}{2}}\right) sen.\Theta\right)$ + -------

mc

$$mc\left(\frac{u^2x}{64}sen.\Theta^2-\left(\tfrac{1}{10}(D+x)^{\frac{5}{2}}-\tfrac{1}{6}D(D+x)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)\frac{cos.n}{sen.n}\right)$$
$$-mc\left(\frac{ux^2sen.\Theta cos.n}{64sen.n}-\frac{x^3cos.n^2}{3.64sen.n^2}\right),$$ suponiendo horizontal la union C de las dos superficies, será la fuerza horizontal que padecerá la superficie HC. Substitúyase ahora $x=CT=\frac{RTsen.n}{cos.n}=\frac{EFsen.n}{cos.n}=\frac{usen.n}{cos.n}(se.\Theta-se.\theta)$, expresando θ el ángulo que forma la direccion del movimiento con la CL, siendo EF lo que se estiende una desnivelacion sobre la otra, y será la fuerza horizontal que padecerá la CR = - - - - - - - - - -

$$mc\left(\frac{Dusen.n(sen.\Theta-sen.\theta)}{cos.n}+\frac{u^2se.n^2(sen.\Theta-sen.\theta)^2}{2cos.n^2}\right)+$$
$$\tfrac{2}{6}mcuse.\Theta\left(\left(D+\frac{use.n(se.\Theta-se.\theta)}{cos.n}\right)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)-\frac{mccos.n}{10sen.n}\left(D+\frac{use.n(se.\Theta-se.\theta)}{cos.n}\right)^{\frac{5}{2}}$$
$$+\frac{mcDcos.n}{6sen.n}\left(D+\frac{use.n}{cos.n}(se.\Theta-se.\theta)\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{mccos.n}{15sen.n}D^{\frac{5}{2}}+\frac{mcu^3(se.\Theta^3-se.\theta^3)se.n}{3.64.cos.n}.$$

Corolario 1.

La fuerza horizontal que padecería la CR resultante de la desnivelacion que ella sola produgera es (*Prop.* 24)

$$=mc\left(Dx+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{6}u\left((D+x)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)sen.\theta+\tfrac{1}{64}u^2xsen.\theta^2\right)=$$
$$mc\left(\frac{Dusen.n}{cos.n}(sen.\Theta-se.\theta)+\frac{u^2sen.n^2(sen.\Theta-sen.\theta)^2}{2cos.n^2}\right)+ - - - -$$
$$+\tfrac{1}{6}mcusen.\theta\left(\left(D+\frac{use.n}{cos.n}(se.\Theta-se.\theta)\right)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{mcu^3sen.\theta^3sen.n}{64.cos.n}(se.\Theta-se.\theta):$$

luego restando este valor de la fuerza antes hallada, quedará el exceso de fuerza horizontal que la comunicará la desnivelacion de la otra superficie = - - - - -

$$\tfrac{2}{6}mcu(sen.\Theta-sen.\theta)\left(\left(D+\frac{usen.n}{cos.n}(sen.\Theta-sen.\theta)\right)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)-$$

mc

$$\frac{mccos.n}{sen.n}\left(\tfrac{1}{10}\left(D+\frac{use.n}{cos.n}(se.\Theta-se.\theta)\right)^{\frac{5}{2}}-\tfrac{1}{6}D\left(D+\frac{use.n}{cos.n}(se.\Theta-se.\theta)\right)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)$$
$$+\frac{mcu^3sen.n}{3.64cos.n}(sen.\Theta-sen.\theta)^2(sen.\Theta+2sen.\theta).$$

Corolario 2.

La fuerza horizontal que padece toda la superficie CL resultante de la desnivelacion que ella sola produce, es (*Proposicion* 24.) $=$ - - - - - - - - -
$$mc\left(Da+\tfrac{1}{2}a^2+\tfrac{1}{6}usen.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{64}u^2asen.\theta^2\right),$$
expresando a toda la altura vertical de la misma superficie: luego añadiendo esta cantidad al exceso de fuerza que la comunica la otra superficie, será toda la fuerza horizontal que padecerá $=$ - - - - - - - - -
$$mc\left(Da+\tfrac{1}{2}a^2+\tfrac{1}{6}usen.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{64}u^2asen.\theta^2\right)+$$
$$\tfrac{1}{6}mcu(sen.\Theta-sen.\theta)\left(\left(D+\frac{usen.n}{cos.n}(se.\Theta-se.\theta)\right)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)-$$
$$\frac{mccos.n}{sen.n}\left(\tfrac{1}{10}\left(D+\frac{use.n}{cos.n}(se.\Theta-se.\theta)\right)^{\frac{5}{2}}-\tfrac{1}{6}D\left(D+\frac{use.n}{cos.n}(se.\Theta-se.\theta)\right)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)$$
$$+\frac{mu^3sen.n}{3.64.cos.n}(sen.\Theta-sen.\theta)^2(sen.\Theta+2sen.\theta).$$

Escolio 1.

Despues de la integracion substituímos $x=$ - - - $\frac{usen.n}{cos.n}(sen.\Theta-sen.\theta)$, á fin de tener la fuerza horizontal que padece la CR, comprehendida entre los puntos C y R, siendo este el que corresponde á la vertical FR que pasa por F, extremo de la parte á que se estiende la mayor elevacion sobre la menor; pero esto no debe entenderse sino en el caso de que la vertical

FR

FR corte la superficie CL en un punto como R: si CL fuere menor que CR, ya no se debe substituir por x sino su legitimo valor, que será $k\,sen.n$ si k denota la longitud CL de la superficie.

Escolio 2.

Si BT fuere menor que BC, ó si la superficie CL cayere á la parte de arriba de la horizontal del punto C, serán negativas las cantidades x, a, y $sen.n$, con que se debe cuidar, en este caso, de mudar los correspondientes en las fórmulas que preceden.

PROPOSICION 49.

Hallar la fuerza horizontal que padece una superficie plana impelida que está enteramente sumergida en el fluido, atendiendo á la desnivelacion que produce otra igualmente impelida.

Esta proposicion no se diferencia de la dada (*Propos.* 48.) sino en que son KI, y por consiguiente $\frac{1}{8}\left(u\,sen.\Theta - \frac{x\,cos.n}{sen.n}\right)$, negativas. Variando, pues, los signos á los productos correspondientes, quedará la fuerza horizontal que padece la CR $=$ ------

$$mc\left(\frac{Du\,sen.n}{cos.n}(sen.\Theta - sen.\theta) + \frac{u^2\,sen.n^2}{2\,cos.n^2}(sen.\Theta - sen.\theta)^2\right) -$$

$$\tfrac{3}{8}mcu\,sen.\Theta\left(\left(D + \frac{u\,sen.n}{cos.n}(sen.\Theta - sen.\theta)\right)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \text{------}$$

$$mc\frac{cos.n}{sen.n}\left(\tfrac{1}{10}\left(D + \frac{u\,se.n}{cos.n}(se.\Theta - se.\theta)\right)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{6}D\left(D + \frac{u\,se.n}{cos.n}(se.\Theta - se.\theta)\right)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$+ \frac{mcu^3\,sen.n}{3.64.cos.n}(sen.\Theta - {}^3sen.\theta^3).$$

Corolario 1.

Por igual razon el exceso de fuerza horizontal que le comunicará la desnivelacion de la otra superficie será $=$

$$= mc\left(-\tfrac{1}{6}u(se.\Theta - se.\theta)\left(D + \frac{use.n}{cos.n}(sen.\Theta - sen.\theta)\right)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) +$$

$$\frac{mccos.n}{sen.n}\left(\tfrac{1}{10}\left(D + \frac{use.n}{cos.n}(se.\Theta - se.\theta)\right)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{6}D\left(D + \frac{use.n}{cos.n}(se.\Theta - se.\theta)\right)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$+ \frac{mcu^3 sen.n}{3.64.cos.n}(sen.\Theta - sen.\theta)^2(sen.\Theta + 2seu.\theta).$$

Corolario 2.

Por lo mismo la fuerza horizontal que padecerá la superficie CL, será = - - - - - - - - - - - - - -

$$mc\left(Da + \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{6}usen.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \tfrac{1}{46}u^2 asen.\theta^2\right) -$$

$$\tfrac{1}{6}mcu(sen.\Theta - sen.\theta)\left(\left(D + \frac{usen.n}{cos.n}(se.\Theta - se.\theta)\right)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) +$$

$$\frac{mccos.n}{sen.n}\left(\tfrac{1}{10}\left(D + \frac{use.n}{cos.n}(se.\Theta - se.\theta)\right)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{6}D\left(D + \frac{ase.n}{cos.n}(se.\Theta - se.\theta)\right)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$+ \frac{mcu^3 sen.n}{3.64.cos.n}(sen.\Theta - sen.\theta)^2(sen.\Theta + 2sen.\theta).$$

PROPOSICION 50.

Hallar la fuerza horizontal que padece una superficie plana impelida, que está enteramente sumergida en el fluido, atendiendo á la desnivelacion que produce otra impelente.

La velocidad con que saldrá el fluido por el orificio H de resulta de la desnivelacion que produce la superficie impelente NC es, por lo dicho (*Propos.* 48.) $= 8(D+x)^{\frac{1}{2}} + usen.\Theta - \frac{xcos.n}{sen.n}$; pero suponiendo ahora que la superficie CL es impelida ó que huye del fluido con la velocidad $usen.\theta$, con esta menos saldrá el mismo fluido por el orificio H: será, pues, la efectiva $= 8(D+x)^{\frac{1}{2}} + u(se.\Theta - se.\theta) - \frac{xcos.n}{sen.n}$. No diferenciándose

esta

esta de la otra sino en tener $sen.\Theta - sen.\theta$ en lugar de $sen.\Theta$ solo, se resolverá esta Proposicion substituyendo en la dada (*Propos.* 48.) $sen.\Theta - sen.\theta$ en lugar de $sen.\Theta$ solo: será, pues, la fuerza horizontal que padecerá la CR = ---------

$$mc\left(Dx + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}u(se.\Theta - se.\theta)\left((D+x)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \tfrac{1}{64}u^2x(se.\Theta - se.\theta)^2\right) -$$

$$\frac{mccos.n}{sen.n}\left(\tfrac{1}{10}(D+x)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{6}D(D+x)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right) - \left(\frac{ux^2cos.n}{64sen.n} + \frac{x^3cos.n^2}{3.64.se.n^2}\right)mc.$$

Substitúyase ahora $x = CT = \frac{RT.sen.n}{cos.n} = \frac{BO.sen.n}{cos.n} = \frac{usen.nsen.\Theta}{cos.n}$ para el caso en que sea $CL =$ ó $>$ CR, y será la fuerza horizontal que padecerá la CR = ----

$$mc\left(\frac{Dusen.nse.\Theta}{cos.n} + \frac{u^2se.n^2se.\Theta^2}{2cos.n} + \tfrac{1}{6}u(se.\Theta - se.\theta)\left(\left(D + \frac{use.nse.\Theta}{cos.n}\right)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right)\right)$$

$$-\frac{mccos.n}{sen.n}\left(\tfrac{1}{10}\left(D + \frac{usen.nsen.\Theta}{cos.n}\right)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{6}D\left(D + \frac{usen.nsen.\Theta}{cos.n}\right)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$+\frac{mcu^3\left((sen.\Theta - sen.\theta)^3 - sen.\theta^3\right)}{3.64.cos.n}.$$

Corolario I.

La fuerza horizontal que padecerá la CR, resultante de la desnivelacion que ella sola produgera es (*Pr.*24) =

$$mc\left(\frac{Dusen.nse\Theta.}{cos.n} + \frac{u^2se.n^2se.\Theta^2}{2cos.n^2} - \tfrac{1}{6}use.\theta\left(\left(D + \frac{use.nse.\Theta}{cos.n}\right)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right)\right) +$$

$mc\frac{u^3sen.nsen.\Theta sen.\theta^2}{64cos.n}$: luego, restando este valor de la fuerza hallada antes, quedará la horizontal que le comunica la desnivelacion de la otra superficie

$$= mc\left(\tfrac{1}{6}usen.\Theta\left(\left(D + \frac{usen.nsen.\Theta}{cos.n}\right)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right)\right) - ----$$

$$\frac{mccos.n}{sen.n}\left(\tfrac{1}{10}\left(D+\frac{usen.nsen.\Theta}{cos.n}\right)^{\frac{5}{2}}-\tfrac{1}{6}D\left(D+\frac{usen.nsen.\Theta}{cos.n}\right)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)$$
$$+\frac{mcu^3sen.nsen.\Theta^2(sen.\Theta-3sen.\theta)}{3.64.cos.n}$$

Corolario 2.

La fuerza horizontal que padece toda la superficie CL, resultante de la desnivelacion que ella sola produce, es (*Proposicion* 24.) $=$
$$mc\left(Da+\tfrac{1}{2}a^2-\tfrac{1}{6}usen.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{64}u^2asen.\theta^2,\right),$$
expresando a toda la altura vertical de la misma superficie: luego añadiendo esta cantidad á la que le comunica la otra superficie, será toda la fuerza horizontal que padecerá $=$
$$mc\left(Da+\tfrac{1}{2}a^2-\tfrac{1}{6}usen.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{64}u^2asen.\theta^2\right)+$$
$$\tfrac{1}{6}mcusen.\Theta\left(\left(D+\frac{usen.nsen.\Theta}{cos.n}\right)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)-$$
$$\frac{mccos.n}{sen.n}\left(\tfrac{1}{10}\left(D+\frac{usen.nsen.\Theta}{cos.n}\right)^{\frac{5}{2}}-\tfrac{1}{6}D\left(D+\frac{usen.nsen.\Theta}{cos.n}\right)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)$$
$$+\frac{mcu^3sen.nsen.\Theta^2}{3.64.cos.n}(sen.\Theta-3sen.\theta).$$

Escolio 1.

Despues de la integracion substituimos $x=\frac{usen.nsen.\Theta}{cos.n}$ para el caso en que sea RC $=$ ó $<$ CL: si fuere RC $>$ CL se debe substituir por x su legítimo valor, que será $ksen.n$, denotando k la longitud de CL.

Escolio 2.

Fig. 66. Si BT fuere menor que BC, ó si la superficie CL ca-

cayese á la parte de arriba de la horizontal del punto C, serán negativas las cantidades x, a, y $sen.n$ con que se mudarán en las fórmulas los signos correspondientes. En este caso puede entenderse la superficie impelida hasta salir fuera del fluido, como si en lugar de CL fuera CV.

Escolio 3.

Quando la superficie impelida se estiende hasta salir fuera del fluido, se ofrecen dos casos distintos: uno quando corta la OR por mas abaxo que el puntoO, que ya queda determinado en la Proposicion y Corolarios precedentes: el otro quando corta la OB, y desnivelacion OA que se resuelve en el Corolario siguiente.

Escolio 4.

La cantidad $\frac{x cos.n}{sen.n}$ en la expresion de la velocidad $8(D+x)^{\frac{1}{2}}+u sen.\Theta-\frac{x cos.n}{sen.n}$, no solo es cero quando es $sen.n = 1$, sino tambien quando es negativo $cos.n$, ó que cae la superficie impelida entre AC y NC, porque entre estas dos líneas es constante la desnivelacion terminada por la AN paralela á la superficie OQ, siendo siempre $=\frac{1}{64}u^2 sen.\Theta^2$, de suerte que se desvanece el segundo termino de $\frac{1}{64}\left(u sen.\Theta-\frac{x cos.n}{sen.n}\right)^2$ que antes daba el valor de KI.

Corolario 3.

Quando la superficie impelida se estiende hasta salir fuera del fluido, y que corta la desnivelacion OA, es la velocidad de aquel, en el punto mas alto, ú de la misma salida, $M=0$: esto es,

$8(D+x)^{\frac{1}{2}}+u(sen.\Theta-sen.\theta)-\frac{x cos.n}{sen.n}=0$, cuya equacion dá

$$x=\frac{u se.n}{cos.n}(se.\Theta-se.\theta)-\frac{64 se.n^2}{2cos.n^2}\pm\frac{8 se.n}{cos.n}\left(D-\frac{u se.n}{cos.n}(se.\Theta-se.\theta)+\frac{64 se.n^2}{4cos.n^2}\right)^{\frac{1}{2}}:$$

valor que se debe substituir por x, despues de haber integrado.

Corolario 4.

Si fuere $sen.n=-1$ quedará $x=D-\frac{1}{64}u^2(se.\Theta-se.\theta)^2$: y lo mismo para todos los casos en que caiga la superficie impelida entre AC y NC, sobre AC ó sobre NC.

Corolario 5.

Cayendo la misma superficie sobre CN, ó reduciendose las dos, impelente é impelida, á una sola superficie, es $sen.\theta=sen.\Theta$: luego, para este caso, quedará $x=D$: lo que muestra que el fluido terminará en la superficie OQ, quedando perfectamente de nivel, y sin dexar la menor cavidad detras de la superficie impelida.

Corolario 6.

Para qualquiera de los casos, en que la superficie impelida caiga entre AC y NC, habiendose de desvanecer $cos.n$, quedará la fuerza horizontal que padezca, $=$

$$mc\left(-Dx+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}u(se.\Theta-se.\theta)\left((D+x)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)-\frac{1}{64}u^2x(se.\Theta-sen.\theta)^2\right).$$

Corolario 7.

Si las dos superficies, impelida é impelente, se redugeren á una sola, será $x=D$, y $sen.\Theta=sen.\theta$: luego, substituyendo estos valores, quedará la fuerza que padezca la superficie impelida $=-\frac{1}{2}mcD^2$, expresando el signo negativo, hacerse la fuerza en oposicion de la impelente.

Co-

Corolario 8.

Si fuere x despreciable, respecto de D, quedará la fuerza horizontal que padezca la superficie impelida $= mc\left(-Dx + \frac{1}{4}u(fe.\Theta - fe.\theta)D^{\frac{1}{2}}x - \frac{1}{64}u^2x(fe.\Theta - fe.\theta)^2\right)$: que, siendo $fen.\Theta = fen.\theta$, queda $= -mcDx$.

PROPOSICION 51.

Hallar las fuerzas horizontales que padece una superficie plana impelente, ó impelida, atendiendo á la desnivelacion que produce otra, quando media alguna distancia entre las dos.

Que sea NC una superficie impelente que produce la desnivelacion AO: que en C la esté unida otra CG, y á esta en G la GH, de suerte que se busqué la fuerza que padece esta superficie atendiendo á la desnivelacion AO: y respecto que la fuerza depende de la altura de la desnivelacion, y que la correspondiente al punto G es FB, y no la AE que antes usamos: substitúyase la BF en lugar de AE, y se tendrá resuelta la Proposicion. AE es igual á $\frac{1}{64}\overline{OE}^2 = \frac{1}{64}u^2 fen.\Theta^2$, y $BF = \frac{1}{64}\overline{OF}^2 = \frac{1}{64}(OE - EF)^2$: luego habrá que substituir $(OE - EF)^2$ en lugar de $\overline{OE}^2$, ó $OE - EF$ en lugar de OE: esto es, $ufen.\Theta - EF$ en lugar de $ufen.\Theta$ solo, para que las fórmulas precedentes correspondan. Lo mismo resulta aunque la superficie NC sea impelida, por argüirse lo mismo para qualquiera caso. Si fuere la distancia horizontal entre las dos verticales AC, $BG = EF = q$, tendremos que substituir $ufen.\Theta - q$ en lugar de $ufen.\Theta$ solo. Fig. 67.

Co-

Corolario 1.

Siendo la distancia horizontal $q = u sen.\Theta =$ á toda la amplitud de la desnivelacion FO, será $u sen.\Theta - q = 0$, y por consiguiente ninguna fuerza le comunicará á la superficie la desnivelacion.

Corolario 2.

Como lo mismo sucede quando es EF $>$ EO $= u sen.\Theta$, ó $q >$ EO $= u sen.\Theta$, se sigue, que para el caso, en que sea $q =$ ó $>$ EO $= u sen.\Theta$, se debe substituir en las fórmulas, $q = u sen.\Theta$.

Corolario 3.

Como las cantidades que expresan la fuerza que comunica la desnivelacion que produce la otra superficie estan todas afectas de $u(sen.\Theta - sen.\theta)$, quando se trata de la combinacion de superficies impelentes ó impelidas entre sí, y que ahora se ha de substituir $u sen.\Theta - q$ en lugar de $u sen.\Theta$ solo, estarán afectas de $u(sen.\Theta - sen.\theta) - q$: luego si fuere $u sen.\Theta = u sen.\theta + q$, no resultará fuerza comunicante alguna en estos casos.

Corolario 4.

Como en las curvas es muy corta la diferencia de los ángulos Θ y θ quando las diferenciales distan poco, y en las que aumentan su distancia es preciso substraher de ella la cantidad $\frac{q}{u}$: se sigue que en las curvas se puede despreciar la fuerza que se comunican unas partes á otras, lo que nos facilitará los cálculos.

PRO-

PROPOSICION 52.

Hallar la resistencia horizontal que padece un paralelepípedo rectángulo, que flota sobre un fluido con dos de sus lados paralelos al horizonte, moviendose el paralelepípedo, y no el fluido, en direccion paralela á otros dos lados, en caso de ser $a =$ ó $> \frac{1}{64}u^2 sen.\Theta^2$; y atendiendo á la fuerza que comunica á la superficie impelida la desnivelacion de la impelente.

Siendo en este caso $sen.\eta = 1$, será (*Propos.* 50.) la fuerza que padece la superficie impelida $= -$

$$mc\left(Dx + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}u(se.\Theta - sen.\theta)\left((D+x)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \tfrac{1}{64}u^2x(se.\Theta - se.\theta)^2\right),$$

donde se ha de substituir la x negativa, y (*Cor.* 4. *Prop.* 50.) $= D - \frac{1}{64}u^2(sen.\Theta - sen.\theta)^2$; ó substituyendo $usen.\Theta - q$, por $usen.\Theta$, denotando q toda la longitud del paralelepípedo, y $sen.\Theta = sen.\theta$, que son iguales en este caso, será la fuerza $= -$

$$-mc\left(Dx - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}q\left((D+x)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \tfrac{1}{64}q^2x\right),$$ y el valor de $x = D - \frac{1}{64}q^2$. Substitúyase este en la fuerza, y se reducirá á $-mc\left(\frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{6}qD^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{64}q^2D - \frac{1}{6.64^2}q^4\right)$; ó poniendo $a = D$, que es toda la profundidad que tiene debaxo del fluido uno y otro extremo del paralelepípedo, será la fuerza que padéce la superficie impelida $= -mc\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}qa^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{64}q^2a - \frac{1}{6.64^2}q^4\right)$. La que padece la impelente, no pasandole el fluido por encima, es (*Proposicion* 20.) $= -$

$$mc\left(\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{6}ua^{\frac{3}{2}}sen.\theta^2 + \tfrac{1}{64}u^2asen.\theta^2 + \frac{u^4 seu.\theta^4}{6.64^2}\right);$$ luego la resistencia que padecerá el paralelepípedo será $=$

mc

$$mc\left(\tfrac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}(u\,sen.\theta+q)+\tfrac{1}{64}a(u^2 sen.\theta^2-q^2)+\frac{1}{6.64^2}(u^4 se.\theta^4+q^4)\right).$$

Corolario 1.

Si la longitud del paralelepípedo fuere igual ó mayor que $u\,sen.\theta$, substituiremos $q = u\,sen.\theta.$, y será la resistencia que padecerá = ---------- $mc\left(\tfrac{1}{3}ua^{\frac{3}{2}}sen.\theta+\frac{1}{3.64^2}u^4 sen.\theta^4\right)$, la misma que encontramos (*Cor.* 1. *Prop.* 36.).

Corolario 2.

Si fuere $q = 0$, ó se redugere el paralelepípedo á un plano, será la resistencia que padecerá = -- $mc\left(\tfrac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,sen.\theta+\tfrac{1}{64}au^2 sen.\theta^2+\frac{1}{6.64^2}u^4 sen.\theta^4\right)$.

Corolario 3.

La resistencia que padecerá aquel paralelepípedo será mayor que la que padece este plano de la cantidad $mc\left(\tfrac{1}{6}a^3 u\,sen.\theta-\tfrac{1}{64}au^2 sen.\theta^2+\frac{1}{6.64^2}u^4 sen.\theta^4\right)$.

Corolario 4.

La resistencia que padecerá el paralelepípedo, será dupla de la que padece el plano, menos la cantidad $\tfrac{1}{32}mcau^2 sen.\theta^2$; ó la que padece el plano, mitad de la que padece el paralelepípedo, mas la cantidad $\tfrac{1}{64}mcau^2 sen.\theta$.

Corolario 5.

Si la velocidad u fuere poca, puede despreciarse el

el término $\frac{1}{64}mcau^2 sen.\theta^2$ por ser corto, respecto del primero $\frac{1}{8}mca^{\frac{3}{2}}u sen.\theta$, y quedará la resistencia del plano, mitad de la que padece el paralelepípedo.

Corolario 6.

Si el paralelepípedo estubiere de tal modo debaxo del fluido, que sea a despreciable, respecto de D, será (*Cor.* 8. *Propos.* 50.) la fuerza que padezca la superficie impelida $= mcDa$; y siendo la impelente $= mc\left(Da + \frac{1}{4}auD^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{64}au^2\right)$, quedará la resistencia que padecerá $= \frac{1}{4}mcau(D^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{16}u)$; ó si fuere u corta, respecto de D, $= \frac{1}{4}mcauD^{\frac{1}{2}}$: que es mitad de la que padece (*Cor.*2. *Prop.*40.) no haciendo atencion á la desnivelacion.

Corolario 7.

La resistencia que padece un paralelepípedo de igual alto y ancho, sin atender á la desnivelacion, y quando es a despreciable, respecto de D, es (*Cor.* 2. *Prop.* 40.) $= \frac{1}{2}ma^2uD^{\frac{1}{2}}$: y la que padece una esphera (*Esc. Prop.*42.) $= \frac{1}{12}a^2mcuD^{\frac{1}{2}}$: con que son estas dos resistencias como $1 : \frac{1}{6}c$: y siendo la del paralelepípedo, atendiendo á la desnivelacion, $\frac{1}{4}ma^2u(D^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{16}u)$, será la que padece la esphera $= \frac{1}{24}ma^2u(D^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{16}u)$.

Escolio 1.

Por lo demonstrado en el Corol. 5 precedente se tomó en el cálculo aplicado á las experiencias expuestas en el Escolio de la Propos. 36, por la resistencia

que debiera haber sufrido la tabla, la mitad de la que resultó para un paralelepípedo.

Escolio 2.

De la misma manera se puede hallar la resistencia que padecen los demas cuerpos compuestos de superficies rectilíneas, atendiendo á la desnivelacion que altera las fuerzas; pero basta para nuestro intento, y mas quando habremos de reducirnos á las superficies curvas, en quienes se haze despreciable esta atencion.

CAPITULO 8.

De las dimensiones y figura que deben tener las líneas y superficies, para que, movidas en el fluido, padezcan la máxima ó mínima resistencia.

Lema 2.

HAllar la línea ó superficie que goza el máximo ó mínimo de una propiedad; ó aquella que, entre varias que gozan en igual grado una propiedad, goza tambien el máximo ó mínimo de otra distinta propiedad.

Dividida la línea ó superficie en diferenciales, se puede exponer por una cantidad diferencial la propiedad que cada una de estas debe gozar: y como se pide la máxima ó mínima, la diferencial de dicha cantidad ha de ser constante, respecto que en este caso, del mismo valor que aumentará su expresion una diferencial, la disminuirá otra, siendo este el preciso requisito para que no pueda ser mayor ó menor la propiedad. Diferénciese, pues, la cantidad ó expresion di-

diferencial que expone la propiedad, y dividida por la cantidad comun que multiplicare todos los terminos, se igualará á una constante, cuya equacion despejada será la de la línea ó superficie que gozará de la máxima propiedad.

En caso de gozar de una máxîma ó mínima propiedad, sin perder de otra que goza, las diferenciales de ambas cantidades diferenciales que expresan las propiedades, se deben igualar entre sí, respecto que no debe aumentar la una con perjuicio de la otra. Esta igualacion despejada será, pues, la de la línea ó superficie que gozará de la máxima ó mínima propiedad, sin haber perdido de la que antes gozaba.

PROPOSICION 53.

Dada de magnitud una superficie plana vertical, que se mueve horizontalmente en un fluido inmovil, hallar la figura que debe tener para que experimente la máxîma ó mínima resistencia.

Que sean x las abcisas medidas verticalmente desde la superficie del fluido, y y las ordenadas horizontales, por las quales se exprese la equacion á la línea que termina la superficie: con esto ydx será una diferencial horizontal de la misma superficie, que por la condicion del problema debe ser constante. La resistencia que padecerá la misma diferencial será (*Cor.* 3. *Prop.*40.) $= \frac{1}{2}myx^{\frac{1}{2}}dxusen.\theta$: luego, segun el Lema, la diferencial de esta cantidad la hemos de igualar á la de ydx: y siendo esta expresion constante podemos substituir por ella q, y será - - - - - - - - - - - - $\frac{1}{2}mqusen.\theta. \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 0 = \frac{mq^2usen.\theta}{4y\sqrt{x}}$: luego para que la superficie padezca la máxîma ó mínima resistencia, han de ser x ó y infinitas, y por consiguiente y.ó x cero.

cero. Habrá de ser, pues, la superficie de una infinita extension horizontal, y de una profundidad infinitamente pequeña para que padezca la menor resistencia posible.

Corolario.

Si la anchura horizontal de la superficie se diere terminada sin que pueda exceder en punto alguno de la misma, la superficie que menos resistencia padecerá será el rectángulo que se mueve con dos de sus lados paralelos al horizonte.

PROPOSICION 54.

Determinar las dimensiones que debe tener la misma superficie vertical ó rectángulo que debe padecer la máxima ó mínima resistencia posible, en caso de atender á la parte desnivelada.

La resistencia que padece el rectángulo, atendiendo á la desnivelacion, es $\frac{1}{3}muy\,sen.\theta\left(x^{\frac{3}{2}}+\frac{u^3 sen.\theta^3}{64^2}\right)$: y como se pide que esta resistencia sea la mínima, su diferencial será $\frac{1}{2}muyx^{\frac{1}{2}}dx\,sen.\theta+\frac{1}{3}mux^{\frac{3}{2}}dy\,sen.\theta+\frac{mu^4 dy\,sen.\theta}{3.64^2}=0$; pero por haber de ser constante el area del rectángulo es $xy=q^2$, expresando q una constante: luego $xdy+ydx=0$, ó $dx=-\frac{xdy}{y}$, cuyo valor substituido en la equacion precedente dá, despues de partir por $mudy\,sen.\theta$, $-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{u^3 sen.\theta^3}{3.64^2}=0$, ó $\frac{2u^3 sen.\theta^3}{64^2}=x^{\frac{3}{2}}$, que dá $x=\frac{u^2 sen.\theta^2(4)^{\frac{1}{3}}}{16^2}$, y $y=\frac{16^2q^2}{u^2 sen.\theta^2(4)^{\frac{1}{3}}}$, dimensiones que debe tener el rectángulo para padecer la mínima resistencia posible.

Co-

Corolario 1.

Las dimensiones del rectángulo dependen, pues, no solo de la velocidad u con que se mueva el rectángulo, sino tambien del ángulo θ con que incidiere en él el fluido: quando mayores fueren qualquiera de estas dos cantidades, mayor debe ser la profundidad x, y menor la anchura y del rectángulo; y al contrario quando fueren menores.

Corolario 2.

La anchura infinita y que determinamos (*Prop.* 53) no le conviene, pues, al rectángulo, sino en caso de despreciarse la desnivelacion, ú de ser $u\mathit{sen}.\theta = 0$.

Corolario 3.

Si se substituyen los valores de $x = \frac{u^2 \mathit{sen}.\theta^2 (4)^{\frac{1}{3}}}{16^2}$ y de $y = \frac{16^2 q^2}{u^2 \mathit{sen}.\theta^2 (4)^{\frac{1}{3}}}$ en la resistencia ---------- $\frac{1}{3} muy\mathit{sen}.\theta \left(x^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3 \mathit{sen}.\theta^3}{64^2}\right)$ que padece el paralelepípedo, quedará la mínima que puede padecer el area rectángula $q^2 = \frac{mq^2 u^2 \mathit{sen}.\theta^2}{16(4)^{\frac{1}{3}}}$.

Corolario 4.

Lo que se ha dicho de las dos Proposiciones antecedentes y sus Corolarios conviene igualmente á un paralelepípedo rectángulo, que flota con su base paralela

lela al horizonte, no atendiendo al efecto que la desnivelacion produce en la base.

PROPOSICION 55.

Hallar la línea que debe terminar un plano horizontal, para que, movido en un fluido horizontalmente, experimente la máxima ó mínima fuerza posible.

Fig. 68. Que sea ABC el plano horizontal compuesto de dos mitades iguales y semejantes, que divide la línea ó exe BD, en cuya direccion se haga el movimiento. Mídanse tambien sobre BD las abcisas x, y sobre sus perpendiculares, las ordenadas y. Con esto, supuesto que el plano tenga un grueso infinitamente pequeño da, y que este forme por todo con el horizonte un ángulo recto, será la fuerza que padecerá una diferencial de AB, ó BC $= mdady\left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{udy}{8\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)^2$, respecto que $\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ expresa el seno del ángulo con que incide el fluido sobre la diferencial, y a la profundidad á que está el plano debaxo de la superficie del fluido. La diferencial de la expresion es ----

$$mdaddy\left(a + \frac{a^{\frac{1}{2}}udy}{2\sqrt{dx^2+dy^2}} + \frac{a^{\frac{1}{2}}udy^3}{4(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + \text{------}$$

$$mdaddy\left(\frac{3u^2dy^2}{64(dx^2+dy^2)} - \frac{2u^2dy^4}{64(dx^2+dy^2)^2}\right)$$ supuesta dx constante. Partiendo ahora por $mdaddy$, y substituyendo $-dy = \frac{bdx}{z}$ expresando z una variable ó indeterminada qualquiera, y b una constante, será (*Lem.* 2.)

$$a + \frac{a^{\frac{1}{2}}ub}{2\sqrt{b^2+z^2}} + \frac{a^{\frac{1}{2}}ub^3}{4\sqrt{(b^2+z^2)^3}} + \frac{3u^2b^2}{64(b^2+z^2)} - \frac{2u^2b^4}{64(b^2+z^2)^2} = n,$$

ex-

expresando n otra constante. Dadas, pues, la a y la u, quedará determinada por esta equacion la z, que por consiguiente será constante en toda la línea ABC, y en la equacion $-dy = \frac{bdx}{z}$. Tendremos, pues, integrando $b-y = \frac{bx}{z}$ equacion á la línea recta, y por consiguiente las AB, BC que terminan el plano ó cubren la base AC han de ser rectas.

Corolario 1.

Habiendo supuesto $-dy = \frac{bdx}{z}$, ó que mientras aumentan las abcisas, las ordenadas disminuyen, el origen de las abcisas se hallará en D.

Corolario 2.

Puesto $x = 0$, queda $b-y = 0$, ó $y = b$: luego la semiordenada DC, correspondiente á la abcisa $x = 0$, será $= b$.

Corolario 3.

Para determinar el punto en que las AB ó CB cortan al exe DB en B, tenemos que suponer $y = 0$: será, pues, para este punto $b = \frac{bx}{z}$, que dá $x = DB = z$.

Corolario 4.

Como la cantidad $z = DB$ depende de la equacion

$$a + \frac{a^{\frac{1}{2}}ub}{2\sqrt{b^2+z^2}} + \frac{a^{\frac{1}{2}}ub^3}{4\sqrt{(b^2+z^2)^3}} + \frac{3u^2b^2}{64(b^2+z^2)} - \frac{2u^2b^4}{64(b^2+z^2)^2} = n;$$

y

y que aun sin variar la a y la u, se deducirán tantos valores distintos de aquella como cantidades distintas se substituyan por n: se sigue, que aun sin variar la a y la u, son infinitas líneas rectas distintas las que satisfacen á la qüestion.

Corolario 5.

La fuerza que padecerá qualquiera de dichas rectas como CB que cubre la semi-ordenada DC, será $= mda.b\left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{bu}{8(b^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$: donde se ve que siendo u positiva, quanto mayor sea $z =$ DB, tanto menor será la fuerza; y al contrario: cuya noticia ya teniamos con anticipacion.

Corolario 6.

Si la u fuere negativa, quanto mayor fuere la z, tanto mayor será la fuerza; y al contrario.

Corolario 7.

Si continuado el exe BD hasta K, se terminase el plano por las quatro rectas ABCKA, la fuerza que padecerá ABC será $2bmda\left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{bu}{8(b^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$, y la que padecerá CKA será $2bmda\left(a^{\frac{1}{2}} - \frac{bu}{8(b^2+Z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$, siendo DB $= z$, y DK $= Z$: luego la resistencia será $2bmda\left(\left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{bu}{8(b^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2 - \left(a^{\frac{1}{2}} - \frac{bu}{8(b^2+Z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\right)$: con que quanto mayores sean no solo DB, sino tambien DK, menor será la resistencia. Es-

Escolio.

Del Problema y sus Corolarios solo deducimos que las líneas AB, CB han de ser rectas para que padezcan la máxîma ó mínima fuerza, padeciendola mucho menor al paso que se aleja mas el punto B; pero este punto puede darse terminado, ó lo que es lo mismo puede darse terminada la longitud del plano como si hubiera de reducirse á DE. En este caso parece que el plano se habia de terminar por las rectas AE, CE: así es en algunos casos; pero en otros padece menor resistencia la terminacion por tres rectas AG, GF, y FC, siendo la segunda paralela á la base AC, ó perpendicular al exe, y AG $=$ CF, asi como GE $=$ EF, como se demuestra en el Problema siguiente.

PROPOSICION 56.

Dada la semibase DC, y el exe ó longitud del plano horizontal DE, con la paralela á la base EF, hallar el punto F, al qual tirada la CF, termine el plano DEFC, de suerte que, movido horizontalmente segun el exe DE, padezca la máxîma ó mínima fuerza.

Tirada FH paralela al exe, y llamando DE $= x$, y EF $=$ DH $= y$, será la fuerza que padezca EF $=$ $mda.y(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u)^2$, la que padezca FC $=$ - - - - - - - $mda.(b-y)\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u(b-y)}{8(x^2+(b-y)^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$, y ambas juntas

$$= mda\left(ab \pm \tfrac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}uy + \tfrac{1}{64}u^2y \pm \frac{a^{\frac{1}{2}}u(b-y)^2}{4(x+(b-y)^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{u^2(b-y)^3}{64(x^2+(b-y)^2)}\right).$$

Habiendo de ser esta la máxîma ó mínima, será su diferencial -

$$mda\left(\pm\tfrac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}udy+\tfrac{1}{64}u^2dy\mp\frac{2a^{\frac{1}{2}}u(b-y)dy}{4(x^2+(b-y)^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\pm\text{----}$$

$$mda\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}u(b-y)^3dy}{4(x^2+(b-y)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3u^2(b-y)^2dy}{64(x^2+(b-y)^2)}+\frac{2u^2(b-y)^4dy}{64(x^2+(b-y)^2)^2}\right)=0$$

ó partiendo por $\frac{1}{4}udymda$, y substituyendo t por $b-y$, será

$$\pm a^{\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{16}u\mp\frac{2a^{\frac{1}{2}}x^2t+a^{\frac{1}{2}}t^3}{(x^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3ux^2t^2+ut^4}{16(x^2+t^2)^2}=0,\ \text{ó}$$

$$\pm16a^{\frac{1}{2}}(x^2+t^2)^2\mp16a^{\frac{1}{2}}(2x^2t+t^3)\sqrt{x^2+t^2}+ux^2(x^2-t^2)=0,$$

que reduciendo, y ordenando resulta ----------

$$\left.\begin{matrix}16^2at^6+2.16^2ax^2t^4 & \text{-----}*\text{----} & 16^2ax^6\\ \pm32a^{\frac{1}{2}}ut^6\pm32a^{\frac{1}{2}}ux^2t^4 & \mp32a^{\frac{1}{2}}ux^4t^2 & \mp32a^{\frac{1}{2}}ux^6\\ -u^2x^2t^4+ & 2u^2x^4t^2- & u^2x^6\end{matrix}\right\}=0:$$

equacion del tercer grado, que tiene una raiz real positiva, ó valor de t^2, que es el que satisface á la question.

Corolario 1.

Si se substituye en la equacion $t=0$, queda $-x^6(16a^{\frac{1}{2}}\pm u)^2$ cantidad negativa; y si se coloca $t=x$ queda 2.16^2ax^6 cantidad positiva: luego t es menor que x siempre que tenga algun valor la a, ó estubiere el plano algo sumergido en el fluido: y si fuere $a=0$, ó estubiere coincidente con la superficie del fluido, será $t=x$: de suerte, que el ángulo HFC será quando mas de 45°, y disminuye al paso que deba estar mas profundo el plano.

Corolario 2.

Siendo $a=\infty$ queda la equacion en ------ t^6

$t^6 + 2x^2t^4 - x^6 = 0$, ó $t^6 + 2x^2t^4 = x^6$, que añadiendo á una y otra parte x^4t^2, y partiendo por $t^4 + x^2$, queda $t^4 + x^2t^2 = x^4$; de que resulta $t = x\sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}}$, mínimo valor de t: y en este caso el ángulo HFG es proxîmamente de $31^\circ\ 44'$.

Corolario 3.

Igualmente varía el valor de t, variando la velocidad u. El caso en que es $u = \infty$, corresponde á aquel en que es $a = 0$, y en él es $t = x$; y quando es $u = 0$, que corresponde al caso en que es $a = \infty$, es $t = x\sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}}$.

Corolario 4.

Para la parte impelente del plano AGFC, como es $t < x$, será $\pm 32a^{\frac{1}{2}}u(t^6 + x^2t^4 - x^4t^2 - x^6)$ negativo; y positivo para la impelida AOLC: luego será la t, correspondiente á la primera, é igual CH, mayor que la t correspondiente á la segunda é igual CM: de suerte, que siendo DE = DN, habría de ser GF < OL para que el plano encuentre la menor resistencia.

Corolario 5.

El punto F caerá sobre el exe DB siempre que el valor de t, deducido de la equacion, fuere igual á la semibase CD, y en tal caso el semiplano se reducirá á un triángulo; pero si el valor de t fuere mayor que la semibase, el punto F caerá á la parte opuesta del exe sobre EG, y la CF cortará al exe entre D y E: en este caso, terminando el plano por una recta tirada desde C á E, será la que menos resistencia padecerá.

Corolario 6.

En todos estos casos serán, pues, nulas la EF y NL, y el semiplano se reducirá á un triángulo, como AEC, ó AKC: ofreciendose todos ellos, tengan los valores que se quisieren la a y la u, quando DC es igual ó menor que $ED\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}}$, ó proxîmamente DC igual ó menor que $\frac{4}{5}$ ED.

Corolario 7.

Puesto que las dos líneas CF, FE padecen la menor fuerza, la padecerán tambien menor que otras dos CQ, QE, y estas menor que otras dos mas apartadas de la CF: pues todas las demas raices de la equacion que no sean la que dá la CF, son imaginarias.

Corolario 8.

Si entre las dos paralelas DC, EF se toma un punto qualquiera como I, y á él se tiran dos líneas rectas CI, IE, estas padecerán mayor fuerza que las CF, FE: pues prolongada la CI hasta Q, y padeciendo IQ, QE, por el Corolario precedente, menor fuerza que IE, y por consiguiente CQ, QE, menor que CI, IE: CF, y FE que la padecen menor que CQ, QE la padecerán mucho menor que CI y IE.

Corolario 9.

De lo mismo se infiere, que con qualesquiera líneas que se termine el plano, ya sean rectas, curvas ó mixtas, como estas queden comprehendidas entre las dos paralelas EF, DC, siempre padecerán mayor fuerza que las dos CF y FE.

Co-

Corolario 10.

Quando mayor sea la longitud del plano, ú del exe DE, menor será la fuerza que padecerá, porque FR y RS padecen menor fuerza que FE: luego CR y RS la padecen tambien menor que CF y FE.

Corolario 11.

Un cuerpo compuesto de dos prismas triangulares ABC, AKC, en el qual BD y DK son mayores que $\frac{4}{3}$ DC, y los lados AB $=$ BC y CK $=$ KA son verticales, movido segun el exe horizontal KB, padecerá menor resistencia que si fuera terminado por qualesquiera superficies curvas: respecto que, por el problema, qualquiera seccion de él horizontal, terminada por las rectas AB, BC, CK y KA, padecerá menor resistencia que si fuere terminada por otras qualesquiera líneas.

Corolario 12.

Lo mismo se debe entender de qualesquiera otro prisma, aunque sus lados AB, BC, CK y KA no sean verticales, con tal que las secciones, ú diferenciales horizontales formen un ángulo constante con el horizonte; pues en tal caso la fuerza que padecerá qualquiera diferencial, será $mbda\left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{ubseu.n}{8(b^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$, expresando b la mitad del ancho del prisma; y siendo constante el ángulo n que forma la diferencial horizontal del cuerpo con el horizonte, no pueden, por consiguiente, variar las resultas que produxo el Problema, que contendrá igualmente este caso substituyendo $usen.n$ por u. PRO-

PROPOSICION 57.

Dada la longitud del plano horizontal BK, y su ancho AC, se pide la BD ó el lugar donde se debe colocar dicho ancho para que, formados los dos triángulos isósceles ABC, CKA que terminan el plano, encuentre este la máxima ó mínima resistencia posible, movido horizontalmente según el exe BK.

Llamando BK $= e$, DC $= b$ y BD $= x$, será (*Proposicion 56.*) la fuerza que padecerá BC $=$

$$\left(ab + \frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2}{4(x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{u^2b^3}{64(x^2+b^2)}\right)mda:$$

la que padecerá CK $= mda\left(ab - \frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2}{4((e-x)^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{u^2b^3}{64((e-x)^2+b^2)}\right)$

y la resistencia que de ambas resulta $=$

$$mda\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2}{4(x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{u^2b^3}{64(x^2+b^2)} + \frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2}{4((e-x)^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{u^2b^3}{64((e-x)^2+b^2)}\right)$$

Habiendo de ser esta la máxima ó mínima, será su diferencial $mda\left(-\frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2xdx}{4(x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2u^2b^3xdx}{64(x^2+b^2)^2}\right) +$

$$mda\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2(e-x)dx}{4((e-x)^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2u^2b^3(e-x)dx}{64((e-x)^2+b^2)^2}\right) = 0;\ ó$$

partiendo por $\frac{1}{4}mda.ub^2dx$, será

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}(e-x)}{((e-x)^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{ub(e-x)}{8((e-x)^2+b^2)^2} = \frac{a^{\frac{1}{2}}x}{(x^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{ubx}{8(x^2+b^2)^2}$$

de cuya equacion se deducirá el valor de $x =$ BD en todos los varios que se les dieren á a y u.

Co-

Corolario 1.

La equacion no resuelve el caso en que es $a=0$, ó $\frac{a}{u}=0$, puesto que quedará en él ---------- $-\frac{ub(e-x)}{8((e-x)^2+b^2)^2}=\frac{ubx}{8(x^2+b^2)^2}$; lo que es imposible.

Corolario 2.

Al contrario, si fuere $\frac{u}{a}=0$, quedará ----- $\frac{a^{\frac{1}{2}}(e-x)}{((e-x)^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}x}{(x^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$; lo que dá $x=\frac{1}{2}e$ por el valor de x que produce la mínima resistencia.

Corolario 3.

A medida que aumenta la razon $\frac{u}{a}$, aumenta tambien la x, que produce la mínima resistencia; pero sin llegar jamas á ser $x=e$, puesto que para este caso quedara $0=\frac{a^{\frac{1}{2}}e}{(e^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{ube}{8(e^2+b^2)^2}$; lo que es imposible.

Corolario 4.

Al contrario, el valor de x, que produce la máxima resistencia, es menor que $\frac{1}{2}e$: y es $x=0$ quando es $a^{\frac{1}{2}}=\frac{ub}{8(e^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}$.

PRO-

PROPOSICION 58.

Fig. 69. Que un cuerpo ABFA terminado por dos bases horizontales triangulares y semejantes ABC, DEF, rectángulas en A y D, y por los otros tres planos ABED, CBEF y ACFD, siendo vertical el ABED, se mueva horizontalmente en el fluido, y en la direccion de este propio plano ABED, hallar la relacion entre la profundidad AD, y la anchura DF de la base, para que siendo constante el volumen del cuerpo, padezca este la menor resistencia posible.

Supóngase que GHI sea una seccion ú diferencial horizontal del cuerpo, que por consiguiente será un triángulo semejante á las bases: prolongada la GH, tírese la vertical CK, ó paralela á AG, y llámense $AB = e$, $AC = b$, $AG = CK = a$, y $HK = z$. Con esto será $GH = b - z$, el seno de $GIH = ABC = \frac{b}{(b^2 + e^2)^{\frac{1}{2}}}$, y la fuerza que padecerá la diferencial horizontal $= mda(b-z)\left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{ubS}{8(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$, expresando S el seno del ángulo que forma el plano CBEF con el horizontal GHI; pero es $S = \frac{a(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{1}{2}}}$: luego la fuerza que padecerá la diferencial $= mda(b-z)\left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{uba(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}}{8(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2 = mada(b-z)\left(1 + \frac{uba^{\frac{1}{2}}}{8(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$. Igualmente, siendo los dos triángulos ABC, GIH semejantes, será $b : e = b - z : GI = \frac{e(b-z)}{b}$: luego el area de GIH =

$\frac{e(b-z)^2}{2b}$, y el espacio que ocupa la diferencial horizontal $=\frac{eda(b-z)^2}{2b}$: el qual habiendo de ser constante, por la condicion del Problema, será $\frac{eda(b-z)^2}{2b}$ $=q^3$, expresando q una constante: cuyo valor, substituido en la fuerza, quedará en

$$\frac{2mbaq^3}{e(b-z)}\left(1+\frac{uba^{\frac{1}{2}}}{8(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2.$$ Para la resolucion del Problema tenemos que igualar la diferencial de esta fuerza á la del espacio q^3; pero siendo esta cero, lo será tambien aquella, y tendremos

$$\frac{dz}{b-z}-\frac{2uba^{\frac{1}{2}}dz}{8(b-z)^2(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{2uba^{\frac{1}{2}}e^2zdz}{8(b-z)(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$-\frac{u^2b^2adz}{64(b-z)^2(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)}-\frac{2u^2b^2ae^2zdz}{64(b-z)(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^2}=0,$$

cuya equacion se divide justamente por $-\frac{dz}{b-z}$, y queda

$$1+\frac{2uba^{\frac{1}{2}}}{8(b-z)(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{2uba^{\frac{1}{2}}e^2z}{8(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{3}{2}}}+$$
$$\frac{u^2b^2a}{64(b-z)(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)}+\frac{2u^2b^2ae^2z}{64(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^2}=0.$$

Como, tomando la z positiva, ú de K á H, no puede ser mayor que $=b$, todos los terminos de esta equacion son positivos, y por consiguiente no dan valor alguno á la z, y asi solo nos queda el que resulta de la cantidad $-\frac{dz}{b-z}$, por la qual se dividió la primera equacion que dá, poniendo z negativo, $z=-\infty$: esto es, la base GH, de la diferencial horizontal, ha de ser infinita para que padezca la menor fuerza posible:

ble: y por consiguiente todo el cuerpo se ha de reducir á un plano horizontal de amplitud infinita, ó á una diferencial horizontal de la misma amplitud, para que padezca la menor fuerza posible.

Corolario 1.

Fig. 70. Un duplo prisma AFCHA, en quien las dos bases horizontales sean iguales, y AE, BF, CG y DH sean verticales, padecerá, pues, menos resistencia que qualquiera otro su igual, en que la base inferior EFGH sea menor que la superior ABCD.

Corolario 2.

Lo mismo que se ha dicho de los prismas, se debe entender de qualquiera otro cuerpo, en quien las bases ó secciones horizontales no sean triángulos, sino planos terminados por una curva qualquiera como Fig. 71. ABC: pues dividida la diferencial horizontal en varias quadrículas sensiblemente planas, para cada una de por sí, se demonstrará lo propio, y por consiguiente de todas, ú de toda la diferencial horizontal, así como de todo el cuerpo.

PROPOSICION 59.

Hallar la línea que debe terminar un plano horizontal, para que, movido en un fluido horizontalmente, experimente la máxima ó mínima fuerza posible, comprehendiendo al mismo tiempo la máxima ó mínima area.

Ya se resolvió la primera parte ó condicion de este Problema (*Propos.* 55.); y hallamos que la diferencial de la fuerza que padece una diferencial de la lí-

linea, es $mdaddy\left(a \pm \frac{a^{\frac{1}{2}} u dy}{2(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}} \pm \frac{a^{\frac{1}{2}} u dy^3}{4(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}\right)+$ $mdaddy\left(\frac{3u^2dy^2}{64(dx^2+dy^2)} - \frac{2u^2dy^4}{64(dx^2+dy^2)^2}\right)$. Esta diferencial se ha de igualar á la que resulta de $mdaxdy$, que es la diferencial del area, y es $mdaxddy$: luego despues de haber partido por $mdaddy$, tendremos

$$a \pm \frac{a^{\frac{1}{2}} u dy}{2(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}} \pm \frac{a^{\frac{1}{2}} u dy^3}{4(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3u^2dy^2}{64(dx^2+dy^2)} - \frac{2u^2dy^4}{64(dx^2+dy^2)^2} = x.$$

Substitúyase ahora $-dy = \frac{zdx}{b}$, expresando z una variable, y b una constante, y será

$$x = a \pm \frac{a^{\frac{1}{2}} uz}{3(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(2b^2+z^2) + \frac{u^2z^2}{64(b^2+z^2)^2}(3b^2+z^2).$$

La diferencial de esta equacion es

$$dx = \pm \frac{a^{\frac{1}{2}} ub^2dz}{4(b^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}(2b^2-z^2) + \frac{2u^2b^2zdz}{64(b^2+z^2)^3}(3b^2-z^2),$$

cuyo valor substituido en la antecedente $-dy = \frac{zdx}{b}$,

resulta $-dy = \pm \frac{a^{\frac{1}{2}} ubzdz}{4(b^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}(2b^2-z^2) + \frac{2u^2bz^2dz}{64(b^2+z^2)^3}(3b^2-z^2)$:

é integrando $b-y = \pm \frac{a^{\frac{1}{2}} ubz^2}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{u^2b}{32}\int \frac{z^2dz}{(b^2+z^2)^3}(3b^2-z^2)$.

Suponiendo el valor de z, se tienen por consiguiente los de x y y, y se puede describir la linea.

Corolario I.

Si en lugar de la máxima ó mínima fuerza se quisiere que sea la máxima ó mínima resistencia la que

haya de padecer la línea, por componerse de dos partes, una impelente y otra impelida, será la diferencial de la resistencia que redúnda de la fuerza que padecen dos diferenciales opuestas de la línea $=$

$$mdaddy\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}udy}{2(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{a^{\frac{1}{2}}udy}{2(dX^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}udy^3}{4(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{a^{\frac{1}{2}}udy^3}{4(dX^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}\right)+$$

$$mdaddy\left(\frac{3u^2dy^2}{64(dx^2+dy^2)}-\frac{3u^2dy^2}{64(dX^2+dy^2)}-\frac{2u^2dy^4}{64(dx^2+dy^2)^2}+\frac{2u^2dy^4}{64(dX^2+dy^2)^2}\right)$$

y la del area $mdady(x+X)$, á quien se debe igualar, $mdaddy(x+X)$, expresando x las abcisas de la parte impelente, y X las de la impelida. Partiendo por $mdaddy$, y substituyendo $-dy=\frac{zdx}{b}=\frac{ZdX}{b}$,

$$\text{será } x+X=\frac{a^{\frac{1}{2}}uz}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(2b^2+z^2)+\frac{a^{\frac{1}{2}}uZ}{4(b^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}(2b^2+Z^2)+$$

$$\frac{u^2z^2}{64(b^2+z^2)^2}(2b^2+z^2)-\frac{u^2Z^2}{64(b^2+Z^2)^2}(2b^2+Z^2).$$

Corolario 2.

Si se supone con esto, que se tomen constantemente unas abcisas iguales á las otras, ó que sea $x=X$, será tambien $z=Z$, y quedará $x=\frac{a^{\frac{1}{2}}uz}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(2b^2+z^2)$:

$$y\ b-y=\frac{a^{\frac{1}{2}}ubz^2}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\ \text{ó}\ y=b-\frac{a^{\frac{1}{2}}ubz^2}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Corolario 3.

Multiplicando en cruz las dos equaciones antecedentes, resulta

(b—

$\frac{(b-y)a^{\frac{1}{2}}uz(2b^2+z^2)}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}ubz^2x}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$: y partiendo por $\frac{a^{\frac{1}{2}}uz}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $(b-y)(2b^2+z^2)=bzx$; ó $b-y= \frac{bzx}{2b^2+z^2}$, equacion á la curva.

Corolario 4.

Si se supone $b-y=0$, será $x=0$, y $y=b$: tomando, pues, C por el origen, y CB, perpendicular á la abcisa CA, $=b$, será el principio de donde nace la curva para ambas partes impelente é impelida. Fig. 72.

Corolario 5.

Si tomamos la diferencial de $x=\frac{a^{\frac{1}{2}}uz(2b^2+z^2)}{4(b^2+z^3)^{\frac{3}{2}}}$, será $dx=\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}udz\left(\frac{2b^2+3z^2}{(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{6b^2z^2+3z^4}{(b^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right)$, que igualada á cero, dá reduciendo $2b^2-z^2=0$, ó $z=b\sqrt{2}$. Este valor substituido en el de x, resulta $x=\frac{a^{\frac{1}{2}}ub\sqrt{2}(2b^2+2b^2)}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{9}a^{\frac{1}{2}}u\sqrt{6}$. Este es, pues, el valor de la máxima x, y por consiguiente, siendo $CA=\frac{1}{9}a^{\frac{1}{2}}u\sqrt{6}$, será A el punto hasta donde se estiende la curva.

Corolario 6.

Si se toma, asimismo, la diferencial de $y=b-\frac{a^{\frac{1}{2}}ubz^2}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, será $dy=-\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}ubdz\left(\frac{2z}{(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3z^3}{(b^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right)$,

que

que igualada á cero dá $z=0$, y $2b^2-z^2=0$, ó $z=b\sqrt{2}$, como en el Corolario precedente. El primer valor de $z=0$, substituido en el de y, dá $y=b$, por lo que b es una de las máximas ordenadas, y la que corresponde al origen C, pues siendo $z=0$, es (*Cor.* 3.) $x=0$. El segundo valor de $z=b\sqrt{z}$, substituido en el de y dá la mínima $y=b-\frac{a^{\frac{1}{2}}u}{6\sqrt{3}}$: y corresponde al punto A de la máxîma x.

Corolario 7.

Si fuere, pues, $y=b-\frac{a^{\frac{1}{2}}u}{6\sqrt{3}}=0$, el punto A caerá sobre el exe CA. Si fuere $b>\frac{a^{\frac{1}{2}}u}{6\sqrt{3}}$ no habrá aun llegado á él, y la curva no habrá cerrado el espacio, y si fuere $b<\frac{a^{\frac{1}{2}}u}{6\sqrt{3}}$ la curva cortará al exe.

Corolario 8.

En el caso de $\frac{dy}{dx}=\frac{z}{b}=\infty$ es $z=\infty$, cuyo valor substituido en el de $y=b-\frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, da $y=b-0$, ó $y=b$. Es el valor de la otra máxîma ordenada, y la que corresponde al punto F de las abscisas.

Corolario 9.

Por los dos Corolarios 5 y 6 tenemos $-\frac{dy}{dx}=\frac{bz(2(b^2+z^2)-3z^2)}{(2b^2+3z^2)(b^2+z^2)-6b^2z^2-3z^4}=\frac{z}{b}$. En el punto B,

B, en donde es $z=0$, es $-\frac{dy}{dx}=0$: esto es, la curva es paralela al exe; asi como en el punto D, donde es $z=\infty$, es $-\frac{dy}{dx}=\infty$: esto es, la curva es perpendicular al exe; y en el punto A, donde es $z=b\sqrt{2}$, es $\frac{-dy}{dx}=\frac{b\sqrt{2}}{b}=\frac{\sqrt{2}}{1}$: con que si fuere AG tangente á la curva en A, será $\frac{AE}{EG}=\frac{\sqrt{2}}{1}$.

Corolario 10.

Suponiendo $2b^2z+z^3=(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$, será $x=\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}u=$ CF. De esta equacion resultan dos valores de z, uno $z=\infty$, que ya nos dió el valor de $y=$ FD, y otro $z=\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}}$, que dá $y=\text{FH}=b-\frac{a^{\frac{1}{2}}u(-1+\sqrt{5})}{(2+2\sqrt{5})^{\frac{3}{2}}}$.

Corolario 11.

Por lo deducido se vé, que la curva tiene dos ramas: la primera BHA, es la que padece la mínima resistencia; y la segunda AD, la que padece la máxima.

Corolario 12.

La amplitud de esta ED es $=\frac{1}{9}a^{\frac{1}{2}}u\sqrt{6}-\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}u=\frac{1}{36}a^{\frac{1}{2}}u(4\sqrt{6}-9)$: luego la relacion entre su amplitud ED, y su longitud EA$=b$, será $\frac{a^{\frac{1}{2}}u(4\sqrt{6}-9)}{36b}$: así como la relacion entre la amplitud CB$=b$, y la longitud

gitud CA $=\frac{1}{9}a^{\frac{1}{2}}u\sqrt{6}$, de la otra, $=\frac{9b}{a^{\frac{1}{2}}u\sqrt{6}}$. Pero en el punto A es (*Cor.* 7.) $b=\frac{a^{\frac{1}{2}}u}{6\sqrt{3}}$: luego la primera relacion será $=\frac{6\sqrt{3}(4\sqrt{6}-9)}{36}=\frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{2}$: y la segunda $=\frac{9}{6\sqrt{3}\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{2}}{1}$.

Corolario 13.

Las dos ramas son, pues, muy distintas, teniendo la AD mucha mas agudeza EAD, que la BHA en BAC.

Corolario 14.

Como, tanto la $x=\frac{a^{\frac{1}{2}}u(2bz^2+z^3)}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, como la $b-y=\frac{a^{\frac{1}{2}}ubz^2}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, se hallan multiplicadas por $a^{\frac{1}{2}}u$, su relacion será constante, tengan los valores que se quisieren la a y la u: luego si b es la misma, para todas profundidades en el fluido, como para todas velocidades, sirve la misma curva.

Corolario 15.

El cuerpo que menor resistencia padecerá en el fluido, teniendo la misma anchura, ó la misma relacion entre CB y CA, y que al mismo tiempo encerrará mayor espacio, será el que tubiere todas sus secciones horizontales como IBA.

Co-

Corolario 16.

Si se quisiere tomar de la curva una parte como KB, de suerte que la longitud KL, sea á la anchura LB, como un numero dado n, á la unidad, haremos $KL = x = \frac{a^{\frac{1}{2}}u(2b^2z+z^3)}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, y $LB = b - y = \frac{a^{\frac{1}{2}}ubz^2}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, y será $2b^2z+z^3 = nbz^2$, ó $2b^2+z^2 = nbz$, que dá $z = \frac{1}{2}b(n \pm \sqrt{n^2-8})$. Substituyendo este valor en el de $LB = \frac{a^{\frac{1}{2}}ubz^2}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, resulta $LB = \frac{a^{\frac{1}{2}}u(n^2 \pm n\sqrt{n^2-8}-4)}{(4+2(n^2 \pm n\sqrt{n^2-8}-4))^{\frac{3}{2}}}$ y $a^{\frac{1}{2}}u = \frac{LB.(4+2(n^2 \pm n\sqrt{n^2-8}-4))^{\frac{3}{2}}}{n^2 \pm n\sqrt{n^2-8}-4}$: cuyo valor substituido en el de la máxima $CA =$ (*Corol.* 5.) $\frac{1}{9}a^{\frac{1}{2}}u\sqrt{6}$, y en el de CB (*Cor.* 7.) $= \frac{a^{\frac{1}{2}}u}{6\sqrt{3}}$, se tendrán CB y CA, y se podrá describir, como antes, la curva, que pasará por el punto K.

Escolio.

Supuesta $b = 1$, y z como en la primera coluna, se hallan las abcisas y ordenadas como en la segunda y tercera coluna de la Tabla siguiente.

Tabla de las abcisas y ordenadas de la curva, que encerrando el máxîmo ó mínimo espacio, experimenta la mínima ó máxîma resistencia en el fluido.

z	x	$b-y$	
0	0	0	Prímera rama.
$\frac{1}{10}$	$\frac{1809}{102\sqrt{303}}$	$\frac{45}{101\sqrt{303}}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{99\sqrt{51}}{2.17^2}$	$\frac{6\sqrt{51}}{17^2}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{27\sqrt{15}}{50}$	$\frac{3\sqrt{15}}{25}$	
1	$\frac{9\sqrt{6}}{8}$	$\frac{3\sqrt{6}}{8}$	
$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	1	
$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	1	Segunda rama.
2	$\frac{18\sqrt{15}}{25}$	$\frac{6\sqrt{15}}{25}$	
4	$\frac{108\sqrt{51}}{17^2}$	$\frac{24\sqrt{51}}{17^2}$	
∞	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0	

CA-

CAPITULO 9.

Del movimiento progresivo horizontal que toman los cuerpos flotantes, siendo impelidos por una ó mas potencias.

PROPOSICION 60.

HAllar la relacion entre el tiempo y la velocidad que tomará un cuerpo flotante, siendo impelido por una potencia, cuya direccion sea horizontal, colocada en el centro de las resistencias, suponiendo que este concurra con el de gravedad.

Siendo la direccion de la potencia horizontal, lo será asimismo la de la resistencia, y por concurrir ambas en un punto, será la resulta de las fuerzas como una sola potencia que actua sobre el centro de gravedad, por suponerse concurrir este con el de las resistencias. El cuerpo no girará por consiguiente, y solo se moverá horizontalmente, segun la direccion de la potencia. Siendo esta π y M la masa del cuerpo, tendremos (*Cor.* 1. *Ax.* 2. *Lib.* 1.) $dt(\pi - Ru \mp Qu^2 - Nu^4) = M du$, expresando $Ru + Qu^2 + Nu^4$ las resistencias que (*Corolar.* 8. *Proposic.* 43.) padece el cuerpo: ó $dt = \frac{M du}{\pi - Ru \mp Qu^2 - Nu^4}$, cuya equacion integrada dá $t = M \int \frac{du}{\pi - Ru \mp Qu^2 - Nu^4}$: ó partiendo numerador y denominador por N, será $t = \frac{M}{N} \int \frac{du}{\frac{\pi}{N} - \frac{Ru}{N} \mp \frac{Qu^2}{N} - u^4}$. Que sea ahora - - - - -

 π

$$\frac{\pi}{N}-\frac{Ru}{N}\mp\frac{Qu^2}{N}-u^4=\left.\begin{array}{l}f^2gh-f^2(g-h)u-f^2u^2-u^4\\-gh(g-h)u+(g-h)^2u^2\\+ghu^2\end{array}\right\}$$ en cu-

ya equacion hay dos raices reales, una positiva $u=h$, y otra negativa $a=-g$, con dos imaginarias contenidas en la equacion $f^2-(g-h)u+u^2=0$: y tendremos $dt=\frac{(A+Bu)du}{f^2-(g-h)u+u^2}+\frac{Cdu}{g+u}+\frac{Ddu}{h-u}$, siendo $D=\frac{M}{N(g+h)(2h^2-gh+f^2)}$, $C=\frac{M}{N(g+h)(2h^2-gh+f^2)}$, $B=D-C$ y $A=C(2g-h)-D(g-2h)$: de donde se deduce $t=\frac{A+\frac{1}{2}B(g-h)}{f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}\left(Arc.tang.\left(u-\frac{1}{2}(g-h)\right)-Arc.tang.\left(V-\frac{1}{2}(g-h)\right)\right)+\frac{1}{2}Bl\left(\frac{f^2-(g-h)u+u^2}{f^2-(g-h)V+V^2}\right)+Cl\frac{g+u}{g+V}+Dl\frac{h-V}{h-u}$: siendo los arcos los de un círculo, cuyo radio es $(f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2)^{\frac{1}{2}}$, y expresando V la velocidad positiva con que empezó á moverse el cuerpo.

Corolario I.

En caso de tener el cuerpo una velocidad determinada, y disminuir esta, por ser mayores las fuerzas de las resistencias que la potencia π, la equacion será $dt(\pi-Ru\mp Qu^2-Nu^4)=-Mdu$ la misma que antes, con sola la diferencia de ser du negativo: luego la misma equacíon y raices satisfacen en ambos casos, solo con la diferencia de que en este, por haber $-Mdu$, se debe mudar á los integrales que resultan el signo, para tener el verdadero valor. Será, pues, en este caso

$$t=\frac{A+\frac{1}{2}B(g-h)}{f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}\left(Arc.tang.\left(V-\tfrac{1}{2}(g-h)\right)-Arc.tang.\left(u-\tfrac{1}{2}(g-h)\right)\right)$$ +

$$+\tfrac{1}{2}B\,l\left(\frac{f^2-(g-h)V+V^2}{f^2-(g-h)u+u^2}\right)+C\,l\frac{g+V}{g+u}+D\,l\frac{h-u}{h-V}.$$

Corolario 2.

Si en el propio caso de disminuir la velocidad se quisiere incluir aquel en que es $\pi = o$, será $h = o$, por haberse de desvanecer tambien su termino correspondiente f^2gh. Substituyendo, pues, en el ultimo valor de t el de $h = o$, se tendrá el propio de este caso.

Corolario 3.

En caso de haber adquirido el cuerpo su máxîma ó mínima velocidad es $du = o$: luego tambien será $\pi - Ru \mp Qu^2 - Nu^4 = o$, como asimismo la raiz real positiva $h - u = o$: luego la máxîma ó mínima velocidad que puede adquirir el cuerpo es h.

Corolario 4.

Como en el caso de adquirir el cuerpo su máxîma ó mínima velocidad h, es $D\,l\frac{h-V}{h-u}$, ó $D\,l\frac{h-u}{h-V} = \infty$, se sigue, que tambien será $t = \infty$, ó que el cuerpo necesitará un tiempo infinito para adquirir su máxîma ó mínima velocidad, ó lo que es lo mismo, que jamas podrá adquirir esta.

Corolario 5.

Si el cuerpo tubiere sus dos mitades impelente é impelida iguales y semejantes, será $Q = o$: y si á mas de esto fuere muy grande, ó estubiere muy sumergido en el fluido, sin que sea excesiva la velocidad

máxî-

máxîma h, se puede despreciar Nu^4, que resulta de la desnivelacion, y quedará $t = M\int \frac{du}{\pi - Ru} = -$ $\frac{M}{R} l \frac{\pi - RV}{\pi - Ru}$ en caso de aumentar la velocidad; y $t = \frac{M}{R} l \frac{\pi - Ru}{\pi - RV}$ en el de disminuir.

Corolario 6.

Con las condiciones precedentes será la máxîma ó mínima velocidad $= \frac{\pi}{R}$.

Corolario 7.

En caso de adquirirla el cuerpo será tambien $t = \frac{M}{R} l \frac{\pi - RV}{\pi - Ru} = \infty$; ó $t = \frac{M}{R} l \frac{\pi - Ru}{\pi - RV} = \infty$.

Corolario 8.

Tambien será $\frac{Rt}{M} = l \frac{\pi - RV}{\pi - Ru}$: y suponiendo $lq = 1$, $\frac{Rt}{M} lq = l \frac{\pi - RV}{\pi - Ru}$, ó $q^{\frac{Rt}{M}} = \frac{\pi - RV}{\pi - Ru}$: que dá la velocidad á qualquiera tiempo del curso, aumentando la velocidad, $u = \frac{\pi}{R}\left(1 - \frac{1}{q^{\frac{Rt}{M}}}\right) + \frac{V}{q^{\frac{Rt}{M}}}$.

Corolario 9.

En el caso de disminuir, será $\frac{Rt}{M} = l \frac{\pi - Ru}{\pi - RV}$, y

y $q^{\frac{Rt}{M}} = \frac{\pi - Ru}{\pi - RV}$: que dá la velocidad á qualquiera tiempo del curso, $u = \frac{\pi}{R}\left(1 - q^{\frac{Rt}{M}}\right) + Vq^{\frac{Rt}{M}}$.

Corolario 10.

Siendo $\frac{\pi - Ru}{\pi - RV}$ de la especie de quebrado, tambien lo será q: por consiguiente, quando sea $t = \infty$, será $q^{\frac{Rt}{M}} = 0$: luego en este caso será, como antes, la misma velocidad $u = \frac{\pi}{R}$.

Corolario 11.

Si en el valor $\frac{\pi}{R}$ de la máxîma velocidad que resulta despreciando la desnivelacion, se substituyen sus iguales $\pi = Nf^2gh$, y $R = N(f^2 + gh)(g - h)$, será dicha máxîma velocidad $= \frac{f^2gh}{(f^2 + gh)(g - h)}$: cuya cantidad siempre es mayor que la velocidad máxîma h que resulta atendiendo á la desnivelacion, á menos que no sea $f^2 < g(g - h)$.

Corolario 12.

El caso en que una velocidad máxîma es igual á la otra, es aquel en que es $f^2 = g(g - h)$. Si este valor de f^2 se substituye en el tercer término de la equacion, supuesta (*Prop.* 60.) $u^2(-f^2 + (g - h)^2 + gh)$, quedará este en h^2u^2, de suerte que quedará positivo: lue-

luego no puede la velocidad máxima b ser mayor que $\frac{\pi}{R}$; á menos que no sea $\mp Q$ positivo, ó lo que es lo mismo, que la parte del cuerpo impelente no sea mucho mas aguda que la impelida.

Corolario 13.

Si suponemos $\frac{f^2gb}{(f^2+gb)(g-b)}=b+\theta$, expresando θ la diferencia entre las dos máximas velocidades: esto es, $\theta=\frac{\pi}{R}-b$, quedará dicha diferencia $\theta=$ $\frac{f^2gb}{(f^2+gb)(g-b)}-b=\frac{b^2(f^2-g(g-b))}{(f^2+gb)(g-b)}$.

Escolio 1.

Aseguramos en la Proposicion, que $f^2-(g-b)u+u^2$ contiene dos raices imaginarias, aunque puede tener dos reales si $\frac{1}{4}(g-b)^2>f^2$; pues para que se llegue á este extremo es preciso que el tercer termino $u^2(-f^2+(g-b)^2+gb)$ sea excesivamente positivo, ó que la parte impelente del cuerpo sea excesivamente aguda respecto de la impelida; lo que en la práctica no es regular.

Escolio 2.

Supusimos en la Proposicion, para facilitar el cálculo, que la potencia estubiese colocada en el centro de gravedad, y que con este concurriese el de las resistencias; pero esta suposicion se hace imposible, á menos que no varie el centro de gravedad por variar el de las resistencias, como se verá mas adelante, y como se puede colegir de solo considerar como varian las

las resistencias que resultan en la desnivelacion ; sin embargo quando estas no fueren excesivas , ó que el cuerpo no produgere inclinacion considerable , por separarse los dos centros , se puede despreciar la diferencia que resulta.

Escolio 3.

Aunque se haya deducido (*Cor.*4.) que el tiempo que necesita un cuerpo para adquirir su máxîma ó mínima velocidad es infinito , no por eso dexa de adquirirla casi toda en un tiempo muy corto. Que sea T el que necesita desde el reposo para adquirirla , y t el que necesita asimismo para adquirirla desde una velocidad primitiva V: y será $T = \frac{M}{R} l \frac{\pi}{\pi - Ru}$, y $t = \frac{M}{R} l \frac{\pi - RV}{\pi - Ru}$: con lo qual el tiempo que empleará desde el reposo hasta adquirir la velocidad V , será $T - t = \frac{M}{R} l \frac{\pi}{\pi - Ru} - \frac{M}{R} l \frac{\pi - RV}{\pi - Ru} = \frac{M}{R} l \frac{\pi}{\pi - RV}$. Que sea ahora V una velocidad poco menos que la máxîma $\frac{\pi}{R}$: sea, por exemplo $V = \frac{\pi}{R} - \frac{\pi}{100R} = \frac{\pi}{R}\left(1 - \frac{1}{100}\right)$, y será $T - t = \frac{M}{R} l \frac{\pi}{\pi - \pi\left(1 - \frac{1}{100}\right)} = \frac{M}{R} l 100 = \frac{M}{R} \cdot 4{,}6$: de suerte que si fuere $M = R$, será $T - t = 4'' \; 36'''$, tiempo que empleará el cuerpo desde el reposo , para adquirir una velocidad que no es menor que la máxîma , sino de $\frac{1}{100}$. Si fuere $M = 2R$, será duplo el tiempo , si triplo triplo , y así en adelante : de suerte , que aunque sea M cien veces mayor que R, no será el tiempo sino $4600'' = 7' \; 40''$.

En un paralelepípedo rectángulo que flota con su base paralela al horizonte, es $M = mbae$, expresando e la longitud del paralelepípedo, y $R = \frac{1}{3}mba^{\frac{3}{2}}$: luego $\frac{M}{R} = \frac{3e}{a^{\frac{1}{2}}}$, y $T - t = \frac{3e}{a^{\frac{1}{2}}}.(4'' \; 36''')$: si fuere, pues, $a = 1$, y $e = 20$, será el tiempo $T - t$, que empleará en adquirir una velocidad, solo $\frac{1}{100}$ menor que la máxima, $= 4' \; 36''$: por donde se ve, que á muy corto tiempo adquieren los cuerpos una velocidad que, sin error sensible, se puede suponer que sea la máxima. Lo mismo se dice del valor $Dl\frac{h-V}{h-u}$, que dá el tiempo infinito en caso de no despreciarse la desnivelacion.

PROPOSICION 61.

Hallar la relacion entre la velocidad y el espacio que corre un cuerpo flotante, impelido por una potencia, cuya direccion sea horizontal, colocada en el centro de las resistencias, suponiendo que este concurra con el de gravedad.

Por la Proposicion precedente tenemos $dt = \frac{Mdu}{\pi - Ru \mp Qu^2 - Nu^4}$, y (*Cor.4.Prop.3.Lib.1.*) $dt = \frac{de}{u}$, expresando e el espacio corrido: cuyo valor substituido dá $de = \frac{Mudu}{\pi - Ru \mp Qu^2 - Na^4}$. Será, pues, asimismo por la precedente $de = \frac{(A+Bu)du}{f^2 - (g-h)u + u^2} + \frac{Cdu}{g+u} + \frac{Ddu}{h-u}$, siendo $D = \frac{M}{N(g+h)(2h^2 - gh + f^2)}$, $C = \frac{M(1-g-h)}{N(g-h)(2g^2 - gh + f^2)}$, $B = D - C$, y $A = C(2g-h) - D(g-2h)$: con que igual-

igualmente será $e =$ - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\frac{A+\frac{1}{2}B(g-b)}{f^2-\frac{1}{4}(g-b)^2}\left(Arc.tang.\left(u-\tfrac{1}{2}(g-b)\right)-Arc.tang.\left(V-\tfrac{1}{2}(g-b)\right)\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}B\,l\left(\frac{f^2-(g-b)u+u^2}{f^2-(g-b)V+V^2}\right)+C\,l\frac{g+u}{g+V}+D\,l\frac{b-V}{b-u}.$$

Corolario 1.

Los integrales con que se halla el valor del espacio corrido e son, pues, los mismos que aquellos con que se halla el tiempo t en que se corre, con sola la diferencia de variar las constantes C, B y A.

Corolario 2.

El cuerpo no podrá, pues, adquirir su máxîma ó mínima velocidad, sino despues de haber corrido un espacio infinito.

Corolario 3.

Si el cuerpo tubiere sus dos mitades, impelente é impelida, iguales y semejantes, y se despreciare el efecto de la desnivelacion Nu^4, quedará $de = \frac{Mdu}{\pi - Ru}$: luego será $e = \frac{M}{R^2}\left(R(V-u)+\pi\, l\frac{\pi-RV}{\pi-Ru}\right)$.

Corolario 4.

Si el curso se empezare desde el reposo, será $V=0$: luego quedará $e = \frac{M}{R^2}\left(-Ru+\pi\, l\frac{\pi}{\pi-Ru}\right)$.

Corolario 5.

Si substituimos $u = \frac{\pi}{R}\left(1 - \frac{1}{100}\right)$, será $e = -\frac{M}{R^2}\left(-\pi\left(1-\frac{1}{100}\right)+\pi(4,6)\right) = \frac{M\pi}{R^2}(3,61)$.

Corolario 6.

El espacio corrido será, pues, en razon directa de la potencia y de la masa, y en inversa duplicada de la constante R que múltiplica las resistencias.

PROPOSICION 62.

Hallar la velocidad de las olas.

En las olas la potencia que actua es la gravedad de la misma ola. Si por qualquiera accidente se eleva parte de la superficie del fluido, su gravedad le obliga, despues de haber adquirido su mayor elevacion, á descender, y á tomar igual disposicion y figura hacia abaxo, que la que tubo hacia arriba, pues la accion y reaccion son iguales. De esta suerte en las olas ABCDEFG, la parte ABC que se eleva sobre el nivel AG, es igual y semejante á CDE, y esta á EFG, y asi de las demas. El movimiento de la ola consiste, pues, en elevarse el punto D al H, en cuyo caso se dice que la ola corrió desde B á H, ú desde I á D: y esta elevacion depende del peso de la coluna BI, que tiene que mover la masa BID. Sea, pues, la altura $BI = a$: la mitad de la amplitud de la ola $ID = b$: la parte ya baxada de esta $BK = DL = x$: t el tiempo, y u la velocidad de los puntos K ó L. Con esto tendremos (*Cor. Ax. 2, y Prin. 2.*) $32(a-2x)dt = (a+b)du$; ó substituyendo $dt = \frac{dx}{u}$, $32(a-2x)dx = (a+b)udu$:

é integrando, $64(ax-x^2)=(a+b)u^2$; ó $u=\frac{dx}{dt}=\frac{8(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a+b)^{\frac{1}{2}}}$: de que se deduce $dt=\frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}dx}{8(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}}$; é integrando, $t=\frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}}{8.\frac{1}{2}a}$ *Arc.*BM, siendo BMI un semicírculo descripto con el diámetro BI$=a$. Cayendo el punto K á I, y elevandose L á H, el arco BM degenera en todo el semicírculo BMI, y la razon $\frac{Arc.BM}{\frac{1}{2}a}$ es la de la semicircunferencia al radio, que llamada c, será, todo el tiempo en que cae el punto B al I, sube el D al H, ó pasa B á H, $=\frac{1}{8}(a+b)^{\frac{1}{2}}c$: el mismo (*Cor.*4. *Prop.*48.) que emplea en hacer su oscilacion un péndulo de la longitud $\frac{a+b}{2}$. Este tiempo $\frac{1}{8}(a+b)^{\frac{1}{2}}$, es á un segundo, como la longitud ID$=b$, que describe la ola en aquel, á $\frac{8b}{(a+b)^{\frac{1}{2}}c}$, longitud que correrá la ola en un segundo de tiempo, que es su verdadera velocidad.

Corolario I.

El tiempo $\frac{1}{8}(a+b)^{\frac{1}{2}}c$, es á qualquiera otro tiempo $\frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}}{8.\frac{1}{2}a}$*Arc.*BM, en que pasa el punto B, de B á N, como la longitud b que corre la ola en aquel, á BN$=\frac{b\,Arc.BM}{c.\frac{1}{2}a}$, de suerte, que si hacemos BN$=y$, será $y=\frac{b\,Ar.BM}{c.\frac{1}{2}a}$, equacion de la ola, ó curva BOC, que es una especie de cycloide. Es-

Escolio 1.

La relacion entre a y b es vária en las olas, segun ván en aumento ú disminucion. Las primeras son las que los Marineros llaman *picadas*, porque la fuerza del viento las va haciendo aumentar: en ellas la relacion $\frac{a}{b}$ es mayor que en las segundas, que son las mares que llaman de *leva*, ó que quedan despues que el viento ha disminuido, ó cesado enteramente: de suerte, que en estas puede ser b muchas veces mayor que a, porque conservandose constante b, disminuye continuamente a, hasta llegar á ser igual cero. Si en las primeras, ó en aquellas que ya han tomado todo el incremento posible, respecto del viento que las conmueve, se supone que el movimiento del punto B hacia H, se reduzca á la continua aplicacion ó rotacion del círculo BMI sobre la recta ID, tendremos PC $= \frac{1}{2}$BPI$= \frac{1}{4}ac$, y ID$= b = a + \frac{1}{2}ac = a(1 + \frac{1}{2}c)$. La mayor relacion $\frac{a}{b}$, será, pues, segun este supuesto $\frac{a}{a(1+\frac{1}{2}c)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}c} = \frac{1}{2,57}$: todas las demas serán menores y menores hasta el infinito.

Escolio 2.

El *Cavallero Newton* en su *Phylosophia natural* (*Prop.*46. *Lib.*2.) omite el valor de a: en este caso, la velocidad de la ola es $= \frac{8b^{\frac{1}{2}}}{c}$, y es como las raices quadradas de sus amplitudes, segun afirma aquel gran Autor.

CA-

CAPITULO 10.

De los momentos qne padecen los cuerpos en su movimiento progresivo horizontal.

PROPOSICION 63.

HAllar los momentos que padece un cuerpo que se mueve horizontalmente en un fluido.

La resistencia es una accion ó fuerza con que el fluido actua sobre el cuerpo, y por consiguiente una potencia: si se multiplican las varias que se exercen sobre las distintas diferenciales de las superficies del cuerpo, segun las direcciones perpendiculares á los planos que, pasando por ellas, coinciden con el exe de rotacion, por sus distancias al propio exe, la suma de los productos será la de los momentos.

Escolio.

Los momentos pueden resultar ó calcularse con respecto á tres exes, dos horizontales perpendiculares entre si, y uno vertical; y aun los dos primeros se pueden tomar arbitrariamente: nos reduciremos, sin embargo, á hallar los momentos que resultan con respecto al exe horizontal perpendicular á la direccion del movimiento, puesto que qualquiera direccion que este tenga se puede descomponer en dos perpendiculares á dos exes asignados.

PRO-

PROPOSICION 64.

Hallar los momentos que padece un cuerpo qualquiera flotante, que se mueve horizontalmente en un fluido inmovil.

Divídase la superficie del cuerpo en pequeñas quadrículas sensiblemente planas por planos horizontales y verticales, y hállese la fuerza que cada una padece en la direccion perpendicular al plano que, pasando por la misma quadrícula, coincide con el exe horizontal de rotacion. Multiplíquese esta fuerza, por la distancia desde la quadrícula al exe, y el producto será el momento. Sumando los que resultaren de todas las quadrículas, se tendrá el que padece todo el cuerpo. La fuerza horizontal que padece una quadrícula, se halló (*Proposicion* 30.) $=$ - - - - - - - - - - - - - -

$$mc\left(Da \pm \tfrac{1}{6}u\,sen.\theta\left((D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\tfrac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{46}u^2a\,sen.\theta^2\right):$$

luego (*Propos.* 25.) la que padece en la direccion perpendicular al plano que, pasando por la misma quadrícula, coincide con el exe, será $=$ - - -

$$\frac{mb\,se.x}{sen.n}\left(Da \pm \tfrac{1}{6}u\,se.\theta\left((D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{64}u^2a\,se.\theta^2\right):$$

expresando x el ángulo del complemento que forma la quadrícula con el plano que, pasando por ella, coincide con el exe, u la velocidad horizontal, y θ el ángulo que forma la quadrícula con la direccion del movimiento. Multiplicando por r, distancia de la quadrícula al exe, será el momento que padecerá $=$

$$\frac{mbr\,se.x}{sen.n.}\left(Da \pm \tfrac{1}{6}u\,se.\theta\left((D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{64}u^2a\,sen.\theta^2\right).$$

Corolario 1.

Los momentos que padecen las quadrículas de

las

las dos desnivelaciones serán ---------------

$$\frac{mbrse.x}{sen.n}\left(\mathrm{D}a-\tfrac{1}{6}usen.\theta\left(\left(\mathrm{D}+\tfrac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\mathrm{D}-\tfrac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{64}u^2use.\theta^2\right),$$

y ambos positivos : con que para atender á la desnivelacion del fluido se agregarán á los que antes se determinaron.

Corolario 2.

Descomponiendo las fuerzas, y por consiguiente los momentos que resultan con respeto á un exe horizontal, se pueden reducir estos á horizontales y verticales : aquellos serán el produćto de las fuerzas horizontales que padecen las quadrículas por su distancia vertical al plano horizontal que pasa por el centro de gravedad : y estos el produćto de las fuerzas verticales que padecen las mismas quadrículas por su distancia horizontal al plano vertical que pasa por el centro de gravedad.

Corolario 3.

Descomponiendo asimismo las fuerzas, y por consiguiente los momentos que resultan con respeto á un exe vertical, se pueden reducir estos á dos con direcciones perpendiculares entre sí, ambas con respeto al mismo exe.

Corolario 4.

Si el plano vertical coincidente con una de estas direcciones, cortare al cuerpo en dos partes iguales y semejantes, los momentos que resultaren en quantó á esta direccion se destruirán, porque los positivos de un lado, son iguales á los negativos del otro.

PROPOSICION 65.

Hallar los momentos que con respeto á un exe vertical padece qualquier cuerpo flotante que se mueve horizontalmente en direccion perpendicular al plano vertical que divide al cuerpo en dos partes iguales y semejantes.

La fuerza horizontal que padece qualquier quadrícula, ó diferencio-diferencial en que se divida el cuerpo, es (*Proposicion* 30.) - - - - - - - - - -
$mc\left(Da \pm \frac{1}{6}usen.\theta\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{1}{64}u^2 ase.\theta^2\right)$; ó substituyendo x por D, y dx por a, para representar x la altura vertical desde la quadrícula á la superficie del fluido, y dx la altura de aquella, será $= mcdx\left(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}usen.\theta\right)^2$: ó porque la parte impelente del cuerpo se supone igual y semejante á la impelida, la resistencia de dos quadrículas será (*Cor.* 3. *Propos.* 40.) $= \frac{1}{2}mcux^{\frac{1}{2}}dxsen.\theta$. Si fuère, pues, y la distancia horizontal desde el exe á la línea que junta las dos quadrículas, será el momento que estas padecerán $= \frac{1}{2}mcuyx^{\frac{1}{2}}dxsen.\theta$, y el que padecerá todo el cuerpo $= \frac{1}{2}muscyx^{\frac{1}{2}}dxsen.\theta$.

Corolario.

Los que padecen las quadrículas de las dos desnivelaciones serán $mcdx\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}usen.\theta\right)^2$.

DEFINICION 3.

A los momentos que padece un cuerpo con respeto

á

á un exe horizontal, se llama ***estabilidad***, en atencion á ser los que actúan para hacer perseverar el cuerpo en el estado en que antes se hallaba.

PROPOSICION 66.

Hallar la estabilidad, ó los momentos que padece qualquier cuerpo flotante que se mueve horizontalmente, en direccion perpendicular al exe horizontal de rotacion.

La fuerza horizontal que padece qualquier quadrícula es, por lo dicho antes, $= mcdx\left(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2$. Que sea ahora k la altura vertical desde el centro de gravedad del cuerpo hasta la superficie del fluido, y será $k-x$ la que hay desde el mismo centro hasta el plano horizontal que pasa por la quadrícula: por lo que $mcdx(k-x)\left(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2$ será el momento horizontal que padecerá aquella. Del mismo modo, si llamamos y la ordenada del cuerpo, ó distancia horizontal desde la quadrícula hasta el plano vertical coincidente con el exe de rotacion, será $mcdy\left(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2$ la fuerza vertical que padecerá la misma, y su momento vertical $= mcydy\left(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2$: luego el todo de los momentos que padecerá el cuerpo, serán $m\int cydy\left(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2 + m\int cdx(k-x)\left(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2$.

Corolario I.

Los que resultan de las desnivelaciones serán por

consiguiente $mfcydy\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}ufen.\theta\right)^2+mfcdx(k\pm x)\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}ufe.\theta\right)^2$: $+$ en la parte impelente, y $-$ en la impelida.

Corolario 2.

Si el plano vertical coincidente con el exe cortare al cuerpo en dos mitades iguales y semejantes, la suma de los momentos de dos quadrículas correspondientes en una y otra mitad será $=$ ------ $\frac{1}{2}mfcux^{\frac{1}{2}}ydyfen.\theta+\frac{1}{2}mfcu(k-x)x^{\frac{1}{2}}dxfen.\theta$.

Corolario 3.

Si y expresa la ordenada de la parte impelente, y Y la de la impelida: siendo los momentos de esta negativos, serán los que padezca el cuerpo $= mcydy\left(x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}ufe.\theta\right)^2 -$

$$mcYdY\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}ufe.\Theta\right)^2+mcdx(k-x)\left(\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}u(fe.\theta+fe.\Theta)\right)+\frac{1}{64}u^2(fe.\theta^2-fe.\Theta^2)$$

expresando θ y Θ los ángulos que forman las quadrículas con la direccion del movimiento, asi en la parte impelente como en la impelida.

Corolario 4.

Siendo $u=0$, ó no moviendose el cuerpo horizontalmente, se reducirán los momentos á solo los verticales $fmcyxdy-fmcYxdY = fmcx(ydy-YdY)$.

Corolario 5.

La cantidad $mfcx(ydy-YdY)$ es igual al producto del peso de todo el cuerpo por la distancia horizontal desde el centro de gravedad á la vertical que pasa por el

el del volumen: luego si llamamos P el peso de todo el cuerpo, y h la distancia horizontal desde el centro de gravedad á la vertical que pasa por el del volumen, será $m\int cx(ydy - YdY) = hP$.

Corolario 6.

Estos momentos verticales $m\int cx(ydy - YdY) = hP$ pueden ser positivos ó negativos segun fuere $\int cxydy$ mayor ó menor que $\int cxYdY$: ó segun que la vertical, que pasa por el centro de volumen, pase entre el centro de gravedad, y la parte impelente, ó entre dicho centro, y la parte impelida.

Corolario 7.

Si fuere, pues, $\int cxydy = \int cxYdY$, los momentos serán cero.

Corolario 8.

En los cuerpos formados por la revolucion de un plano qualquiera al rededor de un exe horizontal H, Fig. 62.
la vertical QH, que pasa por el centro de volumen, pasa tambien por dicho exe: luego llamando K la distancia HO de este al centro O de gravedad, y Δ el ángulo QHO, será la distancia desde O á la vertical $QH = h = K sen.\Delta$, y $hP = KP sen.\Delta$.

Corolario 9.

En cuerpos que no esten formados por la revolucion de un plano qualquiera al rededor de un exe horizontal, no dexará por ello de ser $hP = KP sen.\Delta$; pero K será variable, segun las varias inclinaciones $sen.\Delta$ que tubiere el cuerpo.

Co-

Corolario 10.

Si el centro H estubiere mas baxo que el de gravedad, será K negativo, y por consiguiente tambien lo será el momento KP*sen.*Δ.

Escolio.

Es necesario tener presente, que los momentos que proceden del peso del cuerpo son integros, por ser el peso efectivo; á diferencia de los momentos que proceden de las resistencias, porque estas deben disminuirse á los dos tercios (*Esc. Prop.* 36.): y así en caso de haberse de complicar unos con otros, se atenderá á disminuir á los dos tercios toda cantidad que multiplicare la velocidad *u*.

PROPOSICION 67.

Hallar en general el momento que padecerá un cuerpo qualquiera que no se mueve, compuesto de dos mitades iguales y semejantes, que las divide un plano coincidente con el exe horizontal.

Fig. 74. Que sea ABD el cuerpo compuesto de dos mitades iguales y semejantes ABE, DFE; C su centro de gravedad; BCE perpendicular á AD, siendo esta línea la que coincide con la superficie del fluido quando el cuerpo se halla recto, ó BCE vertical. Que el cuerpo se halle inclinado siendo GL la superficie del fluido, y tírense las verticales MC, FN, la primera que pase por el centro de gravedad C, y la segunda por el centro F que es el del volumen quando el cuerpo se halla recto. Con esto, llamando AD $=$ *e*, CE $=$ *k*, CF $= +$ H, y el ángulo de la inclinacion MCE $=$ CFN $=$ LED $=$ Δ, será la horizontal CN $=$ H*sen.*Δ, EM



$EM = k\,\text{sen.}\Delta$, y el area del triángulo DEL ó AEG, siendo DL ó AG sensiblemente líneas rectas, será $\frac{1}{8}e^2\,\text{sen.}\Delta$. El momento que padecerá toda la parte del cuerpo ABD, siendo el peso de este P, será $\pm CN.P = \pm HP\,\text{sen.}\Delta$: el que padecerá el triángulo LED, será $m(\frac{2}{3}EL + EM).\frac{1}{8}e^2\,\text{sen.}\Delta = m(\frac{1}{3}e + k\,\text{sen.}\Delta)\frac{1}{8}e^2\,\text{sen.}\Delta$, y el que padecerá el triángulo AEG, será - - - - - - $m(\frac{2}{3}EG - EM).\frac{1}{8}e^2\,\text{sen.}\Delta = m(\frac{1}{3}e - k\,\text{sen.}\Delta)\frac{1}{8}e^2\,\text{sen.}\Delta$: de suerte, que la suma de todos los momentos que padecen los triángulos como LED en toda la longitud del cuerpo, será $\frac{m}{8}\int ce^2\,\text{sen.}\Delta(\frac{1}{3}e + k\,\text{sen.}\Delta)$: y todos los correspondientes á $AEG = \frac{m}{8}\int ce^2\,\text{sen.}\Delta(\frac{1}{3}e - k\,\text{sen.}\Delta)$.

La suma de todos estos momentos con el $\pm HP\,\text{sen.}\Delta$ es el que padecerá todo el cuerpo: luego será - -

$$\pm HP\,\text{sen.}\Delta + m\int \tfrac{1}{8}ce^2\,\text{sen.}\Delta(\tfrac{1}{3}e + k\,\text{sen.}\Delta) + m\int \tfrac{1}{8}ce^2\,\text{sen.}\Delta(\tfrac{1}{3}e - k\,\text{sen.}\Delta)$$

$$= (\pm HP + \tfrac{m}{12}\int e^3c)\,\text{sen.}\Delta.$$

Escolio I.

En el cálculo se supuso que las dos líneas AD, GL se cortan sobre la BE, lo que de ordinario no sucederá así; pero suponiendo tambien que la inclinacion sea infinitamente pequeña, podrá suponerse sin error sensible: siendo necesario lo mismo para que en general se puedan tomar AG, DL como líneas rectas.

Corolario I.

Puesto que, estando el cuerpo parado en inclinaciones infinitamente pequeñas, es el momento $= (HP + \frac{m}{12}\int e^3c)\,\text{sen.}\Delta$: y asimismo (*Cor.5. Pro.65.*)

$=$

$= m\int cx(ydy - YdY) = hP$, serán, por consiguiente, en inclinaciones infinitamente pequeñas ------- $(HP + \frac{1}{12}m\int e^3 c)\int e.\Delta = m\int cx(ydy - YdY) = hP = KP\int e.\Delta$.

Corolario 2.

Substituyendo este valor de $m\int cx(ydy - YdY)$ en el momento, estando el cuerpo en movimiento, será tambien este en inclinaciones infinitamente pequeñas

$$= \left(PH + \tfrac{1}{12}m\int e^3 c\right)\int en.\Delta + \tfrac{1}{4}mu\int cx^{\frac{1}{2}}\left(ydy\int en.\theta + YdY\int en.\Theta\right) + -- \tfrac{1}{64}mu^2\int c\left(ydy\int e.\theta^2 - YdY\int e.\Theta^2\right) + \tfrac{1}{4}mu\int cx^{\frac{1}{2}}dx(k - x)(\int e.\theta + \int e.\Theta) + \tfrac{1}{64}mu^2\int cdx(k - x)(\int en.\theta^2 - \int en.\Theta^2).$$

Corolario 3.

Por suponerse el cuerpo de dos mitades iguales y semejantes, y las inclinaciones infinitamente pequeñas son, sin error sensible, cero la tercera y quinta cantidades: luego el momento quedará = ----

$$\left(HP + \tfrac{1}{12}m\int e^3 c\right)\int en.\Delta + \tfrac{1}{2}mu\int cx^{\frac{1}{2}}ydy\int e.\theta + \tfrac{1}{2}mu\int cx^{\frac{1}{2}}dx(k - x)\int e.\theta;$$

siendo $\frac{1}{2}mu\int cx^{\frac{1}{2}}ydy\int en.\theta$ los momentos verticales que padece el cuerpo, y $\frac{1}{2}mu\int cx^{\frac{1}{2}}dx(k - x)\int en.\theta$ los horizontales.

Escolio 2.

A estos momentos se deben añadir los que resulten de la desnivelacion; á menos que no se hagan despreciables: y lo mismo los que pudieren originarse de la accion de unas en otras superficies.

Es-

Escolio 3.

Leonardo Eulero y *M. Bouguer*, que son los Autores que han tratado este asunto con mas extension, no han calculado, sin embargo, sino los momentos que resultan en el caso del reposo, ú de ser $u = 0$. Las fórmulas manifiestan la diferencia que puede haber de unos casos á otros. En el del reposo es el momento solamente $\left(HP + \frac{1}{12} m \int e^3 c\right) sen.\Delta$: en el del movimiento $\left(PH + \frac{1}{12} m \int e^3 c\right) sen.\Delta + \frac{1}{2} mu \int c x^{\frac{1}{2}} y dy\, sen.\theta + \frac{1}{2} mu \int c x^{\frac{1}{2}} dx (k - x) sen.\theta$ la diferiencia, siendo u de algun valor considerable, es excesiva.

PROPOSICION 68.

Hallar los momentos que padece un paralelepípedo rectángulo que flota sobre un fluido, con dos de sus lados paralelos al horizonte, moviendose el paralelepípedo horizontalmente, en direccion paralela á dos de sus lados verticales.

El momento vertical que padecen los lados verticales es cero, por ser en ellos $dy = 0$: el horizontal $m \int c dx (k - x) \left(\frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} u (sen.\theta + sen.\Theta) + \frac{1}{64} u^2 (sen.\theta^2 - se.\Theta^2)\right)$ se reduce á $m \int c dx (k - x) \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} u = mcu\left(\frac{1}{3} k x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} x^{\frac{5}{2}}\right)$ por ser $sen.\theta = sen.\Theta = 1$. Los que padece la base son cero, por ser en ella $dx = 0$, $sen.\theta = sen.\Theta = 0$, $y = Y$, y $dy = dY$. Los que proceden de la desnivelacion por ser $dy = 0$, y $sen.\theta = sen.\Theta = 1$, son en una y otra superficie $m \int c dx (k \pm x)(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} u)^2$, y en

ambas juntas $2m\int cdxk\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}u\right)^{2}=2mck\left(\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}u+\frac{1}{64}u^{2}x\right)$, que substituyendo $\frac{1}{8}u$ por $x^{\frac{1}{2}}$, se reducen á $\frac{mcku^{4}}{3.64^{2}}$: de esta suerte los momentos que padece todo el paralelepípedo son $mc\left(\frac{1}{3}k\left(x^{\frac{3}{2}}u+\frac{u^{4}}{64^{2}}\right)-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}u\right)$, ó poniendo a por toda la altura vertical que tubiere sumergida en el fluido, serán $\left(\frac{1}{3}k\left(a^{\frac{3}{2}}u+\frac{u^{4}}{62^{2}}\right)-\frac{1}{5}a^{\frac{5}{2}}u\right)$.

Corolario 1.

Puesto que $mc\left(\frac{1}{3}k\left(a^{\frac{3}{2}}u+\frac{u^{4}}{64^{2}}\right)-\frac{1}{5}a^{\frac{5}{2}}u\right)$ son los momentos horizontales, dividiendolos por las resistencias asimismo horizontales (*Corolar.* 1. *Proposic.* 36.) $\frac{1}{3}mc\left(a^{\frac{3}{2}}u+\frac{u^{4}}{64^{2}}\right)$, quedará la distancia desde el centro de gravedad al de las resistencias horizontales $=k-\frac{3a^{\frac{5}{2}}}{5\left(a^{\frac{3}{2}}+\frac{u^{3}}{64^{2}}\right)}$, ó la que hay desde este centro á la superficie del fluido $=\frac{3a^{\frac{5}{2}}}{5\left(a^{\frac{3}{2}}+\frac{u^{3}}{64^{2}}\right)}$.

Corolario 2.

Estos momentos serán positivos, y obligarán á que gire el paralelepípedo, elevandole su extremo impelente, si fuere $k>\frac{3a^{\frac{5}{2}}}{5\left(a^{\frac{3}{2}}+\frac{u^{3}}{64^{2}}\right)}$; al contrario, serán ne-

ga-

gativos, y obligarán á que gire el paralelepípedo, baxandole su extremo impelente, si fuere

$k < \frac{3a^{\frac{5}{2}}}{5\left(a^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3}{64^2}\right)}$, y serán cero, ó quedará horizontal el paralelepípedo, si fuere $k = \frac{3a^{\frac{5}{2}}}{5\left(a^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3}{64^2}\right)}$.

Escolio.

La desnivelacion de los dos lados impelente é impelido alteran las fuerzas que padece la base del paralelepípedo, y por consiguiente resultan en ella momentos.

PROPOSICION 69.

Hallar los momentos que padece la base del propio paralelepípedo rectángulo, y resultan de las fuerzas que la comunican las dos desnivelaciones.

La fuerza horizontal que padece una diferencial de superficie plana impelente sumergida en el fluido, y producida por la desnivelacion de otra igualmente impelente es (*Proposicion* 48.)

$mcdx\left((D+x)^2 + \frac{1}{8}\left(usen.\Theta - \frac{xcos.n}{sen.n}\right)\right)$ expresando $D+x$ la altura vertical desde la diferencial hasta la superficie del fluido, que en nuestro caso es a: $sen.\Theta$ el seno que forma la direccion del movimiento con la superficie que causa la desnivelacion, que en nuestro caso es 1: y $\frac{xcos.n}{sen.n}$ la distancia horizontal desde la diferencial hasta el extremo de la superficie, que podemos llamar y: de esta suerte será $y = \frac{xcos.n}{sen.n}$, y

 dx

$dx = \frac{dy sen.n}{cos.n}$. Substituidos estos valores en la expresion se reduce á $\frac{mcdy sen.n}{cos.n}\left(a^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}(u-y)\right)^2$, y multiplicando esta fuerza horizontal por $\frac{cos.n}{sen.n}$ (*Propos.* 25.), se reduce á la vertical $mcdy\left(a^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}(u-y)\right)^2$. Llamando ahora e la longitud del paralelepípedo, será $\frac{1}{2}e-y$ la distancia desde su centro á la vertical que pasa por la diferencial: y por tanto el momento que esta padece será $= mc\left(\frac{1}{2}e-y\right)dy\left(a^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}(u+y)\right)^2$. Por igual razon, el momento que padecerá otra quadrícula igualmente distante del otro extremo de la base, á causa de la desnivelacion en la superficie impelida, será ------ $mc\left(\frac{1}{2}e-y\right)dy\left(a^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}(u-y)\right)^2$: y siendo este substractivo, quando el otro adictivo, será el que resulta de las dos $= \frac{1}{2}mca^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}e-y)(u-y)dy$: cuyo integral ------ $\frac{1}{2}mca^{\frac{1}{2}}y(\frac{1}{2}eu-\frac{1}{4}ey-\frac{1}{2}uy+\frac{1}{3}y^2)$, ó sustituyendo $y = u$, no siendo el espacio hasta donde alcanza la desnivelacion mayor que e, serán los momentos que padece toda la base $= \frac{1}{4}mca^{\frac{1}{2}}u^2(\frac{1}{2}e-\frac{1}{3}u)$.

Corolario 1.

Siendo $u > e$ se debe substituir en el integral $y = e$, y quedarán los momentos que padece la base $= \frac{1}{24}mca^{\frac{1}{2}}e^3$.

Co-

Corolario 2.

Como en estos momentos no se halla la velocidad u, se sigue, que siendo $u = e$, no pueden ya aumentar los momentos que padezca la base, por mucho que aumente la velocidad del paralelepípedo.

Corolario 3.

Siendo así e, como $e - \frac{1}{3}u$ positivos, se sigue que los momentos que en qualquier tiempo padezca la base serán positivos.

Corolario 4.

Los momentos que padecerá todo el paralelepípedo serán pues $mb\left(\frac{1}{3}k\left(a^{\frac{3}{2}}u + \frac{1}{64^2}u^4\right) - \frac{1}{3}a^{\frac{5}{2}}u + \frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}eu^2 - \frac{1}{3}u^3\right)\right)$.

Corolario 5.

Estos momentos serán positivos y obligarán á que gire el paralelepípedo, elevandole su extremo impelente, si fuere $k > \dfrac{12a^{\frac{5}{2}} - 15a^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}eu - \frac{1}{3}u^2\right)}{20\left(a^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{64^2}u^3\right)}$; y al contrario, serán negativos y obligarán á que gire el paralelepípedo, baxandole su extremo impelente, si fuere $k < \dfrac{12a^{\frac{5}{2}} - 15a^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}eu - \frac{1}{3}u^2\right)}{20\left(a^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{64^2}u^3\right)}$.

Co-

Corolario 6.

Como variando la u, varian tambien los momentos, y ha de girar el paralelepípedo, varian, por consiguiente, las resistencias, y ya no dependerán solamente de la velocidad, sino tambien de la disposicion ó inclinacion que tome el paralelepípedo.

Escolio 1.

Con esto basta para ver la diferencia que resulta de considerar al cuerpo sin movimiento horizontal, al de existir este. En aquel caso el paralelepípedo no padeciera momento alguno, ó para padecerle fuera preciso que se inclinase baxando su superficie impelente: en el segundo, no solo la padece sin esta precision, sino que pueden obligarle á que eleve su superficie impelente, mayormente siendo $k > \frac{1}{3}a$.

Escolio 2.

Con lo dicho se ve claramente lo que advertimos de paso en el Escolio 2 de la Proposicion 60: el cuerpo varía su disposicion variando con el movimiento sus resistencias; y por consiguiente no permanecen las mismas que aquellas sobre que se demonstró que necesitaba un tiempo infinito, para obtener su máxima velocidad: con que tampoco permanece dicha demonstracion sino próximamente en velocidades cortas.

Lema 3.

Si una quadrícula fuere paralela al exe horizontal de rotacion, y sobre ella se levantare una perpendicular hasta que concurra con el plano vertical coinci-

cidente con el exe, la expresion $\frac{r sen.n}{sen.n}$ será igual á la vertical comprehendida entre la perpendicular y el exe.

Que sea C una quadrícula de la qual se levante la perpendicular CK, hasta que concurra en K con el plano vertical KO coincidente con el exe O: y como el ángulo CKO es igual al que forma la quadrícula con el horizonte, cuyo seno es $sen.n$, y $sen.x$ el de OCK, complemento del que forma CO con la quadrícula, tendremos el seno de $CKO = sen.n$ al seno de $OCK = sen.x$, como $r = CO$, á $KO = \frac{r sen.x}{sen.n}$. Fig. 62.

PROPOSICION 70.

Hallar los momentos que padece el propio paralelepípedo rectángulo, flotando con las mismas condiciones; pero estando su base inclinada al horizonte, con los dos lados de esta perpendiculares á la direccion paralelos al mismo.

Sea AKBF el paralelepípedo, O su centro de gravedad, y ED la superficie del fluido. Tírese LOM paralela á los lados KA, BF, la horizontal AJ, y las verticales FQ, EG, y RON. Sean tambien $AF = e$, $AM = g$, $OM = n$, $EG = a$, el ángulo de la inclinacion $JAF = \Delta$, y $FQ = a + e sen.\Delta$. Fig. 63.

El momento que padece una diferencial de la superficie impelente es $\frac{mbrdx sen.x}{sen.n}\left(x + \frac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}} cos.\Delta + \frac{1}{36}u^2 cos.\Delta^2\right)$: y siendo $HC = x$, y CS perpendicular á DF, será (*Lema antecedente*) $OS = \frac{r sen.x}{sen.n}$, $DC = \frac{x}{cos.\Delta}$, $FD = \frac{a + e sen.\Delta}{cos.\Delta}$,

$FC = \frac{a + e sen.\Delta - x}{cos.\Delta}$, $FC - OM = OV = \frac{a + e sen.\Delta - x}{cos.\Delta} - n$

y

y $OS = \frac{r sen.x}{sen.n} = \frac{a + e sen.\Delta - x}{cos.\Delta^2} - \frac{n}{cos.\Delta}$: con lo que se reduce el momento á - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$mbdx\left(\frac{a + e sen.\Delta - x}{cos.\Delta^2} - \frac{n}{cos.\Delta}\right)\left(x + \tfrac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}}cos.\Delta + \tfrac{1}{64}u^2 cos.\Delta^2\right),$$

cuyo integral, despues de haber substituido $a + e sen.\Delta$ por x, es $\frac{mb(a+esen.\Delta)^2}{cos.\Delta^2}\left(\tfrac{1}{6}(a+esen.\Delta) + \tfrac{1}{15}u(a+ese.\Delta)^{\frac{1}{2}}cos.\Delta + \tfrac{1}{2.64}u^2 cos.\Delta^2\right)$

$- \frac{mbn(a+esen.\Delta)^2}{cos.\Delta}\left(\tfrac{1}{2}(a+esen.\Delta) + \tfrac{1}{6}u(a+esen.\Delta)cos.\Delta + \tfrac{1}{64}u^2 cos.\Delta^2\right)$:

momentos que padece toda superficie impelente.

Los que padece la impelida son los mismos, mudando el signo á la u, y suponiendo $esen.\Delta = 0$: serán pues $\frac{mba^2}{cos.\Delta^2}\left(\tfrac{1}{6}a - \tfrac{1}{15}a^{\frac{1}{2}}ucos.\Delta + \tfrac{1}{2.64}u^2 cos.\Delta^2\right)$

$$- \frac{mbna}{cos.\Delta}\left(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{6}ua^{\frac{1}{2}}cos.\Delta + \tfrac{1}{64}u^2 cos.\Delta^2\right).$$

El que padece una diferencial de la base es $\frac{mbrsen.x dx}{sen.n}\left(a + x - \tfrac{1}{4}usen.\Delta(a+x)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{64}u^2 sen.\Delta^2\right)$: y siendo $ZY = x$, y YW perpendicular á AF, será OW (*Lem. anteced.*) $= \frac{rsen.x}{sen.n}$, $AY = \frac{x}{sen.\Delta}$, $MY = g - \frac{x}{sen.\Delta}$, y $OW = \frac{rsen.x}{sen.n} = \frac{g}{sen.\Delta} - \frac{x}{sen.\Delta^2}$: con lo que se reduce el momento á -

$$mbdx\left(\frac{g}{sen.\Delta} - \frac{x}{sen.\Delta^2}\right)\left(a + x - \tfrac{1}{4}usen.\Delta(a+x)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{64}u^2 sen.\Delta^2\right),$$

cuyo integral, despues de substituir $esen.\Delta$ por x, es

$\frac{mbg}{sen.\Delta}\left(aesen.\Delta + \tfrac{1}{2}e^2 sen.\Delta^2 - \tfrac{1}{6}usen.\Delta\left((a+esen.\Delta)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right) + \tfrac{1}{64}u^2 ese.\Delta^3\right)$

$- \frac{mb}{sen.\Delta^2}\left(\tfrac{1}{2}ae^2 sen.\Delta^2 + \tfrac{1}{3}e^3 se.\Delta^3 - \tfrac{1}{2}use.\Delta(a+ese.\Delta)^{\frac{3}{2}}\left(\tfrac{1}{5}(a+ese.\Delta) - \tfrac{1}{3}a\right)\right)$

+

$$+\frac{mb}{sen.\Delta^2}\left(\tfrac{1}{15}ua^{\frac{5}{2}}sen.\Delta-\frac{1}{2.64}u^3e^2sen.^4\right).$$

Los momentos que padece una diferencial de la desnivelacion en la superficie impelente son - - - - -

$$mbdx\left(\frac{a+esen.\Delta-x}{cos.\Delta^2}-\frac{n}{cos.\Delta}\right)\left(x-\tfrac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}}cos.\Delta+\tfrac{1}{64}u^2cos.\Delta^2\right);$$

y en la impelida $mbdx\left(\frac{a-x}{cos.\Delta^2}-\frac{n}{cos.\Delta}\right)\left(x-\frac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}}cos.\Delta+\frac{1}{64}u^2cos.\Delta^2\right)$ ambas juntas serán -

$$mbdx\left(\frac{2a+esen.\Delta}{cos.\Delta^2}-\frac{2n}{cos.\Delta}\right)\left(x-\tfrac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}}cos.\Delta+\tfrac{1}{64}u^2cos.\Delta^2\right):$$

cuyo integral, despues de haber substituido $\frac{1}{64}u^2cos.\Delta^2$ por x, es $\frac{mbu^4cos.\Delta^4}{6.64^2}\left(\frac{2a+esen.\Delta}{cos.\Delta^2}-\frac{2n}{cos.\Delta}\right)$, momentos que padecerán ambas desnivelaciones. Sumando estos con los que padece la superficie impelente, restando los de la impelida, y los de la base, serán los que padece todo el paralelepípedo = - - - - - -

$$mb\left\{\begin{aligned}&\frac{(a+ese.\Delta)^3-a^3}{6.cos.\Delta^2}+\frac{u((a+ese.\Delta)^{\frac{5}{2}}+a^{\frac{5}{2}})}{15cos.\Delta}+\frac{u^2((u+ese.\Delta)^2-a^2)}{2.64}+\frac{u^4(2a+ese.\Delta)cos.\Delta}{6.64^2}\\&-\frac{n((a+ese.\Delta)a^2-a^2)}{2cos.\Delta}-\tfrac{1}{6}nu((a+ese.\Delta)^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{2}})-\tfrac{1}{64}nu^2ese.\Delta cos.\Delta-\frac{nu^4cos.\Delta^2}{6.64^2}\\&-ge(a+\tfrac{1}{2}esen.\Delta)+\tfrac{1}{6}gu((a+esen.\Delta)^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}})-\tfrac{1}{64}gu^2esen.\Delta^2\\&+\tfrac{1}{2}e^2(a+\tfrac{2}{3}ese.\Delta)-\frac{u(a+ese.\Delta}{2.sen.\Delta}\left(\tfrac{1}{5}(a+ese.\Delta)-\tfrac{1}{3}a\right)-\frac{ua^{\frac{5}{2}}}{15sen.\Delta}+\frac{u^2ese.\Delta^2}{2.64}\end{aligned}\right.$$

Corolario 1.

Como todas las cantidades que estan afectas de la n son negativas, se sigue, que quando menor fuere esta, ó mas baxo esté el centro de gravedad, mas po-

sitivos serán los momentos, y por consiguiente con mas fuerza elevará el paralelepípedo su extremo impelente.

Corolario 2.

Los momentos serán positivos ó negativos segun la relacion de las tres cantidades a, $sen.\Delta$, y u, que son variables, y dependen unas de otras.

Corolario 3.

Como en ninguno de los momentos que resultan de la base se halla la n, se sigue, que el que esté mas ó menos elevado el centro de gravedad no puede alterar dichos momentos.

Corolario 4.

En el primer instante de la accion ú del movimiento del paralelepípedo es $u = o$, y quedan los momentos en

$$mb\left(\frac{(a+esen.\Delta)^3-a^3}{6cos.\Delta^2}-\frac{n((a+esen.\Delta)^2-a^2)}{2cos.\Delta}-ge(a+\tfrac{1}{2}esen.\Delta)+\tfrac{1}{2}e^2(a+\tfrac{2}{3}esen.\Delta)\right):$$

luego para que desde este mismo instante sean los momentos positivos, es preciso que sea -------

$$n < \frac{(a+esen.\Delta)^3-a^3+cos.\Delta\, ea(3e-6g)+e^2(2e-3g)cos.\Delta^2 sen.\Delta}{3((a+esen.\Delta)^2-a^2)cos.\Delta}.$$

Escolio.

Del mismo modo que se calcularon los efectos que producen en la base del paralelepípedo las desnivelaciones, en caso de suponerle horizontal, se pueden calcular en el de estár inclinado; pero el cálculo es cansado, y por no conducir al intento se ha omitido.

PRO-

PROPOSICION 71.

Hallar los momentos que padece un cylindro que flota, y se mueve horizontalmente en direccion perpendicular á su exe.

Que sea BQDE el cylindro, H su exe, y O su centro de gravedad: GI la superficie del fluido, BE un diámetro horizontal, y las CL, HQ, y OK verticales: tírese la HOD, y sean $CH = R$, $OH = K$, $CA = x$, $AL = f$, y el ángulo $HOK = \Delta$: con lo que serán $CL = x+f$, $HL = \sqrt{R^2-(x+f)^2}$, $FO = K cof. \Delta$, $NO = k = K cof. \Delta - f$, $HF = K fen. \Delta$, Fig. 62.

$$KF = \frac{K fen. \Delta (x+f)}{\sqrt{R^2-(x+f)^2}}, \frac{dy}{dx} = \frac{KF}{HF} = \frac{x+f}{\sqrt{R^2-(x+f)^2}},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{\sqrt{R^2-(x+f)^2}}{R}, \text{ y } LH+HF = y =$$

$\sqrt{R-(x+f)^2} + K fen. \Delta$: lo que dá $\frac{ydy}{dx} = x+f+ - -$

$\frac{K fen. \Delta (x+f)}{\sqrt{R^2-(x+f)^2}}$. Estos valores substituidos en la fórmula de los momentos (*Proposicion 66.*) - - - - - - -

$$mc\left(\frac{ydy}{dx}+k-x\right)\left(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{udx}{8\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)^2 dx, \text{ reducen estos á } mcK\left(cof. \Delta \pm \frac{(x+f) fen. \Delta}{\sqrt{R^2-(x+f)^2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u\sqrt{R^2-(x+f)^2}}{8R}\right)^2 dx.$$

En la parte impelida, siendo $KF = \frac{K(x+f) fen. \Delta}{\sqrt{R^2(x+f)^2}}$ negativo, sirve el signo $-$ en esta cantidad. Substrayendo ahora el momento impelido del impelente, quedarán los momentos que padece todo el cylindro

=

$$=\frac{mcKucos.\Delta}{2R}\int x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{R^2-(x+f)^2}+\text{---------}$$

$$2mcKsen.\Delta\left(\int\frac{(x+f)xdx}{\sqrt{R^2-(x+f)^2}}+\frac{u^2}{64R^2}\int(x+f)dx\sqrt{R^2-(x+f)^2}\right).$$

Corolario 1.

$\frac{mcu}{2R}\int x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{R^2-(x\pm f)^2}$ es (*Proposicion* 42.) la resistencia horizontal que padece el cylindro, y $2mc\left(\int\frac{(x\pm f)xdx}{\sqrt{R^2-(x\pm f)^2}}+\frac{u^2}{64R^2}\int(x\pm f)dx\sqrt{R^2-(x\pm f)^2}\right.$ (*Prop.* 34.) la fuerza vertical: si llamamos la primera N y la segunda Q, quedarán los momentos que padece el cylindro$=NKcos.\Delta+QKse.\Delta=K(Ncos.\Delta+Qse.\Delta)$.

Corolario 2.

Si fuere $u=0$, serán los momentos que padece todo el cylindro $=2mcKsen.\Delta\int\frac{(x\pm f)xdx}{\sqrt{R^2-(x\pm f)^2}}$, ó porque $2mc\int\frac{(x\pm f)xdx}{\sqrt{R^2-(x\pm f)^2}}$ es la fuerza vertical que padece el mismo, en este caso igual á su peso: si llamamos P el peso del cylindro, será el momento que padecerá, siendo $u=0$, $=PKsen.\Delta$, como se dixo antes (*Cor.* 8. *Prop.* 66.).

Escolio.

Aunque no se haya hecho atencion en el cálculo de los momentos que padece el cylindro á los que produce la desnivelacion, no por ello dexan de estar com-

pre-

prehendidos en la expresion $K(N cof.\Delta + Q\, fen.\Delta)$. Su fórmula es $mc\int \frac{r fen.x}{fen.\eta} dx(x - \frac{1}{4}ux^{\frac{3}{2}} fen.\eta + \frac{1}{64} fen.\eta^2 u^2)$, y esto, tanto para los de la superficie impelente, como para los de la impelida, por ser en ambas positivos. Substituyendo en ellos el valor de $\frac{r fen.x}{fen.\eta} = K cof.\Delta \pm \frac{K fen.\Delta(x \pm f)}{\sqrt{R^2 - (x \pm f)^2}}$, y sumando los de ambas superficies, serán los efectivos ----------- $2mcK cof.\Delta \int dx(x - \frac{1}{4}ux^{\frac{3}{2}} fen.\eta + \frac{1}{64}u^2 fen.\eta^2)$; pero la resistencia horizontal que padece la desnivelacion es tambien $2mc\int dx(x - \frac{1}{4}ux^{\frac{3}{2}} fen.\eta + \frac{1}{64}u^2 fen.\eta^2)$: luego la resistencia horizontal N, ya no es solo igual á la primera cantidad $\frac{mcu}{2R}\int x^{\frac{1}{2}} dx \sqrt{R^2 - (x \pm f)^2}$, sino á esta, con mas $2mc\int dx(x - \frac{1}{4}ux^{\frac{3}{2}} fen.\eta + \frac{1}{64}u^2 fen.\eta^2)$: por consiguiente, expresando N la total resistencia horizontal que padeciere el cylindro, quedarán comprehendidos en la expresion $K(N cof.\Delta + Q\, fen.\Delta)$ los momentos que resultan de la desnivelacion.

CAPITULO II.

De la inclinacion que toman los cuerpos que flotan en los fluidos quando se hallan impelidos por una ó mas potencias.

PROPOSICION 72.

Hallar la inclinacion que toman los cuerpos que flotan, quando están impelidos de una ó mas potencias.

La inclinacion no es mas que aquella situacion respecto de la vertical en que ya cesa de girar sobre un exe horizontal el cuerpo impelido por una ó mas potencias, respecto á equilibrarse los momentos de estas con los de las resistencias del fluido. Búsquense, pues, unos y otros por lo dicho en los Capitulos precedentes, ó por las Proposiciones que se siguen, é igualandolos á cero, se deducirá de la equacion la inclinacion que tomará el cuerpo.

PROPOSICION 73.

Hallar el momento con que actua un peso que se le agrega á un cuerpo flotante, colocado en un punto determinado del plano vertical perpendicular al exe de rotacion que pasa por el centro de gravedad.

Fig. 63. Que el peso π esté en el punto colocado sobre el plano vertical perpendicular al exe de rotacion que pasa por el centro de gravedad O. Que la perpendicular πX, al plano coincidente con el exe, y con los centros de gravedad y magnitud, sea $= p$, y $OX = q$: con lo que será πR perpendicular al plano vertical

que

que coincide con el exe, $= q sen.\Delta + p cos.\Delta$, expresando Δ el ángulo de la inclinacion ROX que tomare el cuerpo, y el momento del peso$= \pi(q sen.\Delta + p cos.\Delta)$.

Escolio.

Se supone que el exe de rotacion esté horizontal, y que el cuerpo tenga toda la regularidad necesaria, para que despues de inclinado se conserve el exe del mismo modo; sin esto es preciso atender á nueva inclinacion perpendicular á la primera.

Corolario 1.

Si fuesen varios los pesos π que se añadieren, cada uno de por sí producirá el momento $\pi(q se.\Delta + p cos.\Delta)$: y la suma de todos será el momento total que actua sobre el cuerpo.

Corolario 2.

Si en lugar de añadirse un peso π, se substragere ó quitare, será π negativo, y su momento $= -\pi(q sen.\Delta + p cos.\Delta)$.

Corolario 3.

Si al mismo tiempo se substragere de la parte opuesta al exe de rotacion, será p negativo, y el momento $= -\pi(q sen.\Delta - p cos.\Delta) = \pi(p cos.\Delta + q se.\Delta)$, momento positivo en caso de ser $p cos.\Delta > q sen.\Delta$.

Corolario 4.

Si el peso que se substragere de un lado se colocare al lado opuesto, y á una misma distancia q del exe, los mo-

momentos serán $\pi(q sen.\Delta + p cos.\Delta) - \pi(q se.\Delta - \Pi cos.\Delta) = (p + \Pi)\pi cos.\Delta$: esto es, será el momento igual al producto del peso π por el coseno de la inclinacion, y por la distancia horizontal $p + \Pi$ del punto de donde se quitó el peso hasta el punto donde se puso.

Corolario 5.

Si la inclinacion fuere muy corta, quedará este propio momento $= \pi(p + \Pi)$: esto es, igual al producto del peso π por la distencia $p + \Pi$ que se hubiere transportado.

Corolario 6.

Si quedando tanto π como p positivos, fuere q negativo: esto es, si se colocare el peso π debaxo del plano horizontal coincidente con el exe, será el momento $\pi(p cos.\Delta - q sen.\Delta)$.

Corolario 7.

Si á mas de esto fuere $p = 0$, quedará el momento $= -\pi q sen.\Delta$: luego todo peso colocado debaxo del centro de gravedad resiste á la inclinacion en la razon de $\pi q sen.\Delta$.

Corolario 8.

Si al contrario se quitare el peso, será el momento $= \pi q sen.\Delta$, y contribuirá al aumento de la inclinacion en la razon $\pi q sen.\Delta$.

PROPOSICION 74.

Hallar la inclinacion que tomará un paralelepípedo rectángulo, que flotando sobre un fluido con su base

se paralela al horizonte, se le agrega un nuevo peso, en un punto determinado del plano vertical perpendicular á dos de los lados, que pasa por el centro de gravedad.

En este caso, por suponerse el paralelepípedo sin movimiento es $u = 0$: luego sus momentos se reducirán (*Corolar.* 4. *Proposicion* 70.) á - - - - - - -

$$mb\left(\frac{(a+efe.\Delta)^3-a^3}{6cof.\Delta^2}-\frac{n((a+efe.\Delta)^2-a^2}{2cof.\Delta}-ge(a+\tfrac{1}{2}efe.\Delta)+\tfrac{1}{2}e^2(a+\tfrac{2}{3}efe.\Delta)\right):$$

luego $\pi(qfen.\Delta+pcof.\Delta) =$ - - - - - - - - - - - - - - - -

$$mb\left(\frac{(a+efe.\Delta)^3-a^3}{6cof.\Delta^2}-\frac{n((a+efe.\Delta)^2-a^2)}{2cof.\Delta}-ge(a+\tfrac{1}{2}efe.\Delta)+\tfrac{1}{2}e^2(a+\tfrac{2}{3}efe.\Delta)\right);$$

ó porque en este caso es $g = \frac{1}{2}e$, $\pi(qfen.\Delta+pcof.\Delta) =$

$$mb\left(\frac{(a+efen.\Delta)^3-a^3}{6cof.\Delta^2}-\frac{n((a+efen.\Delta)^2-a^2)}{2cof.\Delta}+\tfrac{1}{12}e^3fen.\Delta\right).$$

La fuerza vertical que padece el paralelepípedo es (*Propos.*7.) $= mbe\left(\frac{a+\frac{1}{2}efen.\Delta}{cof.\Delta}\right)$: con que suponiendo que sea P el peso total de él, será - - - - -

$P+\pi = mbe\left(\frac{a+\frac{1}{2}efen.\Delta}{cof.\Delta}\right)$, que dá $a = \frac{(P+\pi)cof.\Delta}{mbe} - \frac{1}{2}efen.\Delta$. Substituyendo este valor en la equacion precedente, se reduce á

$$\pi(qfe.\Delta+pcof.\Delta) = mbefe.\Delta\left(\frac{P^2}{2m^2b^2e^2}-\frac{nP}{mbe}+\tfrac{1}{12}e^2+\frac{e^2fen.\Delta^2}{24cof.\Delta^2}\right):$$

ó si se supone que sea a la altura vertical que tenia el paralelepípedo dentro del fluido antes de agregarsele el peso, ó quando estaba con su base horizontal: siendo en este caso $P = mbea$, será $\pi(qfen.\Delta+pcof.\Delta) =$

$mbefen.\Delta\left(\frac{1}{2}a^2-na+\frac{1}{12}e^2+\frac{e^2fen.\Delta^2}{24cof.\Delta^2}\right)$, ó - - - - - - - -

$\frac{\pi pcof.\Delta}{mbefen.\Delta}-\frac{e^2fen.\Delta^2}{24cof.\Delta^2} = \frac{1}{2}a^2-na+\frac{1}{12}e^2-\frac{\pi q}{mbe}$. Que sea ahora $\frac{1}{2}a^2-na+\frac{1}{12}e^2-\frac{\pi q}{mbe} = \pm A^2$, y $x = \frac{efen.\Delta}{cof.\Delta} = FC$,

y quedará $\frac{\pi p}{mbx} - \frac{1}{24}x^2 = \pm A^2$, que dá ------
$x^3 \pm 24A^2x - \frac{24\pi p}{mb} = 0$: cuya equacion resuelta por el comun uso de Algebra, dará el valor de x, y por consiguiente de la inclinacion que tomará el paralelepípedo.

Corolario 1.

Si A^2 fuere positivo, ó si siendo negativo, fuere $(8A^2)^3$ menor que $\left(\frac{12\pi p}{mb}\right)^2$, la equacion tendrá dos raices imaginarias, y por consiguiente solo una real $=$

$$\left(\frac{12\pi p}{mb} + \left(\left(\frac{12\pi p}{mb}\right)^2 \pm (8A^2)^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \mp \frac{8A^2}{\left(\frac{12\pi p}{mb} + \left(\left(\frac{12\pi p}{mb}\right)^2 \pm (8A^2)^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}:$$

que es la unica disposicion ó inclinacion que debe tomar el paralelepípedo. El signo superior para quando sea A positivo, y el inferior para quando sea negativo.

Corolario 2.

Siendo A^2 negativo, si fuere $(8A^2)^3$ mayor que $\left(\frac{12\pi p}{mb}\right)^2$, la equacion tendrá todas tres raices reales: y por consiguiente el paralelepípedo podrá tomar tres disposiciones ó inclinaciones distintas.

Escolio 1.

Como el valor de la fórmula $x^3 + 24A^2x - \frac{24\pi p}{mb}$, es la suma de los momentos, siempre que estos fueren positivos, se dirigirán á sostener, poner mas derecho, ó hacer mas estable el paralelepípedo; al contra-

trario, si fueren negativos se emplearán en hacerle caer mas. Las raices de la equacion son, pues, los límites de estos momentos positivos ó negativos: y por consiguiente siempre que se fuere inclinando el paralelepípedo, y se pasare de una raiz á otra, se pasará tambien de los momentos positivos á los negativos, ó al contrario. Si al inclinarse el paralelepípedo para establecerse en la primera raiz, fueren los momentos negativos, pasando despues á ocupar la segunda, serán positivos: y así en adelante.

Corolario 3.

Los momentos, antes de establecerse el paralelepípedo en la primera raiz, son negativos, pues substituyendo en ellos $x = 0$, quedan reducidos á $-\frac{24\pi p}{mb}$.

Corolario 4.

El paralelepípedo debe, pues, inclinarse hasta establecerse en la primera raiz: y no puede pasar á ocupar la segunda, sin que otra fuerza extraña qualquiera no venza los momentos positivos que se opondrán á ello.

Escolio 2.

El paralelepípedo no puede establecerse en la segunda raiz, habiendo qualquier fuerza extraña que le saque de ella, porque si le obliga á ponerse mas vertical, los momentos resultarán positivos: y por consiguiente continuará en ponerse mas vertical hasta volverse á la primera raiz; y si le obliga á ponerse menos vertical, los momentos resultarán negativos: y por consiguiente continuará en inclinarse mas y mas.

Corolario 5.

La estabilidad ó conservacion de fuerzas del paralelepípedo para mantenerse sin caer enteramente, consiste en que ninguna fuerza extraña sea capáz de inclinarle hasta pasar de la segunda raiz.

Corolario 6.

Si fuere π, ó $p = 0$, queda la equacion en $x^3 \pm 24A^2 x = 0$, cuya primera raiz es $x = 0$: luego el paralelepípedo deberá mantenerse derecho sobre el fluido, á menos que alguna fuerza extraña no venza los momentos positivos que se exercitarán en la inclinacion.

Corolario 7.

Las otras dos raices de la equacion $x^3 \pm 24A^2 x = 0$, son $x = 2A\sqrt{\mp 6}$, que son imaginarias quando es A^2 positivo: de donde parece debiera inferirse, que en este caso los momentos que padecerá el paralelepípedo en su inclinacion, qualquiera que esta sea, serán siempre positivos.

Escolio 3.

Este Corolario sería generalmente cierto sino debiera llegar el caso de que el ángulo en la base A saliese fuera del fluido: en este caso, tanto los momentos, como la fuerza vertical que padece el paralelepípedo varían; y por consiguiente resulta para él distinta equacion, que, como se verá, produce mas raices que la única antes hallada. Como *Mr. Bouguer* en su *Tratado del Navio* no exâmina la estabilidad sino en las inclinaciones infinitamente pequeñas, pudiera pa-

recer que acepta la generalidad del Corolario, pues encarga se cuide de que no sea negativo el signo del segundo término para que siempre sean positivos los momentos, y con ellos estable el paralelepípedo. No insistirémos sobre que solo resultan negativos quando lo es el todo de la fórmula $x^3 \pm 24A^2x$, y no solo el segundo término; pues limitándose el Autor á solas las inclinaciones infinitamente pequeñas, mira como despreciable el primer término x^3. Para que no sea negativo el segundo término $24A^2x$, basta que no lo sea A^2, ó su igual $\frac{1}{2}a^2 - na + \frac{1}{12}e^2 - \frac{\pi q}{mbe}$, ó porque *Mr. Bouguer* supone $\pi = 0$, que no lo sea $\frac{1}{2}a^2 - na + \frac{1}{12}e^2$: de donde deduce, que siempre que no sea $n > \frac{1}{2}a + \frac{e^2}{12a}$, ó que se cuide de que el centro de gravedad no esté mas alto que $\frac{1}{2}a + \frac{e^2}{12a}$, se tendrá seguridad en la estabilidad del paralelepípedo: añadiendo, que esta cantidad expresará por consiguiente la altura á que se podrá poner el centro de gravedad sin riesgo: por cuyo motivo dice que se puede llamar con justo titulo *metacéntro* al punto que la termina. El error á que todo esto puede conducir, no mirandolo con el cuidado que el Autor encarga, salta inmediatamente á los ojos, pues la expresion $\frac{e^2}{12a}$ manifiesta que tanto quanto menor sea a, mayor será la altura del metacéntro, y por consiguiente la seguridad del paralelepípedo: de suerte que si fuera a infinitamente pequeña, á infinita altura se podria colocar el centro de gravedad del paralelepípedo sin riesgo de perder su estabilidad: absurdo que qualquiera reconoce. Pero la conseqüencia es cierta en los casos en que no salgan los ángulos en la base fuera del fluido, que es sobre lo que se fundó

el

el Autor. No obstante, como siendo a corta, es tan facil el que salgan, por mas que se suponga la inclinacion infinitamente pequeña, se reconoce claramente el error que puede resultar. Este error no se limita solo al paralelepípedo, trasciende á los demas cuerpos, porque el defecto nace de la suposicion que en el exâmen de solas inclinaciones infinitamente pequeñas se hace de que la seccion de la superficie del fluido, y el plano que coincide con el exe, y divide el cuerpo en dos partes iguales, sea siempre la misma; lo que está muy distante de ser cierto, quando el cuerpo ocupa poco espacio en el fluido, y la potencia π que actua sobre él es considerable: pues la misma que produce una inclinacion infinitamente pequeña quando el cuerpo ocupa mucho espacio en el fluido, producirá otra muy sensible quando ocupe poco; y en tal caso la suposicion que se hace de la inclinacion infinitamente pequeña, es falsa, por mas pequeña que se establezca la potencia: á que debe agregarse, que el peso del cuerpo varía de la cantidad π, y esta diferencia, á que no se ha hecho jamas atencion, es mas considerable á proporcion que el peso del cuerpo es menor.

PROPOSICION 75.

Hallar la inclinacion que tomará el mismo paralelepípedo rectángulo, quando qualquiera de sus ángulos en la base salgan fuera del fluido.

Los momentos que padece el paralelepípedo son

(*Cor.* 4. *Prop.* 70.) $= mb\left(\frac{(a+e\,sen.\Delta)^3-a^3}{6\cos.\Delta^2}-\frac{n((a+e\,sen.\Delta)^2-a^2)}{2\cos.\Delta}\right)$

$+mb\left(e(g-e)(a+\frac{1}{2}e\,sen.\Delta)+\frac{1}{2}e^2(a+\frac{2}{3}e\,sen.\Delta)\right)$; pero por ser en este caso $e=$EF, $g=$FM, y $a=0$, se reducen á $mb\left(\frac{e^3 sen.\Delta^3}{6\cos.\Delta^2}-\frac{ne^2 sen.\Delta^2}{2\cos.\Delta}+\frac{1}{2}ge^2 sen.\Delta-\frac{1}{6}e^3 sen.\Delta\right)$.

La

La fuerza vertical que padece el paralelepípedo es (*Prop.*7.) $= \frac{1}{2}mbe$. DF $= P + \pi$, ó llamando z la DF, $\frac{1}{2}mbez = P + \pi$, lo que dá $e = \frac{P+\pi}{\frac{1}{2}mbz}$, y $\frac{sen.\Delta}{cos.\Delta} = \frac{z}{e} = \frac{\frac{1}{2}mbz^2}{P+\pi}$. Tendremos, pues, $\pi(q\,sen.\Delta + p\,cos.\Delta) = mb\left(\frac{e^3 sen.\Delta^3}{6cos.\Delta^2} - \frac{ne^2 sen.\Delta^2}{2cos.\Delta} + \frac{1}{2}ge^2 sen.\Delta + \frac{1}{6}e^3 sen.\Delta\right)$, ó partiendo por $sen.\Delta$, y substituyendo los valores de e, y de z, $\pi\left(q + \frac{p(P+\pi)}{\frac{1}{2}mbz^2}\right) =$ ----------
$mb\left(\frac{(P+\pi)z}{3mb} - \frac{n(P+\pi)}{mb} - \frac{g(P+\pi)^2}{\frac{1}{2}m^2b^2z^2} - \frac{(P+\pi)^3}{\frac{3}{4}m^3b^3z^3}\right)$: que

$$\text{que dá } z^4 \begin{matrix} -3nz^3 + \frac{6g(P+\pi)z}{mb} \\ -\frac{3\pi qmbz^3}{P+\pi} - 6p\pi z \end{matrix} - \frac{4(P+\pi)^2}{m^2b^2} = 0.$$

Hallado el valor de z por esta equacion, se tendrá el de $e = \frac{P+\pi}{\frac{1}{2}mbz}$, y por consiguiente los dos puntos D y E, que dan la posicion de la superficie del fluido, y la inclinacion del paralelepípedo.

Escolio I.

Los momentos que padece la base en este caso no son los mismos que en el antecedente: para aquellos se substituyó (*Prop.*70.) $r\,sen.x = g - \frac{a}{sen.\Delta}$: para estos, á causa de ser $e < 2g$, es $r\,sen.x = g - \frac{a}{sen.\Delta} - (2g - e) = e - g - \frac{a}{sen.\Delta}$. Colocando, pues, en aquellos, que son $mb\left(ge(a + \frac{1}{2}e\,sen.\Delta) - \frac{1}{2}e^2(a + \frac{2}{3}e\,sen.\Delta)\right)$, $e - g$ por g

g solo, tendremos estos $=$ - - - - - - - - - - - - - - - $mb\left(e(e-g)(a+\frac{1}{2}e\,sen.\,\Delta)-\frac{1}{2}e^2(a+\frac{2}{3}e\,sen.\,\Delta)\right)$; ó por ser negativos, $=mb\left(e(g-e)(a+\frac{1}{2}e\,sen.\,\Delta)+\frac{1}{2}e^2(a+\frac{2}{3}e\,sen.\,\Delta)\right)$ como lo hemos supuesto.

Corolario 1.

Si fuere $\pi = 0$, se reducirá la equacion á $z^4 - 3nz^3 + \frac{6gPz}{mb} - \frac{4P^2}{m^2b^2} = 0$; ó substituyendo por P su igual $2mbga$, y e por toda la longitud de la base $2g$, como antes, será $z^4 - 3nz^3 + 3e^2az - 4e^2a^2 = 0$.

Escolio 2.

Puesto que la estabilidad del paralelepípedo se haya de conservar siendo $n < \frac{1}{2}a + \frac{e^2}{12a}$, pongamos $n = \frac{e^2}{12a}$: y para simplificar la equacion, $e = 12a$, y se reducirá á $z^4 - 36az^3 + 432a^3z - 576a^4 = 0$. La menor raiz de esta equacion es menor que $2a$, y habiendo de ser $z = 2a$ para que empiece á salir el ángulo en la base fuera del fluido, es claro que dicha menor raiz no sirve para nuestro caso. La segunda es, con corta diferencia, $z = \frac{24}{10}a$, y aun esta cantidad es algo mayor que la legitima raiz, de suerte que substituyendola por z, viene la expresion negativa: lo que prueba, que si alguna fuerza extraña obliga al paralelepípedo á inclinarse de suerte que sumerja un lado de $\frac{24}{10}a$, ó lo que es equivalente, que le obligue á inclinarse de $13^{\circ}\frac{0}{1}$, de repente caerá á substituirse en la quar-

quarta raiz, porque la tercera es negativa, y tampoco sirve para el caso. Esta quarta raiz es proxîmamente $z = 35a$, y equivale á la inclinacion de 88° con corta diferencia: luego quando una potencia extraña hiciere inclinar el paralelepípedo de $13^{\circ}\frac{4}{5}$, de repente caerá hasta la inclinacion de 88°: vease, pues, quan lexos está de conservar la estabilidad. Mayores diferencias resultaran de suponer a menor; pero basta en el asunto para comprehender que la seguridad en la estabilidad no debe fundarse sino en que las potencias extrañas no puedan inclinar al cuerpo mas de lo que corresponde á la segunda raiz: pasada esta, se pierde enteramente la estabilidad, y el cuerpo toma casi una total inclinacion.

PROPOSICION 76.

Hallar la inclinacion que tomará un cuerpo qualquiera que, flotando sobre un fluido, se le agrega un nuevo peso en un punto determinado del plano vertical perpendicular al exe de rotacion, que pasa por el centro de gravedad.

Para este caso, en que tambien es $u = 0$, es el momento que padece el cuerpo (*Proposicion 66.*) $=$ $m\int cxdx\left(\frac{ydy}{dx} + k - x\right) = m\int cxydy + m\int cxdx(k - x)$: ó porque se destruye la segunda cantidad, á causa de los momentos negativos de la parte impelida, que son iguales á los de la impelente, $= m\int cxydy$: y siendo el del peso $= \pi(q\,sen.\Delta + p\,cos.\Delta)$, tendremos la igualacion $\pi(q\,sen.\Delta + p\,cos.\Delta) = m\int cxydy$. Substituyendo en este segundo miembro el valor de y, y el de dy en x y dx, deducido de la equacion que por la figura y disposicion del cuerpo resultare, integrando y colocando el valor máxîmo de x, deducido de la igualacion que se hiciere del peso $P + \pi$, y la fuerza vertical

mſcxdy que padece el cuerpo: esto es, $P+\pi = mſcxdy$, quedará otra equacion, de la qual se deducirá el valor de *ſen.* Δ.

Corolario 1.

Si la inclinacion fuere infinitamente pequeña, podemos substituir en lugar de *mſcxydy* su igual (*Cor.* 1. *Proposic.* 67.) $\left(\pm H.P + \frac{m}{12} ſce^3\right) ſen.\Delta$; y será - - - - $\pi(q\,ſen.\Delta + p) = \left(\pm H.P + \frac{m}{12} ſce^3\right) ſen.\Delta$; que dá $ſen.\Delta = \frac{p\pi}{\pm H.P + \frac{m}{12} ſce^3 - q\pi}$.

Corolario 2.

En los cuerpos formados por la revolucion de una línea qualquiera al rededor del exe horizontal de rotacion es (*Cor.*8. *Prop.*66.) el momento $= PK ſen.\Delta$, expresando P el peso total del cuerpo, que en este caso es $P+\pi$. Substituyendo, pues, este valor en lugar de P sólo, será el momento $= K(P+\pi)\,ſen.\Delta$; y $\pi(q\,ſen.\Delta + p\,coſ.\Delta) = K(P+\pi)ſen.\Delta$: que dá el seno de la inclinacion $ſen.\Delta = \frac{\pm p\pi}{((K(P+\pi) - q\pi)^2 + p^2\pi^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Corolario 3.

Fig. 62. Habiendo expresado por q la distancia desde el centro de gravedad O, hasta el plano, que pasando por el peso añadido π, es perpendicular á DOH; si suponemos que ya no exprese sino la distancia desde el exe H al mismo plano, tendremos que substituir $K+q$ por q solo, y quedará el seno de la inclinacion

ſen.

$sen.\Delta = \frac{\pm p\pi}{((KP \pm q\pi)^2 + p\pi^2)^{\frac{1}{2}}}$: siendo el de un ángulo mayor que 90 grados si fuere $KP - q\pi$ negativo.

Corolario 4.

No hallandose en la expresion $sen.\Delta = \frac{\pm p\pi}{((KP \mp q\pi)^2 + p^2\pi^2)^{\frac{1}{2}}}$ sino una sola raiz ó valor de $sen.\Delta$, porque la negativa no sirve sino para el lado opuesto quando es p negativo, se sigue que los momentos serán siempre positivos despues de dicha primera raiz, inclínese lo que quisiere el cuerpo formado por la revolucion de una línea qualquiera al rededor de un exe horizontal.

Corolario 5.

Como KP se halla solamente en el denominador, quanto mayor fuere esta cantidad, menor será el valor de $sen.\Delta$.

PROPOSICION 77.

Hallar la inclinacion que tomará un cuerpo qualquiera que, flotando sobre un fluido, es impelido por una potencia constante horizontal, perpendicular al exe de rotacion, que igualmente se supone horizontal, colocada en la vertical, que pasa por el centro de gravedad.

Los momentos que padece el cuerpo son (*Prop. 66*) $= m\int cydy(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u\,sen.\theta)^2 + m\int cdx(k - x)(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u\,sen.\theta)^2$: y supuesto que sea O su centro de gravedad, y AOB la inclinacion que hubiere tomado respecto de la ver- Fig. 76.

 tical

tical BO, siendo Δ el ángulo de AOB, si fuese A el punto donde actue la potencia π, cuya direccion es la horizontal CA, y $AO = q$, será el momento con que actue la potencia segun $CD = q\pi cos.\Delta$. Con esto tendremos las tres equaciones $q\pi = - - - - - - mfcydy(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u sen.\theta)^2 + mfcdx(k - x)(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u sen.\theta)^2. - - P + \pi sen.\Delta cos.\Delta = mfcdy(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u sen.\theta)^2$, y $\pi cos.\Delta^2 = mfcdx(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u sen.\theta)^2$. Substituyendo en ellas los valores de $sen.\theta$, y, y de dy, en x y dx, deducidos de la equacion que diere la figura y disposicion del cuerpo, é integrando realmente, se tendran otras tres equaciones, por las quales se hallaran los valores de x, de u, y de Δ.

PROPOSICION 78.

Hallar la inclinacion que tomará un cylindro que flota horizontalmente, siendo impelido por una potencia constante π horizontal, y perpendicular al exe, colocada en el plano vertical que pasa por el centro de gravedad.

Los momentos que padece el cylindro no habiendo potencia que actue sobre él, son (*Cor.* 1. *Prop.* 71.) $= K(N cos.\Delta + Q sen.\Delta)$, expresando N la resistencia horizontal, y Q las fuerzas verticales. Despues que adquiere su máxima velocidad es $N = \pi cos.\Delta^2$, y $Q = P + \pi sen.\Delta cos.\Delta$: luego, substituyendo estos valores, tendremos $K(\pi cos.\Delta^3 + P sen.\Delta + \pi sen.\Delta^2 cos.\Delta) = q\pi cos.\Delta$; ó partiendo por $K cos.\Delta$, - - - - - - - - $\pi + \frac{P sen.\Delta}{cos.\Delta} = \frac{q\pi}{K}$: ó $\frac{P sen.\Delta}{cos.\Delta} = \frac{q\pi - K\pi}{K} = \frac{\pi(q - K)}{K}$: y respecto que $\frac{sen.\Delta}{cos.\Delta}$ es la tangente del ángulo de la inclinacion, será $tang.\Delta = \frac{\pi(q - K)}{KP}$.

Co-

Corolario 1.

Si se quisiere deducir el caso en que la velocidad del cylindro sea cero, ó en que un exe horizontal fixo, que pase por el centro de gravedad, le sujete, impidiendole su movimiento horizontal y vertical, y dexandole solo el giratorio, no hay sino substraher las cantidades que de aquellos resultan, dexando solo el momento KP*sen*.Δ; y será KP*sen*.$\Delta = q\pi cos.\Delta$; que dá $tang.\Delta = \frac{q\pi}{KP}$.

Corolario 2.

La tangente de la inclinacion, estando el cylindro libre, es á la misma, girando sobre un exe fixo, como q—K á q: ó como la distancia de la potencia al exe del cylindro, á la distancia de la misma al centro de gravedad.

Corolario 3.

Estos mismos momentos KP*sen*.Δ que resultaron para el cylindro, resultan igualmente, para todo cuerpo formado por la revolucion de una línea qualquiera al rededor de un exe horizontal: luego para todos estos cuerpos será la estabilidad ó tangente de inclinacion, en caso de suponerse el exe fixo $tang.\Delta = \frac{q\pi}{KP}$, siendo esta mayor que la que resultare estando libres ó con su movimiento horizontal.

Corolario 4.

Lo mismo cabe en qualquier cuerpo, aunque no sea formado por la revolucion de una línea qualquiera al

al rededor de un exe horizontal, con sola la diferencia de que la cantidad K es variable, segun las varias inclinaciones.

Corolario 5.

Hallamos (*Cor.8. Prop.66.*) $K fen.\Delta = h$, expresando h la distancia horizontal desde el centro de gravedad á la vertical que pasa por el centro del volumen: luego será $K = \frac{h}{fen.\Delta}$, cuyo valor, substituido en el de $tang.\Delta = \frac{q\pi}{KP}$, dá $tang.\Delta = \frac{q\pi fen.\Delta}{hP} = \frac{fen.\Delta}{cof.\Delta}$: luego $cof.\Delta = \frac{hP}{q\pi}$; y reduciendo $fen.\Delta = \frac{q^2\pi^2 - h^2P^2}{q^2\pi^2}$.

CAPITULO 12.

De los momentos que padecen los cuerpos, quando giran en los fluidos libremente sobre un exe qualquiera, que pasa por su centro de gravedad.

PROPOSICION 79.

HAllar los momentos que padece un cuerpo qualquiera, que gira sobre un exe, que pasa por el centro de gravedad.

Divídase la superficie del cuerpo en pequeñas quadrículas sensiblemente planas, por planos horizontales y verticales: hállese la fuerza positiva ó negativa que cada una padeciere, segun la direccion de su movimiento: multiplíquese esta por la distancia perpendicular de la quadrícula al exe de rotacion: y sumando todos los productos, se tendran los momentos totales. La

La fuerza horizontal que padece una quadrícula, impelente ó impelida, es (*Proposicion* 30.) = ----- $mc\left(Da \pm \frac{1}{6}u\,sen.\theta\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2\,a\,sen.\theta^2\right)$:

y reducida á una direccion qualquiera = ------

$$\frac{mb\,sen.x}{sen.n}\left(Da \pm \frac{1}{6}u\,sen.\theta\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2\,a\,sen.\theta^2\right).$$

Que sea ahora r la distancia perpendicular desde la quadrícula al exe, y será el momento que esta padecerá =

$$\frac{mbr\,sen.x}{sen.n}\left(Da \pm \frac{1}{6}u\,sen.\theta\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2\,a\,sen.\theta^2\right),$$

y el que padecerá todo el cuerpo = --------

$$m\int\frac{br\,sen.x}{sen.n}\left(Da \pm \frac{1}{6}u\,sen.\theta\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2\,a\,se.\theta^2\right).$$

Corolario 1.

Los momentos de una y otra desnivelacion serán por consiguiente = -----------------

$$m\int\frac{br\,sen.x}{sen.n}\left(Da - \frac{1}{6}a\,sen.\theta\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2\,a\,sen.\theta^2\right).$$

Corolario 2.

Si la mitad del cuerpo fuere igual y semejante á la otra mitad, de suerte que las r, $sen.\theta$, $sen.n$, D y a de la una mitad fueren iguales á las mismas de la otra, sumando los momentos que padecen cada dos quadrículas correspondientes de una y otra parte, quedará el momento que padece todo el cuerpo = -------

$$\frac{1}{3}m\int\frac{bru\,sen.x\,sen.\theta}{sen.n}\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) = ------$$

$$\frac{1}{2}m\int\frac{bru\,D^{\frac{1}{2}}\,a\,sen.x\,sen.\theta}{sen.n}\left(1 - \frac{a^2}{96D^2} - \frac{a^4}{2048D^4} - \&\right);$$ ó

si

si se desprecian todos los terminos de la série, excepto el primero $= \frac{1}{2} m \int \frac{bruD^{\frac{1}{2}} a sen.x sen.\theta}{sen.n}$.

Corolario 3.

Siendo V la velocidad angular con que gira el cuerpo es (*Cor.* 1. *Prop.* 18. *Lib.* 1.) $V = \frac{udt}{r}$ y $u = \frac{rV}{dt}$, cuyo valor substituido en el de los momentos, serán tambien estós $= m \int \frac{br sen.x}{sen.n} \left(Da \pm \frac{rV se.\theta}{6dt} \left((D + \frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} \right) + \frac{r^2 V^2 a sen.\theta^2}{64.dt^2} \right)$.

Corolario 4.

Los momentos de una y otra desnivelacion serán por consiguiente $= \cdots$
$$m \int \frac{br sen.x}{sen.n} \left(Da - \frac{rV se.\theta}{6dt} \left((D + \frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} \right) + \frac{r_2 V^2 sen.\theta^2}{64dt^2} \right).$$

Corolario 5.

Si la mitad del cuerpo fuere igual y semejante á la otra mitad, de suerte que las r, $sen.\theta$, $sen.x$, $sen.n$, D y a de la una mitad fueren iguales á las mismas de la otra, sumando los momentos que padecen dos quadrículas correspondientes de una y otra parte, quedará el momento que padece el todo del cuerpo $=$
$$\frac{1}{3} m \int \frac{br^2 V sen.x sen.\theta}{dt sen.n} \left((D + \frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} \right) = \cdots$$
$$\frac{1}{2} m \int \frac{br^2 V sen.x sen.\theta D^{\frac{1}{2}} a}{dt sen.n} \left(1 - \frac{a^2}{96D^2} - \frac{a^4}{2048D^4} - \&c \right)$$

Co-

Corolario 6.

Si las superficies del cuerpo se quisieren expresar por una equacion algébrica, se puede substituir D+x por D, y dx por a: con lo que quedarán los momentos $= m\int \frac{br\,sen.x}{sen.n} dx \left(D + x \pm \frac{rV\,sen.\theta}{4dt}(D+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{r^2V^2\,se.\theta^2}{64dt^2} \right)$; ó si el cuerpo flotare, serán $= m\int \frac{br\,sen.x\,dx}{sen.n} \left(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{rV\,sen.\theta}{8dt} \right)$.

Corolario 7.

Si la mitad del cuerpo fuere igual y semejante á la otra mitad, de suerte que las r, $sen.\theta$, $sen.x$, $sen.n$, D y a de la una mitad fueren iguales á las mismas de la otra, serán los momentos $= \frac{1}{2}mV\int \frac{br^2(D+x)^{\frac{1}{2}}\,dx\,sen.x\,sen.\theta}{dt\,sen.n}$; ó si el cuerpo flotare, serán = ----------- $\frac{1}{2}mV\int \frac{br^2\,x^{\frac{1}{2}}\,dx\,sen.x\,sen.\theta}{dt\,sen.n}$.

Corolario 8.

Los momentos que padeciere el cuerpo serán, pues, proporcionales á $\frac{V}{dt}$, ó iguales á una constante qualquiera que sea, multiplicada por $\frac{V}{dt}$.

Corolario 9.

Si el cuerpo fuere formado por la revolucion de una línea qualquiera al rededor del mismo exe que pasa por el centro de gravedad, y sobre que gira el cuer-

po, será $sen.x = o$, y por consiguiente tambien serán los momentos $= o$.

PROPOSICION 80.

Reducir los momentos que padece un cuerpo que tiene dos mitades iguales y semejantes, y que gira sobre un exe horizontal, á horizontales y verticales.

Si se divide el momento $\frac{mbruD^{\frac{1}{2}}\, a sen.x sen.\theta}{2 sen.\eta} = -$ $\frac{mbrux^{\frac{1}{2}}\, dx sen.x sen.\theta}{2 sen.\eta}$, que padecen qualesquiera dos quadrículas, por r, quedará la fuerza que estas exercen $= \frac{mbux^{\frac{1}{2}}\, dx sen.x sen.\theta}{2 sen.\eta}$. La velocidad u se puede descomponer en la horizontal $\frac{u(k-x)}{r}$, y la vertical $\frac{uy}{r}$: expresando k la altura vertical desde el centro de gravedad á la superficie del fluido, x la misma desde la quadrícula á la propia superficie, y y la distancia horizontal desde la quadrícula al plano vertical que coíncide con el exe. Substituyendo estos valores por u solo en la fuerza, se compondrá esta de las dos $\frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx(k-x) sen.x sen.\theta + mbuyx^{\frac{1}{2}} dx sen.x sen.\theta}{2 r sen.\eta}$: ó porque la primera procede de movimiento horizontal, en cuyo caso (*Cor.* 11. *Lem.* 1.) es $sen.\theta = sen.\lambda sen.\eta$, y la segunda de vertical, que dá (*Corolario* 12. *Lema* 1.) $sen.\theta = cos.\eta$, se compondrá de las dos $\frac{mdux^{\frac{1}{2}}dx}{2 r sen.\eta}\left(sen.x sen.\lambda sen.\eta(k-x) + y sen.x cos.\eta\right)$. Cada una de estas partes se puede descomponer en dos, una horizontal y otra vertical, substituyendo en el pri-

mer

mer caso (*Lema* 1.) $sen.x = sen.\lambda sen.\eta$, y en el segundo $sen.x = cos.\eta$, serán, pues, las quatro partes - - -

$$\frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx}{2r\,sen.\eta}\left(se.\lambda^2 se.\eta^2(k-x)+se.\lambda se.\eta cos.\eta(k-x)+y se.\lambda se.\eta cos.\eta+y cos.\eta^2\right)$$

Para reducir esta fuerza á momentos horizontales y verticales, se han de multiplicar las partes - - - - - $sen\lambda^2 sen.\eta^2(k-x)+y sen.\lambda sen.\eta cos.\eta$, por $(k-x)$, distancia vertical desde la quadrícula al plano horizontal que pasa por el centro de gravedad; y las $sen\lambda.sen.\eta cos.\eta(k-x)+y cos.\eta^2$, por y, distancia horizontal desde la propia quadrícula al plano vertical coincidente con el exe. Serán, pues, los momentos que padecen dos quadrículas correspondientes, $=$

$$\frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx}{2r\,sen.\eta}\left(sen.\lambda^2 sen.\eta^2(k-x)^2+2sen.\lambda sen.\eta cos.\eta(k-x)y+y^2 cos.\eta^2\right)$$

$= \frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx}{2r\,sen.\eta}\left(sen.\lambda sen.\eta(k-x)+y cos.\eta\right)^2$ ó substituyendo $\frac{udt}{r}=V$,

$= \frac{mbVx^{\frac{1}{2}}dx}{2dt\,sen.\eta}\left(sen.\lambda sen.\eta(k-x)+y cos.\eta\right)^2$: y los que padece

todo el cuerpo $= \frac{\frac{1}{2}mV}{dt}\int\frac{bx^{\frac{1}{2}}dx}{sen.\eta}\left(sen.\lambda sen.\eta(k-x)+y cos.\eta\right)^2 =$

$\frac{\frac{1}{2}mV}{dt}\int cx^{\frac{1}{2}}dx\left(sen.\lambda sen.\eta(k-x)^2+2y(k-x)cos.\eta+\frac{y^2 cos.\eta^2}{sen.\lambda sen.\eta}\right)$.

PROPOSICION 81.

Reducir los momentos que padece un cuerpo que tiene dos mitades iguales y semejantes, y que gira sobre un exe vertical, á dos horizontales perpendiculares entre sí.

Supónganse tirados dos planos verticales coincidentes con el exe, y perpendiculares entre sí: que la distancia horizontal desde una quadrícula á uno de los

 pla-

planos se llame z, y la otra y: descompóngase la velocidad u en dos paralelas á los mismos planos, que serán $\frac{uz}{r}$ y $\frac{uy}{r}$: substitúyanse estos valores en la fuerza $\frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx\,sen.x\,sen.\theta}{2\,sen.n}$ (*Prop.* 80.) que padecen dos quadrículas correspondientes en lugar de u solo, y quedará esta dividida en dos $= \frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx\,sen.x\,sen.\theta}{2r\,sen.n}(z+y)$.
Como ambas proceden de movimiento horizontal, y se piden ó exercitan en la misma direccion, para ambas es, tanto $sen.x$, como $sen.\theta = sen.\lambda\,sen.n$: luego serán $\frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx\,sen.\lambda^2\,sen.n^2}{2r\,sen.n}(z+y) = \frac{\frac{1}{2}mcVx^{\frac{1}{2}}dx\,sen.\lambda\,sen.n}{dt}(z+y)$.
Multiplíquese ahora cada una por la distancia horizontal z y y desde el exe á su direccion, y colocando dz y dy por c, serán los momentos ---------- $\frac{\frac{1}{2}mVx^{\frac{1}{2}}dx\,sen.\lambda\,sen.n}{dt}(z^2dz+y^2dy)$.

Escolio 1.

Se ha supuesto, como se vé en el cálculo, no solo que las dos mitades del uno y otro lado del uno de los planos verticales sean iguales y semejantes, sino tambien las otras dos de un lado y otro del otro plano vertical: lo que se debe tener presente para no confundirlo con los cuerpos que pueden solo tener iguales y semejantes las dos mitades que divide un solo plano.

Escolio 2.

Aunque la rotacion se puede hacer sobre qualquier exe, y con qualquiera inclinacion, pudiendose, sin

sin embargo, reducir á tres, una sobre un exe vertical, y dos sobre dos exes horizontales perpendiculares entre sí, nos reduciremos, para mayor facilidad, á especular la rotacion solo sobre estos tres exes; ó solo sobre uno vertical y otro horizontal, respecto á que lo que se dixere de este, corresponde igualmente al otro horizontal.

PROPOSICION 82.

Hallar los momentos que padecerá un cylindro que flota horizontalmente, y gira sobre un exe horizontal paralelo á sus lados, y pasa por el centro de gravedad.

Que sea ABFD el cylindro, C su centro de magnitud, y CGE una vertical en que se halla el centro de gravedad G. Tírese la horizontal BF, así como CB, GB, y serán $CG = k$, $CB = R$, $CE = x$, y $BE = y$. El momento que padece una diferencial horizontal en B con su correspondiente en F es (*Cor.* 7. *Prop.* 79.) $= \frac{\frac{1}{2} m b r^2 V x^{\frac{1}{2}} dx \, sen. x \, sen. \theta}{dt \, sen. n}$, siendo b la longitud del cylindro, $r = GB$, $x = \theta =$ ángulo GBC. Fig. 77.

$sen. n =$ seno de BCE es $= \frac{y}{R}$: con que será $k : sen. \theta = r : \frac{y}{R}$: lo que dá $r \, sen. \theta = \frac{ky}{R}$. Estos valores substituidos en los momentos los reducen á $\frac{\frac{1}{2} m b V k^2 y x^{\frac{1}{2}} dx}{R dt} = \frac{m b V k^2}{2 R dt} x^{\frac{1}{2}} dx \sqrt{R^2 - x^2}$. Serán, pues, los que padece todo el cylindro desde la horizontal BF hasta el diámetro, asimismo horizontal AD $= \frac{m b V k^2}{2 R dt} \int x^{\frac{1}{2}} dx \sqrt{R^2 - x^2}$; ó reduciendo $\sqrt{R^2 - x^2}$ á serie, é integrando en efecto = - - - - - - - - - - - -

mb

$$\frac{mbVk^2}{dt}\left(\tfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^{\frac{7}{2}}}{7.2R^2}-\frac{x^{\frac{11}{2}}}{11.8R^4}-\frac{x^{\frac{15}{2}}}{15.16R^6}-\frac{5x^{\frac{19}{2}}}{19.128R^8}-\frac{7x^{\frac{23}{2}}}{23.256R^{10}}-\&\right).$$

Substituyendo ahora $x = R$, serán los momentos que padece todo el medio cylindro ABHFD $=$ --

$$\frac{mbVk^2R^{\frac{3}{2}}}{dt}\left(\tfrac{1}{3}-\frac{1}{7.2}-\frac{1}{11.8}-\frac{1}{15.16}-\frac{5}{19.128}-\frac{7}{23.256}-\&\right):$$

ó con cortísima diferencia $= \frac{6}{25}\frac{mbVk^2R^{\frac{3}{2}}}{dt}$.

Corolario 1.

Los momentos de la desnivelacion se hacen despreciables por lo prevenido en la Proposicion precedente.

Corolario 2.

Todos los momentos se desvanecen quando es $k = 0$: esto es, quando coincide el centro de gravedad con el exe.

CAPITULO 13.

De la velocidad angular con que giran los cuerpos flotantes sobre un exe qualquiera.

PROPOSICION 83.

HAllar la velocidad angular con que gira un cuerpo flotante sobre un exe qualquiera, hallandose animado por una ó mas potencias.

La velocidad angular es (*Cor.*2. *Lem.*3.*Lib.*1) $V = \frac{dt\int p\pi dt}{S}$, expresando $p\pi$ la suma de los momentos de

las

las potencias que actuen, t el tiempo de su accion, y S la suma de los momentos de inercia: substitúyanse, pues, en lugar de $p\pi$, los momentos que padeciere el cuerpo, y resultan de las resistencias, y de las potencias que actuaren, y se tendrá una equacion, de la qual se debe deducir el valor de la velocidad angular V en qualquiera instante de la accion.

Corolario 1.

Quanto mayores fueren los momentos de inercia, mayor tiempo necesitará el cuerpo para adquirir una misma velocidad angular.

Escolio.

Los momentos $p\pi$, ó suma de ellos, pueden proceder de la accion de varias potencias: pueden ser estas constantes ó independientes de la velocidad angular V; ó pueden tener una absoluta dependencia de esta, como en efecto la tienen por motivo de las resistencias del fluido, como vimos en el Capitulo precedente. *Mr. Bouguer* (*Tratado del Navío*, lib. 2. sec. 3. cap. 1. §. 3.), y *Leonardo Eulero* prescindieron de ellas, y aun añade aquel, haber sido por motivo de que el cuerpo separa muy poco fluido, y ser la accion de este como la del ayre en los péndulos, que casi se hace insensible, á causa de ser la velocidad angular V muy corta; pero el caso resulta tan diverso, como que los péndulos oscilaran aun mas perfectamente sin resistencia: y los cuerpos en su rotacion sobre los fluidos no pudieran subsistir. El único caso en que esto tiene cavimento es aquel en que el cuerpo está formado por la rotacion de un plano qualquiera al rededor de un exe, con el qual coincide el centro de gravedad: en este, supuesto que la rotacion ú oscilacion se haga

so-

sobre un exe horizontal, inclinado un poco el cuerpo, será el momento que le obligue á girar (*Corol.* 8. *Prop.* 66.) el que resulta de la accion del fluido verticalmente, que es KP*sen.*Δ, el qual es cero quando es K=o; pero esta condicion de K=o se hace precisa para que los momentos resistentes se desvanezcan: luego no se desvanecen, ni aun en este caso, sino quando el cuerpo ya no tiene accion para girar: esto es, quando pierda enteramente la estabilidad, y se haga imposible en la práctica el sostenerse. Se hace, pues, precisa por consiguiente la resistencia del fluido en la rotacion de los cuerpos. Que en algunos casos no sea tan diminuta como creyó *Mr. Bouguer* se hará patente mas adelante.

Corolario 2.

Si fuere $p\pi = 32KP sen.\Delta - \frac{GV}{dt}$, siendo K, P y G constantes, será $V = \frac{dt\int(32KPdt sen.\Delta - GV)}{S}$: ó porque (*Cor.* 1. *Prop.* 18. *Lib.* 1.) es $V = \frac{udt}{K}$, expresando *u* la velocidad que tenga un punto, distante del exe la cantidad K, será $\frac{udt}{K} = \frac{dt\int\left(32KPdt sen.\Delta - \frac{Gudt}{K}\right)}{S}$: y $Su = 32K^2P\int dt se.\Delta - G\int udt$.

Corolario 3.

Si se supone G=o, ó se prescinde de las resistencias, como hicieron los Autores citados, quedará $V = \frac{dt\int 32KPdt sen.\Delta}{S} = \frac{32dtKP}{S}\int dt sen.\Delta$.

PRO-

PROPOSICION 84.

Hallar la longitud del Péndulo simple isochrono con el cuerpo flotante, que gira sobre un exe horizontal.

Que sea la longitud del Péndulo L, y será (*Cor.* 1. *Def.* 29. *Lib.* 1.) $V = \frac{\xi dt \int dt sen.\Delta}{L} = \frac{\omega dt}{L}$, suponiendo ω la velocidad del cuerpo en el Péndulo: luego $\int dt sen.\Delta = \frac{\omega}{\xi}$; pero por suponerse que los cuerpos describen arcos semejantes en iguales tiempos, es $\omega : u = L : K$, y $\omega = \frac{Lu}{K}$, con que tambien es $\int dt sen.\Delta = \frac{Lu}{\xi K} = \frac{Lu}{32K}$, cuyo valor substituido en la equacion $Su = 32K^2P\int dt sen.\Delta - G\int udt$, resulta $Su = KPLu - G\int udt$. Suponiendo ahora que las oscilaciones sean cortas, ó infinitamente pequeñas, podemos suponer el arco que describen los cuerpos igual al seno del mismo arco, que en el flotante es $K sen.\Delta$, y por consiguiente será $udt = K d sen.\Delta$, y $\int udt = K sen.\Delta$, que dá $Su = KPLu - GK sen.\Delta$; pero la velocidad ω al medio de la oscilacion es $= 8\left(\frac{L^2 sen.\Delta^2}{2L}\right)^{\frac{1}{2}} = 8 sen.\Delta\sqrt{\tfrac{1}{2}L} = \frac{Lu}{K}$; luego $u = \frac{8K sen.\Delta}{\sqrt{2L}}$, cuyo valor substituido, resulta $\frac{8KS sen.\Delta}{\sqrt{2L}} = \frac{8K^2P sen.\Delta\sqrt{L}}{\sqrt{2}} - GK sen.\Delta$; ó $\tfrac{1}{8}G\sqrt{2L} = KPL - S$, y quadrando $\tfrac{1}{32}G^2L = K^2P^2L^2 - 2KPLS + S^2$, que dá $L = \frac{S}{KP} - \frac{G^2}{64K^2P^2} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{KP} + \frac{G^2}{64K^2P^2}\right)^2 + \frac{S^2}{K^2P^2}}$.

Escolio 1.

La analogía $\omega : u = L : K$, no es enteramente legítima; pero respecto á la pequeñez de los arcos descritos se puede tomar por tal.

Corolario 1.

Si se supone $G = o$, ó se prescinde de las resistencias, quedará $L = \frac{S}{KP}$: la misma longitud que hallamos (*Cor.* 3. *Def.* 30. *Lib.* 1.) del Péndulo simple isóchrono de otro compuesto: luego el cuerpo flotante oscila como un Péndulo.

Corolario 2.

Si llamamos l la longitud del Péndulo simple que vibre los segundos de tiempo medio, y t el tiempo en segundos en que vibra ó gira el cuerpo flotante ó Péndulo L: respecto que los quadrados de los tiempos en que se hacen las oscilaciones son como las longitudes de los Péndulos (*Cor.* 7. *Prop.* 48. *Lib.* 1.) serán $l : L = 1 : t^2$, y $L = lt^2$; cuyo valor substituido en la equacion $L = \frac{S}{KP} + \frac{G^2}{64K^2P^2} + \sqrt{\left(\frac{S}{KP} + \frac{G^2}{64K^2P^2}\right)^2 - \left(\frac{S}{KP}\right)^2}$, resulta $t = \sqrt{\frac{S}{KPl} + \frac{G^2}{64K^2P^2l} + \frac{1}{l}\sqrt{\left(\frac{S}{KP} + \frac{G^2}{64K^2P^2}\right)^2 - \left(\frac{S}{KP}\right)^2}}$.

Corolario 3.

Si se supone $G = o$, queda $t = \sqrt{\frac{S}{KPl}}$.

Es-

Escolio 2.

Podemos comparar ahora, para satisfacer lo dicho (*Esc. Prop.*83.), los momentos resistentes $\frac{6mbVk^2R^{\frac{3}{2}}}{25dt}$ (*Prop.* 82.) que padece un cylindro en su rotacion, con los $kP sen.\Delta$, á que se reduce su estabilidad. Supongamos $\frac{6mbVk^2R^{\frac{3}{2}}}{25dt} = kP sen.\delta$, y substituyamos (*Cor.* 1. *Prop.*18. *Lib.* 1.) por $\frac{V}{dt}$, su igual $\frac{u}{k}$, suponiendo u la velocidad con que se mueve el exe del cylindro, distante del centro de gravedad la cantidad k, y será $\frac{6mbuR^{\frac{3}{2}}}{25} = P sen.\delta$. Supongamos tambien que el cylindro esté sumergido en el fluido hasta su mayor anchura, segun se supuso (*Prop.* 82.), y será su peso $P = \frac{1}{2}R^2 cbm$, expresando c la circunferencia del cylindro, cuyo diámetro es la unidad: lo que dá $\frac{6}{25}mbuR^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}R^2 cbm sen.\delta$, ó $12u = 25R^{\frac{1}{2}}c sen.\delta$. Supóngase asimismo que inclinado el cylindro del ángulo Δ, produgera al restablecerse, por dexarle en libertad, la velocidad u, y será (*Prop.* 84.) $u = \frac{8k sen.\Delta}{\sqrt{2L}}$; ó poniendo $k = \frac{1}{2}R$, $u = \frac{4R sen.\Delta}{\sqrt{2L}}$: lo que dá $\frac{48R sen.\Delta}{\sqrt{2L}} = 25R^{\frac{1}{2}}c sen.\delta$, y $sen.\delta = \frac{48R^{\frac{1}{2}} sen.\Delta}{25c\sqrt{2L}}$. Sera, pues, baxo el supuesto de $k = \frac{1}{2}R$, y $P = \frac{1}{2}R^2 bcm$, $\frac{6mbVk^2R^{\frac{3}{2}}}{25dt} = kP sen.\delta = \frac{24R^{\frac{3}{2}}P sen.\Delta}{25c\sqrt{2L}}$: y asi la fuerza de la estabilidad, ó momento $kP sen.\Delta = \frac{1}{2}RP sen.\Delta$, será al momento resistente que la misma inclinacion

Δ produce en la rotacion, como $\frac{1}{2}RP\,sen.\Delta$ - -- $\frac{24R^{\frac{3}{2}}P\,sen.\Delta}{25c\sqrt{2L}}$, ó como $25c\sqrt{2L}$ á $48R^{\frac{1}{2}}$. Si suponemos (*Cor.* 1.) $L = \frac{S}{KP}$, y se supone $S = \frac{1}{4}k^2P$, será $L = \frac{1}{4}k = \frac{1}{8}R$: y un momento al otro, como $25c$ á 96.

Escolio 3.

Tambien se puede examinar, en el propio caso del cylindro, el valor de L, atendiendo al de G. Los momentos resistentes son (*Pro.*82.*y Cor.*2. *Pro.*83) $\frac{6mbVk^2R^{\frac{3}{2}}}{25dt} = \frac{GV}{dt}$: luego $G = \frac{6}{25}mbk^2R^{\frac{3}{2}}$, ó poniendo $k = \frac{1}{2}R$, $G = \frac{6}{100}mbR^{\frac{7}{2}}$, y $\frac{G^2}{64k^2P^2} = $ --- $\frac{36m^2b^2R^7}{P^2(100)^2(32)^2}$, ó substituyendo $P = \frac{1}{2}R^2bcm$, $\frac{G^2}{64k^2P^2} = \frac{36R.}{(25c)^2(16)^2}$. Del mismo modo substituyendo en $\frac{S}{KP}$ los valores de K y P, con $S = \frac{1}{4}K^2P$, será $\frac{S}{KP} = \frac{K^2P}{4KP} = \frac{1}{4}K = \frac{1}{8}R$: con que tendremos $L = \frac{1}{8}R +$

$$\frac{36R}{(25c)^2(26)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{8}R + \frac{36R}{(25c)^2(16)^2}\right)^2 - \frac{1}{64}R^2} = \frac{1}{8}R + \frac{36R}{(25c)^2(16)^2}$$

$$+ \frac{1}{8}R\sqrt{\left(1 + \frac{36}{(25c)^2(32)^2}\right)^2 - 1} = \frac{1}{8}R + \frac{36R}{(25c)^2(16)^2} +$$

$$\frac{3R}{25c.16}\sqrt{1 + \frac{9}{(25c)^2.16}}$$, ó con corta diferencia $L = \frac{1}{8}R(1 + \frac{1}{52})$: de suerte que del valor de G solo resulta el Péndulo simple isochrono con el cylindro, $\frac{1}{419}R$ mayor.

Co-

Corolario 4.

Si substituímos el valor de $L=\frac{1}{8}R$ en la equacion (*Cor.*2.) $L=lt^2$, tendremos $lt^2=\frac{1}{8}R$: lo que dá el tiempo en que concluirá una oscilacion ó vibracion el cylindro $t=\frac{R^{\frac{1}{2}}}{(8l)^{\frac{1}{2}}}$.

Escolio 4.

La longitud del Péndulo simple que vibra los segundos de tiempo medio á la orilla del Mar en España, ya diximos (*Esc. Prop.*48. *Lib.*1.) que es de 440 líneas del pie de *París*, ú de $\frac{440.16}{15}$ del de *Londres*: será, pues, $l=\frac{440.16}{15.144}=3\frac{7}{27}$; cuyo valor, substituido en la equacion $t=\frac{R^{\frac{1}{2}}}{(8l)^{\frac{1}{2}}}$, será $t=\frac{1}{8}R^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{27}{11}}$, ó con corta diferencia $t=\frac{63}{320}R^{\frac{1}{2}}$. Si ponemos, pues, el cylindro de 32 pies de diámetro, será $R=16$, y el tiempo en que cumplirá su oscilacion será de cerca de $\frac{63}{80}$ de segundo.

PROPOSICION 85.

Hallar la máxîma y mínima velocidad con que giran los cuerpos flotantes.

Baxo el supuesto de $p\pi=32KPfen.\Delta-\frac{GV}{dt}$, hallamos (*Cor.*2. *Prop.*83.) $Su=32K^2Pfdtfen.\Delta-Gfudt$. Diferenciando esta equacion es $Sdu=32K^2Pdtfen.\Delta-Gudt$, ó $\frac{du}{dt}=\frac{32K^2Pfen.\Delta-Gu}{S}$: luego en la máxîma u,

en

en que es $du = o$, tenemos $32K^2P sen.\Delta - Gu = o$, que dá la máxîma $u = \frac{32K^2P sen.\Delta}{G}$. Del mismo modo la mínima u, sucede á la máxîma du, ó $\frac{32K^2P sen.\Delta - Gu}{S}$; luego la mínima $u = o$.

Corolario 1.

En el (*Cor.* 12. *Def.* 33. *Lib.* 1.) se halló que la accion, que sobre las fibras de una palanca resulta, con motivo del movimiento, es proporcional á Sdu. Considerando, pues, el cuerpo flotante, que gira como una palanca, la accion que padecerán sus fibras será como Sdu, ó como su igual $32K^2Pdt sen.\Delta - Gudt$: y la mayor que padecerán en toda la vibracion, que es en el instante de empezarla ó fenecerla, como $32K^2Pdt sen.\Delta$.

Corolario 2.

Luego la mayor accion que padecen las fibras de un cuerpo en el acto de la rotacion, ninguna dependencia tiene de G, ú de la resistencia del fluido, y solo procede de la cantidad $K^2Pdt sen.\Delta$, ó $32K^2P sen.\Delta$: esto es, del producto de la estabilidad $KP sen.\Delta$ por $32K$.

Corolario 3.

Una palanca unida al cuerpo que gira, padecerá la accion proporcional á Sdu, expresando S los momentos de inercia de la sola palanca; pero es $du = \frac{32K^2Pdt sen.\Delta - Gudt}{S}$: luego la accion que padecerá la palanca será proporcional á $\frac{Sdt(32K^2P sen.\Delta - Gu)}{S}$: y la mayor de todas, proporcional á $\frac{SK^2P sen.\Delta}{S}$.

APEN-

APENDICE I.

Sobre la theórica de los Cometas que vuelan los Niños, para verificar la ley con que resisten los fluidos.

EL medio de verificar la theórica en que cabe duda, es aplicarla á varias experiencias. De las mas comunes que se nos ofrecen á la vista diariamente, en asunto á la resistencia de los fluidos, es el vuelo de los Cometas que usan los Niños. O la fuerza del viento en ellos es en razon compuesta duplicada de su velocidad y seno de su ángulo de incidencia, como generalmente creen todos los Autores modernos; ó como la misma simple razon, segun hemos expuesto. Dando una verdadera theórica de los Cometas se puede comprobar qual de los dos systhemas conviene con la práctica: y por consiguiente, qual es el verdadero. *Eulero*, hijo de *Leonardo*, en las Memorias de la Real Academia de las Ciencias de *Berlin*, tom.12. pag.322, dá esta theórica, fundada en el primer systhema, ó razon duplicada. Divide su Memoria en tres casos: el primero supone, que el Cometa con su hilo sea un cuerpo rígido é incapaz de alteracion: y el segundo y tercero, que el hilo esté atado á un solo punto determinado del Cometa, sobre el qual pueda este girar libremente. El primer caso no se hace de modo alguno aplicable á la práctica, que es lo que apetecemos para conseguir las luces de la experiencia. En el segundo atiende *Eulero* á dos rotaciones que debe tener el Cometa, una sobre el extremo superior del hilo, y otra sobre el extremo inferior: esta dice que resulta de tres fuerzas, una la del viento, reunida en el centro

tro de magnitud del Cometa: otra la del peso del mismo, reunida en su centro de gravedad; y otra la del peso del hilo, reunida en el centro de gravedad de él. Las dos primeras son efectivas; pero la tercera solo cabe siendo el hilo rígido, ó como una palanca: siendo enteramente flexíble, como lo supondremos, en nada actua á tal rotacion, porque la única fuerza que exerce solo actua segun la direccion del mismo hilo; y en ninguna manera obliquamente, que era lo único que podia contribuir á la efectiva rotacion. Debemos, pues, inferir que *Eulero* consideró el hilo rígido, sin embargo de suponer que el Cometa podia girar libremente sobre los dos extremos de aquel, lo que hace el caso igualmente inaplicable á la práctica que el primero. A mas de esto se sujetó en él á solo atar el hilo á un punto determinado del Cometa, lo que en la práctica tampoco tubiera jamas ningun buen efecto. De ordinario se atan al Cometa dos, tres, ó quatro hilos, que reunidos á una distancia corta, sigue despues uno solo. Con esta disposicion el Cometa queda seguro sin poderse mover ó girar sobre ninguno de sus diámetros; sin ello, al menor accidente, fácil se descompone, y se precipita al suelo. Bien apercibió esto *Eulero*; pero para poner á ello el preciso reparo, halló que le venia tan complícado el cálculo, que estimó mejor escusarlo, y ceñirse á aquel unico caso de un solo hilo. En efecto el cálculo viene bien embarazoso; pero es solo en la suposicion de ser las fuerzas del viento en razon compuesta duplicada de sus velocidades, y de los senos de sus ángulos de incidencia: en la de ser como la simple razon, segun la ultima theórica, ya no es lo propio: el cálculo resulta sumamente fácil, con que no podemos menos de atender á la circunstancia de los varios hilos, resolviendo el Problema generalmente; y por lo que toca á comparar las fuerzas del viento, para ver si en efecto no corres-

pon-

ponden á la razon duplicada, nos reducirémos al solo caso de un hilo, como hizo *Eulero.*

Este aplica al Cometa, en su tercer caso, una cola; pero supone que sea otro plano ó Cometa paralelo al primero, que gira libremente en el extremo inferior de este; cuya suposicion no es menos dificil de verificarse en la práctica que las primeras. La cola en el Cometa se hace precisa, á fin de establecer su centro de gravedad mas baxo que el de magnitud, y evitar con ello el movimiento giratorio lateral que resultara: pero mejor que un plano, para la práctica y theórica, se hace un cuerpo rígido qualquiera, largo y delgado, como un alambre, ó la continuacion de la caña, que corre desde el extremo alto hasta el mas baxo, siendo el diámetro principal del mismo Cometa. Con esto podemos escusar hacer atencion á dicha cola; y bastará, para suponerla, establecer el centro de gravedad mas baxo que el de magnitud. Pudiera asimismo producir el efecto necesario de la cola un contrapeso qualquiera, colocado en el extremo inferior del Cometa; pero en este caso, siendo el contrapeso de igual peso á la cola, no baxaria tanto el centro de gravedad como la misma cola; lo que importa mucho para evitar la rotacion lateral sin aumentar peso. La cola, tal como la usan los Niños, es en efecto la mas adequada; pero habiendo de atender en ella al ángulo que formara con el diámetro del Cometa, nos complicaría mucho el cálculo por lo que nos separara el centro de gravedad del cuerpo del mismo Cometa: y asi nos reducimos á una cola rígida, que sea la continuacion del mismo diámetro, cuya suposicion nada se aparta de poderse aplicar á la práctica.

Esto supuesto: sea AB el Cometa, ó mas bien su diámetro, por considerarse cortado por un vertical que coincida con dicho diámetro con el hilo GOV, y aun con la cola BX. Sean AG, DG los dos hilos alto Fig. 78.

y baxo, que atados al diámetro, y unidos en G al unico GOV, sujetan al Cometa. Sean tambien G el centro de magnitud, y P el de gravedad. Tírense la GE perpendicular al diámetro BA, las PK, EML verticales, la GK paralela al horizonte VFL, y la IGF tangente al hilo en el punto G. Sean por último

$PC = b$

$CE = e$

$GE = g$

$P =$ al peso del Cometa con su cola.

$u =$ á la velocidad del viento.

$\varphi =$ al ángulo GEL.

$\theta =$ al ángulo IGE.

$Ru\,sen.\varphi =$ á la fuerza del viento en el Cometa, segun la direccion perpendicular á su plano, y segun el systhema expuesto de estas fuerzas: y será de resulta el ángulo $IHE = \varphi + \theta$.

Hallar los senos y cosenos de φ, θ, y $\varphi+\theta$.

1 Habiendo de girar el Cometa libremente sobre el Punto G, los momentos respectivos á este punto deben equilibrarse. Las fuerzas que actuan son el peso P del Cometa que se dirige segun la vertical PK, y la fuerza del viento $Ru\,sen.\varphi$, que se dirige segun la perpendicular al diámetro BA. Sus momentos son $P.GK = P(KM+MG) = P(b+e)cos.\varphi + Pg\,sen.\varphi$, y $Ru\,sen.\varphi.CE = Rue\,sen.\varphi$. Han de ser, pues, $Rue\,sen.\varphi =$ $P(b+e)cos.\varphi + Pg\,sen.\varphi$: que da $\frac{sen.\varphi}{cos.\varphi} = tang.\varphi = \frac{P(b+e)}{Rue - Pg}$:

y por consiguiente $sen.\varphi = \frac{P(b+e)}{((Rue-Pg)^2 + P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$

y $cos.\varphi = \frac{Rue - Pg}{((Rue-Pg)^2 + P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Para

2 Para hallar el seno del ángulo θ que forma la tangente IGF con la GE, tenemos, que en el triángulo GEH los tres lados GE, EH, HG, ó los senos de sus ángulos opuestos, pueden expresar las fuerzas que actúan: GE, la $Ru\,sen.\varphi$, por dirigirse segun la misma GE perpendicular al diámetro BA: EH, la P, por dirigirse segun esta propia vertical: quedando GH para expresar la resulta de las otras dos fuerzas, segun el mismo hilo GH. Serán, pues, $sen.(\varphi+\theta) : sen.\theta = Ru\,sen.\varphi : P$: luego $Ru\,sen.\varphi\,sen.\theta = P\,sen.(\varphi+\theta) = P\,sen.\varphi\,cos.\theta + P\,sen.\theta\,cos.\varphi$: que dá $\frac{sen.\varphi}{cos.\varphi} = tang.\varphi = \frac{P\,sen.\theta}{Ru\,sen.\theta - P\,cos.\theta}$, segundo valor de esta tangente. Igualando ahora los dos valores hallados, será $\frac{P(b+e)}{Rue-Pg} = \frac{P\,sen.\theta}{Ru\,sen.\theta - P\,cos.\theta}$: que dá $\frac{sen.\theta}{cos.\theta} = tang.\theta = \frac{P(b+e)}{Rub+Pg}$ y por consiguiente $sen.\theta = \frac{P(b+e)}{((Rub+Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$

y $cos.\theta = \frac{Rub+Pg}{((Rub+Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$.

3 Substituyendo en las equaciones $sen.(\varphi+\theta) = sen.\varphi\,cos.\theta + sen.\theta\,cos.\varphi$, y $cos.(\varphi+\theta) = cos.\varphi\,cos.\theta - sen.\varphi\,sen.\theta$ los valores hallados de $sen.\varphi$, $cos.\varphi$, $sen.\theta$ y $cos.\theta$, será

$$sen.(\varphi+\theta) = \frac{Ru.P(b+e)^2}{\left(((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)\cdot((Rub+Pg)^2+P^2(l+e)^2)\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$cos.(\varphi+\theta) = \frac{(Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+e)^2}{\left(((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)\cdot((Rub+Pg)^2+P^2(b+e)^2)\right)^{\frac{1}{2}}}$$

4 Que sea $u=0$, y será $sen.(\varphi+\theta)=0$, y $cos.(\varphi+\theta) = -1$: lo que denota que la tangente FH caerá á la Fig. 78.
parte de abaxo de la horizontal FL, y que coincidirá 79.

con la vertical HL: esto es, que el Cometa quedará colgando del hilo. Serán asimismo $fen.\varphi = fen.\theta = \frac{b+e}{(g^2+(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}} = fen.IGE$; pero $\frac{b+e}{(g^2+(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}} = fen.PGE$: luego el punto I concurre con el punto P: esto es, la prolongacion del hilo FG pasa por el centro de gravedad: cuya noticia tan comun, verifica lo supuesto.

5 Que sea $Rue = Pg$, y será $cof.\varphi = 0$, y $fen.\theta = 1$: lo que denota que en este caso el Cometa AB queda vertical. Será asimismo $cof.(\varphi+\theta) = \frac{-P}{(R^2u^2+P^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-e}{(e^2+g^2)^{\frac{1}{2}}} = fen.EGI$; pero $\frac{-e}{(e^2+g^2)^{\frac{1}{2}}} = fen.\ EGC$: luego el punto I concurre con el punto C, ó la prolongacion del hilo pasa por el centro de magnitud C.

Fig. 80.

6 Que sea $u = \infty$, y será $fen.\varphi = 0$: lo que denota que el Cometa se hallará horizontal. Tambien será $fen.(\varphi+\theta) = 0$: y por consiguiente la tangente HF se hallará vertical.

Fig. 78.

Hallar la fuerza que hace el viento en el Cometa.

7 Esta fuerza es $= Rufen.\varphi$: substituyendo en ella el valor de $fen.\varphi = \frac{P(b+e)}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$, quedará $Rufen.\varphi = \frac{RuP(b+e)}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$.

8 Que sea $u = 0$, y será $Rufen.\varphi = 0$.

9 Que sea $Rue = Pg$, y será $Rufen.\varphi = \frac{Pg}{e}$.

10 Que sea $u = \infty$, y será $Rufen.\varphi = \frac{P(b+e)}{e}$.

Que

11 Que sea en general $(\mathrm{R}ue-\mathrm{P}g)^2=(n^2-1)\mathrm{P}^2(b+e)^2$, expresando n un número qualquiera, y será $\mathrm{R}u\,sen.\varphi=\frac{\mathrm{P}(b+e)(n^2-1)^{\frac{1}{2}}}{ne}+\frac{\mathrm{P}g}{ne}$.

12 Este valor manifiesta que no padece el Cometa la máxîma fuerza quando es $u=\infty$; porque aunque en este caso es tambien $\frac{\mathrm{P}(b+e)(n^2-1)^{\frac{1}{2}}}{ne}$ el máxîmo es $\frac{\mathrm{P}g}{ne}$ el mínimo. Para hallar, pues, la máxîma $\mathrm{R}u\,sen.\varphi$ diferenciemos su valor, y será --------

$$\frac{\mathrm{RP}(b+e)du}{\left((\mathrm{R}ue-\mathrm{P}g)^2+\mathrm{P}^2(b+e)^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(\mathrm{R}ue-\mathrm{P}g)(b+e)\mathrm{R}^2\mathrm{P}eudu}{\left((\mathrm{R}ue-\mathrm{P}g)^2+\mathrm{P}^2(b+e)^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

que dá $u=\frac{\mathrm{P}((b+e)^2+g^2)}{\mathrm{R}ge}$. Substituyamos este valor de u en el de $\mathrm{R}u\,sen.\varphi$, y será la máxîma ---

$$\mathrm{R}u\,sen.\varphi=\frac{\frac{\mathrm{P}}{ge}\left((b+e)^2+\frac{\mathrm{P}g}{e}\right)\mathrm{P}(b+e)}{\left(\frac{\mathrm{P}^2}{g^2}(b+e)^4+\mathrm{P}^2(b+e)^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\mathrm{P}}{e}\left((b+e)^2+g^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hallar la fuerza que hace el hilo.

13 Ya se dixo (§.2) que en el triángulo GEH, expresando GE la fuerza $\mathrm{R}u\,sen.\varphi$ del viento, y EH el peso P del Cometa, expresa GH la fuerza ó tension resultante que actua sobre el hilo: es pues esta en el punto $\mathrm{G}=\frac{\mathrm{P}\,sen.\varphi}{sen.\theta}=\frac{\mathrm{P}\left((\mathrm{R}ub+\mathrm{P}g)^2+\mathrm{P}^2(b+e)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left((\mathrm{R}ue-\mathrm{P}g)^2+\mathrm{P}^2(b+e)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$.

14 Para hallar la misma fuerza ó tension en qualquiera otro punto del hilo, supóngase este como un polígono, compuesto de infinito numero de lados infinitamente pequeños. Que sean dos de estos AB, BC, y Fig. 81. tira-

tirada la vertical BF, y la CF paralela á AB, CF expresará la fuerza ó tension que hace BA, BC la que hace la misma BC, y BF la fuerza resultante de las dos, que debe equilibrar el peso del hilo. Será, pues, la tension de BA á la tension de BC, como el seno de FBC al seno de CFB, ú de su igual ABF; esto es, las dos tensiones de BA y BC, como reciprocamente los senos de ABF, y FBC. Lo mismo se demonstrará de la tension de CB con la que se sigue CD, y asi de todas las diferenciales: luego en general la tension del hilo en qualquiera punto de él, es reciprocamente como el seno que forma el mismo hilo con la vertical.

15 Que sea ABCDE el hilo: divídase en las partes infinitamente pequeñas AB, BC, CD, DE, &c. de los puntos B, C, D, E, &c., levántense verticales, y tírense CF paralela á BA, DG paralela á CB, EH á DG, &c.: con esto, en el triángulo FBC, llamando los ángulos FBA, GCB, HDC, &c. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c., si CF expresa la fuerza ó tension que sufre BA, CB expresará la que sufre BC, y las dos fuerzas serán como $sen.\beta : sen.\alpha$: esto es, si llamamos A la fuerza que sufre AB, B la que sufre BC, C la que sufre CD, &c., será $A : B = sen.\beta : sen.\alpha$: de la misma manera será $B : C = sen.\gamma : sen.\beta$, y $C : D = sen.\delta : sen.\gamma$: de donde se deducen las equaciones $A sen.\alpha = B sen.\beta = C sen.\gamma = D se.\delta$ $=$&c.; por lo que $A : D = sen.\delta : sen.\alpha$: esto es, la fuerza que sufre ó padece el hilo en AB á la que padece en DE reciprocamente como el seno de α al seno de δ.

16 Esto debe entenderse no haciendo atencion á la fuerza que puede producir el viento sobre el hilo, que podemos despreciar. Si se quisiere hacer atencion á ella, es preciso tomar en lugar de la vertical FB la direccion resultante de las dos fuerzas, gravedad y accion del viento.

17 Que se tomen las abscisas sobre una vertical
Fig. 82. AB, y las ordenadas sobre una horizontal, y llamando
á

á aquellas x, á estas y, y á las diferenciales del hilo $dh = $ FA, ó AD, serán AE, AC las dx, y EF, CD las dy. El seno del ángulo que formare el hilo con la vertical será, pues, generalmente $\frac{dy}{dh}$: y como el seno que forma en el extremo superior G es $sen.(\varphi + \theta)$, y la tension en el mismo punto $= \frac{P sen.\varphi}{sen.\theta}$, tendremos Fig.78.

$\frac{1}{sen.(\varphi+\theta)} : \frac{dh}{dy} = \frac{P sen.\varphi}{sen.\theta} : \frac{P sen.\varphi sen.(\varphi+\theta)dh}{sen.\theta dy}$, fuerza ó tension que padecerá el hilo en qualquier punto de él; ó substituyendo por $P sen.(\varphi+\theta)$ su igual $R u sen.\varphi sen.\theta$, (§.2) será dicha tension $= \frac{dh}{dy} R u sen.\varphi^2$.

18 Para hallar esta tension en cantidades conocidas despejadas de diferenciales, igualaremos las fuerzas opuestas que actuan sobre el punto A, reduciendolas á la direccion vertical. Siendo la tension que actua segun AF $= \frac{P sen.\varphi sen(\varphi+\theta)dh}{sen.\theta dy}$, será la que actua segun AE $= \frac{P sen.\varphi sen.(\varphi+\theta)dx}{sen.\theta dy}$: y por la misma razon, la que resulta segun CA de la tension del hilo DA, será $= \frac{P sen.\varphi sen.(\varphi+\theta)(dx - ddx)}{sen.\theta dy}$, suponiendo dy constante. A mas de esto, siendo h la longitud del hilo, que consideraremos conforme y de una misma densidad, podemos llamar kh el peso total de él: luego el peso total de una diferencial será kdh. Este con la fuerza segun CA debe equilibrar la fuerza segun Fig.82.

AE: $\frac{P sen.\varphi sen.(\varphi+\theta)dx}{sen.\theta dy} = \frac{P sen.\varphi sen.(\varphi+\theta)(dx - ddx)}{sen.\theta dy} + kdh$,

de que resulta $\frac{dydh}{ddx} = \frac{P sen.\varphi sen.(\varphi+\theta)}{k sen.\theta}$ cantidad constan-

tante. Que sea, pues, $\frac{P sen.\varphi sen.(\varphi+\theta)}{k sen.\theta} = A$, y será $\frac{dydh}{ddx} = A$, ó $dydh = Addx$: é integrando -- $(B+b)dy = Adx = A(dh^2 - dy^2)^{\frac{1}{2}}$: y quadrando $(B+b)^2 dy^2 = A^2(dh^2 - dy^2)$, que dá $\frac{dh}{dy} =$ ----- $\frac{((B+b)^2 + A^2)^{\frac{1}{2}}}{A}$. Introduciendo este valor en el de la tension del hilo hallada $\frac{P sen.\varphi sen.(\varphi+\theta)dh}{sen.\theta dy}$ quedará esta $= \frac{P se.\varphi se.(\varphi+\theta)\left((B+b)^2 + A^2\right)^{\frac{1}{2}}}{A sen.\theta} = k\left((B+b)^2 + A^2\right)^{\frac{1}{2}}$

19 Para hallar el valor de la constante B que nos completa el integral, tenemos que en el extremo superior del hilo G es $\frac{dh}{dy} = \frac{1}{sen.(\varphi+\theta)}$; pero de la equacion $\frac{P sen.\varphi sen.(\varphi+\theta)}{k sen.\theta} = A$, resulta $\frac{1}{sen.(\varphi+\theta)} =$ ---- $\frac{P sen.\varphi}{Ak sen.\theta}$: luego en dicho extremo será $\frac{P sen.\varphi}{Ak sen.\theta} =$ -- $\frac{((B+b)^2 + A^2)^{\frac{1}{2}}}{A}$, denotando b la total longitud del hilo: ó $\frac{P^2 sen.\varphi^2}{k^2 sen.\theta^2} = (B+b)^2 + A^2 = (B+b)^2 + \frac{P^2 se.\varphi^2 se.(\varphi+\theta)^2}{k^2 sen.\theta^2}$ de que resulta $(B+b)^2 = \frac{P^2 sen.\varphi^2}{k^2 sen.\theta^2}\left(1 - sen.(\varphi+\theta)^2\right) = \frac{P^2 sen.\varphi^2 cos.(\varphi+\theta)^2}{k^2 sen.\theta^2}$: luego $B = \frac{P sen.\varphi cos.\varphi+\theta)}{k sen.\theta} - b$.

20 Si se substituye este valor de B en la tension del hilo hallada (§.18.) tendremos esta en qualquiera punto de él, distante del origen la cantidad H

$$=\frac{1}{sen.\theta}\left(\left(P\,sen.\varphi\,cos.(\varphi+\theta)-k\,se.\theta(b-H)\right)^2+P^2 se.\varphi^2 se.(\varphi+\theta)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

21 En el punto del origen ó mas baxo V es H = o: luego la tension en el punto ó extremo V del hilo =

$$\frac{1}{sen.\theta}\left(\left(P\,sen.\varphi\,cos.(\varphi+\theta)-kb\,sen.\theta\right)^2+P^2 sen.\varphi^2 sen.(\varphi+\theta)^2\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$\left(\left(\frac{P(Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^3(b+e)^2}{(Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2}-kb\right)^2+\frac{R^2u^2P^4(b+e)^4}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

22 Que sea $u=$ o, y quedará la fuerza ó tension del hilo en el punto V $=\dfrac{-P(P^2g^2+P^2(b+e)^2)}{P^2g^2+P^2(b+e)^2}-kb=-(P+kb)$, peso del Cometa é hilo.

23 Que sea $Rue=Pg$, y quedará la tension $=\left((-P-kb)^2+\dfrac{P^2g^2}{e^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{P^2(g^2+e^2)}{e^2}+kb(2P+kb)\right)^{\frac{1}{2}}.$

24 Que sea $u=\infty$, y quedará la tension $=\dfrac{Pb}{e}-kb.$

25 De estos casos se deduce claramente que la tension del hilo varía, segun varía la velocidad del viento u: y asimismo, que no sucede la máxima quando es $u=\infty$; pues aunque aumenta el primer término, aumentando la u, disminuye el segundo. Se percibe ésto claramente reduciendo $\dfrac{P(Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^3(b+e)^2}{(Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2}$ á una serie: pues resulta la tension = - - - - - - -

$$\left(\left(\frac{P(Rub+Pg)}{Rue-Pg}-\frac{P^3(b+e)^3Ru}{(Rue-Pg)^3}+\frac{P^5(b+e)^5Ru}{(Rue-Pg)^5}\&-kb\right)^2+\frac{R^2u^2P^4(b+e)^4}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Esta expresion manifiesta, que luego que se haga Pg despreciable respecto de Rue, la tension queda sensiblemente constante, é $=\dfrac{Pb}{e}-kb$, por más que aumente la u.

26 La expresion $\frac{Pb}{e}$ manifiesta tambien, que quanto mayor fuere b respecto de e, tanto mas aumentará la tension; esto es, quanto mas larga y mas pesada fuere la cola del Cometa, tanto mas aumentará la tension ó fuerza del hilo.

Hallar la altura vertical que obtendrá el Cometa.

27 De la equacion $(B+H)dy = Adx$, tenemos tambien $(B+H)^2(dH-dx)^2 = A^2dx$, que da $dx = \frac{(B+H)dH}{((B+H)^2+A^2)^{\frac{1}{2}}}$: é integrando $x = ((B+H)^2+A^2)^{\frac{1}{2}}$: ó $x^2 = (B+H)^2+A^2$, equacion al centro de una hypérbole equilátera, cuyo semidiámetro es A, las abcisas x, y las ordenadas B+H. Si con el semidiámetro $A = \frac{P sen.\varphi sen.(\varphi+\theta)}{k sen.\theta} = CD$ se describe, pues, la hypérbole equilátera DEF, las ordenadas expresarán las longitudes del hilo, y las abcisas las alturas verticales del Cometa.

Fig. 83.

28 Supongase F el punto correspondiente al Cometa, y será para él $H = b$, y (§.19.) $(B+b)^2+A^2 = \frac{P^2 sen.\varphi^2}{k^2 sen.\theta^2} = x^2$: luego $x = FL = \frac{P sen.\varphi}{k sen.\theta}$.

29 EM es la abcisa en caso de ser EH=B, y H=o, poniendo, pues, en la equacion $x^2 = (B+H)^2+A^2$, $H = o$, y (§.19.) $B = \frac{P sen.\varphi cos.(\varphi+\theta)}{k sen.\theta} - b$, será $x^2 = (EM)^2 = \left(\frac{P sen.\varphi cos.(\varphi+\theta)}{k sen.\theta} - b\right)^2 + \frac{P^2 se.\varphi^2 se.(\varphi+\theta)^2}{k^2 sen.\theta^2}$, que dá

$$EM = \frac{((P sen.\varphi cos.(\varphi+\theta) - kb sen.\theta)^2 + P^2 sen.\varphi^2 sen.(\varphi+\theta)^2)^{\frac{1}{2}}}{k sen.\theta}.$$

Se-

30 Serí, pues, la altura vertical del Cometa EK (*Figur.*83.), ó HL (*Figur.*78.) $=$ ----------

$$\frac{P\,sen.\varphi}{k\,sen.\theta}-\frac{1}{k\,sen.\theta}\left((P\,sen.\varphi\,cos.(\varphi+\theta)-kh\,sen.\theta)^2+P^2\,sen.\varphi^2\,se.(\varphi+\ )^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

cuya cantidad es la diferencia de las tensiones de los dos extremos del hilo dividida por k.

31 Si esta diferencia fuere, pues, cero, tambien la altura vertical que tenga un extremo del hilo sobre el otro, será cero: esto es, si las dos tensiones de los extremos fueren iguales, estos se hallarán en una misma horizontal; cuyo principio de Mechânica es bien conocido.

32 La tension en el extremo del Cometa la hallamos (§.13) $=\dfrac{P\left((Rub+Pg)^2+P^3(b+e)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$, y la del extremo baxo V $=$

$$\left(\left(\frac{P(Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^3(b+e)^2}{(Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2}-kb\right)^2+\frac{R^2u^2P^4(b+e)^4}{((Rue-Pg)^2-P^2(b+e)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}:$$

luego la altura vertical que obtendrá el Cometa sobre el horizonte será $=\dfrac{P\left((Rub+Pg)^2+P^2(b+e)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{k\left((Rue-Pg)^2+P(b+e)^2\right)^{\frac{1}{2}}}-$

$$\left(\left(\frac{P((Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+e)^2)}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)}-b\right)^2+\frac{R^2u^2P^4(b+e)^4}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

33 Que sea $u=0$, y será la altura vertical del Cometa $=\dfrac{P}{k}-\dfrac{P}{k}-b=-b$, longitud del hilo negativa: lo que es bien sabido.

34 Que sea $u=\infty$, y será la altura vertical $=\dfrac{Pb}{ke}-\dfrac{Pb}{ke}+b=b$, longitud del hilo igualmente.

35 Para hallar el caso en que será la altura vertical cero, ó en que se mantendrá el Cometa en la horizontal del punto V, se igualará la expresion á cero. Tomando la del (§.30.) será ------------------

$$\frac{P sen.\varphi}{k sen.\theta} - \frac{1}{k sen.\theta}\left((P se.\varphi cos.(\varphi+\theta) - kb se.\theta)^2 + P^2 se.\varphi^2 se.(\varphi+\theta)^2\right)^{\frac{1}{2}} = o:$$

ó multiplicando por $k\, sen.\theta$, y quadrando $P^2 sen.\varphi^2 = P^2 sen.\varphi^2 - 2Pkb sen.\varphi sen.\theta cos.\varphi+\theta) + k^2 b^2 sen.\theta^2$, que se reduce á $\frac{2P sen.\varphi cos.(\varphi+\theta)}{k\, sen.\theta} - b = o$; pero (§.19.) es $B = \frac{P sen.\varphi cos.(\varphi+\theta)}{k\, sen.\theta} - b$, ó $B + b = \frac{P sen.\varphi cos.(\varphi+\theta)}{k\, sen.\theta}$: luego para que la altura vertical sea cero, habrá de ser $2B+b=o$, ó $B = -\frac{1}{2}b$: esto es, los dos extremos del hilo estarán igualmente distantes, y á partes opuestas del exe de la hypérbole; cuya noticia es bien conforme á los principios notorios.

36 Substituyendo los valores de los senos, y cosenos en $\frac{2P sen.\varphi cos.(\varphi+\theta)}{k\, sen.\theta} - b$, resulta ----------

$$\frac{2P((Rue-Pg)(Rub+Pg) - P^2(b+e)^2}{(Rue-Pg)^2 + P^2(b+e)^2} = kb,$$ cuya equacion se ha de verificar para que el Cometa quede en la horizontal del punto V. Fig. 78.

37 Si se supone la velocidad del viento constante, dexando variable la longitud del hilo b, será asimismo variable la altura vertical del Cometa. Como el segundo termino es negativo, quanto menor sea este, mayor será la altura vertical; pero no suponiendo sino la b variable, será menor quando sea $\frac{P((Rue-Pg)(Rub+Pg) - P^2(b+e)^2)}{k((Rue-Pg)^2 + (b+e)^2)} - b = o$; ó lo que es lo mismo, quando sea $B = o$: luego la mayor altura del Cometa sobre el horizonte se consigue quando es $b = \frac{P((Rue-Pg)(Rub+Pg) - P^2(b+e)^2)}{k((Rue-Pg)^2 + P^2(b+e)^2)}$: y será dicha máxîma altura = -------------

$$\frac{P((Rub+Pg)^2 + P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}{k(Rue-Pg)^2 + P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{RuP^2(b+e)^2}{k((Rue-Pg)^2 + P^2(b+e)^2)}.$$ Co-

38 Como el valor de h en este ultimo caso no es sino la mitad del que se halló en el precedente, se sigue, que la longitud del hilo que hará elevar el Cometa á la máxîma altura, no es sino la mitad de aquella que le obliga á mantenerse en la horizontal del punto V.

39 Como la altura vertical del Cometa depende de la diferencia en las tensiones de los dos extremos del hilo, se sigue, que su mayor altura se conseguirá quando la tension en el extremo inferior V sea la mínima. Para saber, pues, quando el Cometa logra su máxîma altura, basta atender á que el hilo haga la menor fuerza posible.

40 Como el seno del ángulo que forma el hilo con la vertical en qualquier punto se halló (§§. 17. y 18.) $= \frac{dh}{dy} = \frac{((B+H)^2+A^2)^{\frac{1}{2}}}{A}$: y para el extremo V es $H=0$, asi como $B=0$ para el caso en que el Cometa obtenga la máxîma altura, tendremos el seno del ángulo que formará el hilo en su extremo V con la vertical $= \frac{A}{A} = 1$: luego será este ángulo recto: y así para saber quando el Cometa logra su máxîma altura, basta atender á que en el extremo V se halle el hilo horizontal.

Hallar el valor de la horizontal VL.

41 De las dos equaciones $(B+H)dy = Adx$, y $x^2 = (B+H)^2 + A^2$ se deduce $dy = \frac{Adx}{(x^2 - A^2)^{\frac{1}{2}}}$ (*); pero

$\int$

(*) Esta es la equacion de la *Cadenaria*: la misma que halló *Juan Bernoulli* en el Diário de los Sabios año de 1692; y despues de él otros.

$\int \frac{A^2 dx}{2(x^2-A^2)^{\frac{1}{2}}}$ es un sector de la hyperbole : luego si el sector de la hyperbole se divide por $\frac{1}{2}A$, se tendrá el valor de y.

Fig. 83. 42 Para hallar el valor de un sector FDC, EDC, eDc &c., llamemos las abcisas de la asymtota $CQ = z$, y las ordenadas perpendiculares $FQ = v$. La equacion á esta asymtota será $vz = \frac{1}{2}A^2$, y la diferencial del area $QFDP = vdz = \frac{A^2 dz}{2z}$: cuyo integral es $\frac{1}{2}A^2 lz$; pero para que este integral denote solamente el area QFDP es preciso que siendo $z = CP = A\sqrt{\frac{1}{2}}$ venga el integral cero : luego el area $QFDP = \frac{1}{2}A^2 l\frac{z}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$. Esta area es igual al sector CFD : porque $QFDC = QFDP + PDC = QFC + FDC$, y $PDC = QFC$, con que $QFDP = FDC$: luego el sector $FDC = \frac{1}{2}A^2 l\frac{z}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$, que dá $y = A l\frac{z}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$.

43 El valor de z se deduce de que $\overline{(CF)^2 = v^2 + z^2} = 2x^2 - A^2$, que dá $z^2 = x^2 - \frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{(x^2-\frac{1}{2}A^2)^2 + \frac{1}{4}A^4}$: con que será $y = A l\frac{((B+H)^2 + \frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{((B+H)^2+\frac{1}{2}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4})^{\frac{1}{2}}}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$: esto es, en el extremo del hilo donde está el Cometa, y en que es $H = b, y = A l\frac{((B+b)^2 + \frac{1}{2}A^2 + \sqrt{((B+b)^2+\frac{1}{2}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4})^{\frac{1}{2}}}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$: y en el otro extremo, en que es $H = 0$, $y = $ ----- $A l\frac{(B^2 + \frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{(B^2+\frac{1}{2}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4})^{\frac{1}{2}}}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$. Quitando esta cantidad de aquella, quedará la horizontal $VL = \frac{1}{2}A l\frac{(B+b)^2 + \frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{((B+b)^2+\frac{1}{2}A^2)^2 - \frac{1}{2}A^4}}{B^2 + \frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{(B^2+\frac{1}{2}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4}}$, ó redu-

cien-

ciendo este logarithmo á los de las tablas comunes,

$$VL = \tfrac{1}{2}A(2,3025851)l\frac{(B+b)^2+\frac{1}{2}A^2+\sqrt{((B+b)^2+\frac{1}{2}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}}{B^2+\frac{1}{2}A^2\pm\sqrt{(B^2+\frac{1}{2}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}}:$$

en cuyo valor se substituirán $B = \frac{P((Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+e)^2)}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)} - b$; y $A = \frac{RuP^2(b+e)^2}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)}$, tomando el signo positivo, tanto en numerador, como en denominador, si fuere B positivo: positivo en el numerador, y negativo en el denominador, si fuere B negativo, y $b > B$: y negativo en numerador y denominador, si fuere B negativo, y $b < B$.

44 Que sea $u = 0$, y será $A = 0$, y por consiguiente $VL = 0$. Fig. 78.

45 Que sea $u = \infty$, y será $A = 0$, y por consiguiente, como antes, $VL = 0$.

46 En el caso que los dos extremos del hilo se hallen en la misma horizontal es (§. 35) $B = -\frac{1}{2}b$: luego en él será

$$VL = \tfrac{1}{2}A(2,3025851)l\frac{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{2}A^2+\sqrt{(\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{2}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}}{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{2}A^2-\sqrt{(\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{2}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}}$$

que se reduce, por ser $B = \frac{P\,fen.\varphi\,cof.(\varphi+\theta)}{k\,fen.\theta} - b = -\frac{1}{2}b$, que dá

$$A = \frac{P\,fe.\varphi\,fe.(\varphi+\theta)}{k\,fen.\theta} = \frac{b\,fen.(\varphi+\theta)}{2\,cof.(\varphi+\theta)},\ \text{á}\ VL = A(2,3025851)l\frac{1+cof.(\varphi+\theta)}{1-cof.(\varphi+\theta)}.$$

Reducir las fórmulas á un caso fácil para la práctica.

47 Podemos suponer para esto $e = b$, y $g = 2e$: pues esta determinacion de valores depende solo de la longitud de los hilos AG, GD, y de la eleccion del punto D., ambas cosas arbitrarias. Se trasladará la distancia PC de C á E, y se harán $AG = (4b^2+(CA-b)^2)^{\frac{1}{2}}$, con lo que se sendrán, puesto á eleccion el punto D, $e = b$, y $g = 2e$. Fig. 78.

Se-

48 Segun la theórica de las Velas, que se verá (*Tom.*2.§.261) es la fuerza del Cometa $= \frac{1}{20} mua^2 sen.\varphi$: ó tomando de esta los dos tercios, por lo expresado (*Esc. Prop.*36. *Lib.*2.), será $\frac{1}{30} mua^2 sen.\varphi$: luego $R = \frac{1}{30} ma^2$, denotando a^2 el area del Cometa, que podemos suponer de 9 pies, y m el peso de un pie cubico de agua del Mar, que en el (*Tom.*2.§.109) es de $64\frac{1}{8}$ libras: lo que da $R = \frac{64\frac{1}{8} \cdot 9}{30}$, ó con corta diferencia $= 19$.

49 Que sea, á mas de esto, el peso del Cometa con su cola, de media libra, y será $P = \frac{1}{2}$. Pongamos tambien, que 2000 pies de hilo pesen una libra, y será $2000k = 1$, ó $k = \frac{1}{2000}$.

Todos estos valores, substituidos en las fórmulas, las reducen á un caso fácil para la práctica.

50 Valores de los senos y cosenos de φ, θ, y $(\varphi + \theta)$.

$$sen.\varphi = \frac{1}{((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}. \qquad cos.\varphi = \frac{19u-1}{((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$sen.\theta = \frac{1}{((19u+1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}. \qquad cos.\theta = \frac{19u+1}{((19u+1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$sen.(\varphi+\theta) = \frac{19u}{(((19u-1)^2+1)((19u+1)^2+1))^{\frac{1}{2}}}.$$

$$cos.(\varphi+\theta) = \frac{(19u-1)(19u+1)-1}{(((19u-1)^2+1)((19u+1)^2+1))^{\frac{1}{2}}}.$$

51 Estos valores manifiestan claramente la poca velocidad que necesita tener el viento para que la tangente HF se eleve sobre el horizonte. Esta debe quedar horizontal quando $cos.(\varphi+\theta) = 0$: luego para que suceda esto ha de ser $(19u-1)(19u+1) = 1$, ó $u = \frac{1}{19}\sqrt{2}$; de suerte que no son ni aun 11 lineas por segundo las que ha de correr el viento para que la tangente HF quede horizontal.

Tam-

52 Tambien manifiestan los mismos valores, que á poca que sea la velocidad u del viento ya se pone casi horizontal el Cometa: para esto basta que $sen.\varphi = \frac{1}{((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}$ se haga despreciable. Supongamos, pues, $\frac{1}{((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{38}$ seno de menos de un grado, y será con corta diferencia $\frac{1}{19u} = \frac{1}{38}$, que dá $u = 2$: esto es, 2 pies de velocidad en el viento son ya suficientes para poner al Cometa horizontal, á menos de un grado de diferencia.

53 La fuerza que hace el extremo del hilo V la hallamos (§. 21) $= \left(\left(\frac{P(Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^3(b+e)^2-kb}{(Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2}\right)^2 + \frac{R^2u^2P^4(b+e)^4}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$: luego en este caso $= \left(\left(\frac{\frac{1}{2}(19u-1)(19u+1)-\frac{1}{2}}{(19u-1)^2+1} - \frac{b}{2000}\right)^2 + \frac{19^2u^2}{((19u-1)^2+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

54 Esta expresion, siendo u de algun valor considerable, se reduce á $\frac{1}{2} - \frac{b}{2000}$: donde se ve, que la fuerza del hilo se mantiene casi sensiblemente constante sin alterarse por mas que aumente el viento.

55 La altura del Cometa la hallamos $= \frac{P((Rub+Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}} - \left(\left(\frac{P(Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^3(b+e)^2}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)} - b\right)^2 + \frac{R^2u^2P^4(b+e)^4}{k^2((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$: luego en este caso será $= \frac{\frac{1}{2}((19u+1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2000}((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}} - \left(\left(\frac{\frac{1}{2}(19u-1)(19u+1)-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2000}((19u-1)^2+1)} - b\right)^2 + \frac{19^2u^2}{\frac{1}{(2000)^2}((19u-1)^2+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$: y la máxîma $= \frac{1000((19u+1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}{((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2000.19u}{(19u-1)^2+1}$:

que

que se reduce, siendo u de algun valor considerable, á $1000-\frac{2000}{19u}$: por lo que, quanto mayor sea la velocidad del viento, tanto mayor será la altura máxîma del Cometa.

56 La longitud del hilo, propia para conseguir esta máxîma altura vertical del Cometa, se halló $=\frac{P((Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+e)^2)}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)}$: luego será ahora $=\frac{\frac{1}{2}((19u-1)(19u+1)-1)}{\frac{1}{2000}((19u-1)^2+1)}$: que se reduce, siendo u de algun valor considerable, á $1000\left(1+\frac{2}{19u}\right)$. Si fuere $u=2$, quedará $=1052,6$.

57 Otra qualquiera longitud del hilo, menor ó mayor, da menor altura vertical al Cometa. 1000 pies de hilo, suponiendo $u=2$, no dan sino 925, 7 de altura al Cometa, quando la altura máxîma es de 947, 4: 1500 de aquel no dan sino 549, 6 de esta: y el doble de los 1052, 6, que dan la mayor elevacion ó altura: esto es, 2105, 2 pies de hilo dan el caso en que el Cometa se queda en la horizontal del punto V.

58 La distancia horizontal VL la hallamos $=$

$$\tfrac{1}{2}A(2,3025851)l\frac{(B+b)^2+\frac{1}{2}A^2\pm\sqrt{((B+b)^2+\frac{1}{2}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}}{B^2+\frac{1}{2}A^2\pm\sqrt{(B^2+\frac{1}{2}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}},$$

ó en el caso de la máxîma altura vertical del Cometa en que es $B=0$, será $=\frac{1}{2}A(2,3025851)l\frac{b^2+\frac{1}{2}A^2+\sqrt{(b^2+\frac{1}{2}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}}{\frac{1}{2}A^2}$;

pero b la hallamos $=1000\left(1+\frac{2}{19u}\right)$, y $A=\frac{RuP^2(b+e)^2}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)}$, que siendo u de algun valor considerable, se reduce á $\frac{2000\,.\,19u}{19^2u^2-2\,.\,19u}$, ó á $----$

1000.

$1000.\frac{2}{19u}\left(1+\frac{2}{19u}\right)=\frac{2h}{19u}$: luego colocando este valor de A, quedará la horizontal VL en el caso de la máxima

altura $=\frac{1000}{19^2u^2}(19u+2)(2.3025851)l\frac{1+\frac{2}{19^2u^2}+\left(\left(1+\frac{2}{19^2u^2}\right)^2-\frac{4}{19^4u^4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{2}{19^2u^2}}$

$=\frac{1000}{19^2u^2}(19u+2)(2,3025851)l\frac{19^2u^2+2+19u\sqrt{19^2u^2+4}}{2}$;

ó con corta diferencia $=\frac{2000}{29^2u^2}(19u+2)(2,3025851)l19u$.

Pongamos ahora $u=2$, y será VL = ---------

$\frac{1000}{19^2}(20)(2,3025851)l38=201,5$ pies.

59 Esto da el ángulo LVG $=78°$, y la distancia directa VG $=969,3$ pies: de suerte, que el hilo embebe en su arco 83, 3 pies.

Reducir las fórmulas al caso de Eulero, *en que es* $g=0$, *siendo tambien* $e=b$.

60 En este caso serán $sen.(\varphi+\theta)=\frac{4PRu}{R^2u^2+4P^2}$, y $cos.(\varphi+\theta)=\frac{R^2u^2-4P^2}{R^2u^2+4P^2}$.

61 Que sea $u=0$, y será $sen.(\varphi+\theta)=0$, y $cos.(\varphi+\eta)=-1$: acorde con lo dicho (§.4), y con todo buen principio de Mechánica.

62 La fuerza que hace el viento en el Cometa, se reduce á $\frac{2PRu}{(R^2u^2+4P^2)^{\frac{1}{2}}}$.

63 La fuerza que hace el extremo del hilo V, se reduce á $\left(\left(\frac{PR^2u^2-4P^3}{R^2u^2+4P^2}-kb\right)^2+\frac{16R^2u^2P^4}{(R^2u^2+4P^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

 Que

64 Que sea $u = o$, y quedará esta fuerza ó tension $= -P - kh$, peso de Cometa é hilo.

65 La altura vertical del Cometa se reduce á

$$\frac{P(R^2u^2+4P^2)^{\frac{1}{2}}}{k(R^2u^2+4P^2)^{\frac{1}{2}}} - \left(\left(\frac{P(R^2u^2+4P^2)}{k(R^2u^2+4P^2)} - h\right)^2 + \frac{16R^2u^2P^4}{k^2(R^2u^2+4P^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{P}{k} - \left(\left(\frac{P(R^2u^2-4P^2)}{k(R^2u^2+4P^2)} - h\right)^2 + \frac{16R^2u^2P^4}{k^2(R^2u^2+4P^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

66 Que sea $u = o$, y será la altura vertical $= \frac{P}{k} - \frac{P}{k} - h = -h$, longitud del hilo.

67 La máxîma altura, siendo h variable, se reduce á $\frac{P(Ru-2P)^2}{k(R^2u^2+4P^2)}$: y la longitud del hilo, que da esta máxîma altura, $h = \frac{P(R^2u^2-4P^2)}{k(R^2u^2+4P^2)}$.

68 Esta longitud de hilo será, pues, á la altura máxîma, como $Ru+2P$, á $Ru-2P$.

69 La longitud del hilo necesaria para que quede el Cometa en la horizontal del punto V, se reduce á $h = \frac{2P(R^2u^2-4P^2)}{k(R^2u^2+4P^2)}$.

Todas estas resultas convienen precisámente con lo que se observa en la práctica. Pasemos á exâminar si sucede lo mismo en el systhema de ser las fuerzas del viento en razon compuesta duplicada de sus velocidades, y senos de incidencia.

La misma theórica de los Cometas, suponiendo ser la resistencia de los fluidos en razon compuesta duplicada de sus velocidades y senos de ángulos de incidencia.

70 La fuerza del viento en el Cometa será ahora $ru^2 sen.\varphi^2$. Esta cantidad substituida en la equacion (§.1) en lugar de $Ru sen.\varphi$, que entonces expresó la mis-

misma fuerza, y haciendo $e = b$, y $g = 0$, dá $ru^2 sen.\varphi^2 = 2P cos.\varphi$.

71 Será, pues, $sen.\varphi^2 = \frac{2P}{ru^2} cos.\varphi$: y $1 - sen.\varphi^2 = cos.\varphi^2 = 1 - \frac{2P}{ru^2} cos.\varphi$: de que se deduce $cos.\varphi = -\frac{P}{ru^2} \pm \left(1 + \frac{P^2}{r^2u^4}\right)^{\frac{1}{2}}$: y $sen.\varphi = \left(-\frac{2P^2}{r^2u^4} \pm \frac{2P}{ru^2}\left(1 + \frac{P^2}{r^2u^4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

72 La equacion (§.2) se reduce á $ru^2 sen.\varphi^2 sen.\theta = P sen.(\varphi + \theta) = P(sen.\varphi cos.\theta + sen.\theta cos.\varphi)$: ó subtituyendo por lo antecedente $2P cos.\varphi = ru^2 sen.\varphi^2$, será $2P sen.\theta cos.\varphi = P(sen.\varphi cos.\theta + sen.\theta cos.\varphi)$: ó $sen.\theta cos.\varphi = sen.\varphi cos.\theta$: luego $\varphi = \theta$.

73 Tendremos, pues, $sen.(\varphi + \theta) = 2 sen.\varphi cos.\varphi$, y $cos.(\varphi + \theta) = cos.\varphi^2 - sen.\varphi^2 = 2cos.\varphi^2 - 1$: que da $sen.(\varphi + \theta) = \left(\frac{8P}{ru^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{P}{ru^2} \pm \left(1 + \frac{P^2}{r^2u^4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}$: y $cos.(\varphi + \theta) = 1 + \frac{4P^2}{r^2u^4} \mp \frac{4P}{ru^2}\left(1 + \frac{P^2}{r^2u^4}\right)^{\frac{1}{2}}$.

74 Para facilitar estas expresiones, ó ponerlas mas inteligibles, supongamos $r^2u^4 = n^2 - 1$, y será $sen.(\varphi + \theta) = \frac{2}{n+1}\sqrt{2(n-1)}$, y $cos.(\varphi + \theta) = 1 - \frac{4}{n+1}$.

75 Que sea $u = 0$, y será $n = 1$, $sen.(\varphi + \theta) = 0$, y $cos.(\varphi + \theta) = -1$.

76 Que sea $r^2u^4 = 8$, y será $n = 3$, $sen.(\varphi + \theta) = 1$, y $cos.(\varphi + \theta) = 0$.

77 Que sea $u = \infty$, y será $n = \infty$, $sen.(\varphi + \theta) = 0$, y $cos.(\varphi + \theta) = 1$.

78 La fuerza del viento en el Cometa es $ru^2 sen.\varphi^2 = 2P cos.\varphi = -\frac{2P^2}{ru^2} \pm 2P\left(1 + \frac{P^2}{ru^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2P\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

79 Que sea $u = 0$, y será $n = 1$, que dá $ru^2 sen.\varphi^2 = 0$.

Que

80 Que sea $r^2u^4 = 8$, y será $n = 3$, que da $ru^2 sen.\varphi^2 = P\sqrt{2}$.

81 Que sea $u = \infty$, y será $n = \infty$, que da $ru^2 sen.\varphi^2 = 2P$.

82 La theórica de la tension, ó fuerza del hilo, resulta la misma en este systhema que en el otro; solo es preciso poner en este los correspondientes valores de los senos y cosenos de φ, θ, y $(\varphi+\theta)$.

La expresion (§. 20.) es $= \frac{1}{sen.\theta}\left(\left(P sen.\varphi cos.(\varphi+\theta) - kh sen.\theta\right)^2 + P^2 sen.\varphi^2 sen.(\varphi+\theta)^2\right)^{\frac{1}{2}}$: y substituyendo en ella $\varphi = \theta$, queda en $\left(P^2 + k^2h^2 - 2Pkh cos.(\varphi+\theta)\right)^{\frac{1}{2}} = \left((P-kh)^2 + \frac{8Pkh}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

83 Que sea $u = 0$, y será $n = 1$, que da la tension del hilo $= P + kh$, peso de Cometa é hilo.

84 Que sea $r^2u^4 = 8$, y será $n = 3$, que da la tension $= (P^2 + k^2h^2)^{\frac{1}{2}}$.

85 Que sea $u = \infty$, y será $n = \infty$, que da la tension $= P - kh$, peso del Cometa, menos el peso del hilo.

86 La altura vertical del Cometa, como resulta de los mismos principios que la tension, es igualmente la propia que en el otro systhema: esto es, la diferencia de las dos tensiones de los extremos del hilo, dividida por k: será pues $= \frac{P}{k} - \frac{1}{k}\left((P-kh)^2 + \frac{8Pkh}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

87 Que sea $u = 0$, ó $n = 1$, y será la altura vertical $= \frac{P}{k} - \frac{P}{k} - h = -h$.

88 Que sea $r^2u^4 = 8$, ó $n = 3$, y será la altura $= \frac{P}{k} - \frac{1}{k}(P^2 + k^2h^2)^{\frac{1}{2}}$.

89 Que sea $u = \infty$, ó $n = \infty$, y será la altura $= \frac{P}{k} - \frac{P}{k} + h = h$.

Pa-

90 Para el caso que el Cometa se haya de mantener en la horizontal del punto V, tendremos - - $\frac{P}{k} = \frac{1}{k}\left((P-kb)^2 + \frac{8Pkb}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$, ó $2P - kb = \frac{8P}{n+1}$; que da $n = \frac{6P+kb}{2P-kb}$, y $r^2u^4 = \frac{16P(2P+kb)}{(2P-kb)^2}$.

91 Hasta aqui no nos ha manifestado este systhema nulidad alguna; pero se manifiesta luego que se especulan los valores de estas alturas verticales. Siendo $r^2u^4 = 8$ es la altura vertical $= \frac{P}{k} - \frac{1}{k}(P^2 + k^2b^2)^{\frac{1}{2}}$, cantidad constante negativa, tenga el valor que quisiere la b, ó la k, y aun la P: de suerte que este systhema manifiesta que el Cometa no puede ni aun llegar á la horizontal del punto V con sola la velocidad del viento $u = \left(\frac{8}{r^2}\right)^{\frac{1}{4}}$. En este systhema es $ru^2 = \frac{ma^2}{64}u^2$: luego será $r = \frac{ma^2}{64}$, ó poniendo la densidad del ayre $m = \frac{64}{29 \cdot 29}$ y $a^2 = 9$, será $r = \frac{9}{29^2}$, y $r^2 = \frac{81}{29^4}$. No podrá, pues, el Cometa elevarse, ni aun hasta la horizontal del punto V, siendo $u = \frac{29}{3}(8)^{\frac{1}{4}}$: esto es, siendo la velocidad del viento de $16\frac{1}{4}$ pies por segundo; lo que evidentemente es contra la práctica, pues esta velocidad no solo es capaz de elevar al Cometa hasta la horizontal del punto V, sino hasta casi ponerle vertical con este punto, mayormente si fuere kb cantidad corta. En efecto en el otro systema, siendo u tan grande, pueden despreciarse todas las cantidades en que no se halla la u: y se reducirá la altura vertical á $\frac{P}{k} - \frac{P}{k} + b = b$, longitud del hilo.

Pon-

92 Pongamos en $r.^2u^4 = \frac{16P(2P+kb)}{(2P-kb)^2}$, equacion que debe verificarse para que el Cometa quede en la horizontal del punto V, los valores de $P=\frac{1}{2}$, $k=2000$, y $b=1000$, y será $r^2u^4=48$, ó $u^4=\frac{29}{3}(48)^{\frac{1}{2}}$, que da u mayor que de 25 pies, velocidad excesiva que quizas rasgara en pedazos el Cometa; tan lexos está de que no pudiera elevarle sino hasta la horizontal del punto V. En el otro systhema, este caso elevara al Cometa hasta ponerle sensiblemente vertical con el punto V.

Basta esto para persuadirse de la falsedad del systhema que supone la resistencia de los fluidos en razon compuesta duplicada de sus velocidades, y de los senos de los ángulos de incidencia.

APEN-

APENDICE 2.

DEspues de casi concluida la impresion de esta Obra, me vinieron de Inglaterra el resto de las Transacciones Philosophicas de aquella Real Sociedad, que me faltaban, y se habian impreso nuevamente. En el Tom.51. part. 1. pag. 100, se hallan unas experiencias hechas por *Mr. J. Smeaton*, con el titulo, *An experimental enquiry concerning the natural powers of water and wind to turn mills, and other Machines depending on a circular motion.* El Autor da una pequeña Máchina de su invencion, en que, por repetidas experiencias hechas con ella, averigua la fuerza que exercita el agua que, saliendo de un deposito por un agujero, choca los alabes de una rueda vertical, dispuesta á modo de la de un Molino: en el exe de esta se envuelve una cuerda que suspende un peso, y sirve para deducir el efecto de la Máchina. El hecho de procurar el Autor estos exâmenes, demuestra claramente la desconfianza que tenia en punto á las determinaciones hasta ahora dadas sobre los efectos y fuerzas, ó resistencias del agua. Se hace cargo, antes de empezar, de las diferencias que resultan de hacer las experiencias con modelos, á hacerlas con Máchinas en grande, por motivo de la friccion que segun hemos visto debe ser diversa, á causa de las distintas dimensiones y pesos que se dan á las piezas que componen la Máchina. Para salvar este escrúpulo, da un méthodo bien ingenioso de averiguar las fricciones, y de corregir sus efectos en las experiencias, con lo qual, en quanto es dable, se puede confiar en ellas, á lo menos lo bastante para manifestar la ley con que actua el agua. No nos detendremos en especular ó determinar las fuerzas absolutas, nos contentaremos con hacer

ver como dichas experiencias, y sus resultas, convienen con la theórica que hemos explicado, y como se apartan enteramente de la que hasta ahora se ha enseñado. Para esto basta decir, que el efecto de la Máchina debe medirse por el producto del peso que levante, por la velocidad con que lo levante: porque si la velocidad es cero, el efecto lo es tambien; é igualmente lo será, si el peso fuere cero: con esto se ve claramente que si desde una corta cantidad de peso se fuese aumentando este, el efecto será mayor y mayor hasta un cierto termino, que ya debe disminuir, porque siendo el peso excesivo, la Máchina no lo podrá mover, y quedará el efecto cero. Aquel termino de aumento de efecto es por consiguiente el máximo, y es el que siempre se ha solicitado para lograr la mayor ventaja en las Máchinas. El modo de deducirle es hallar primero el valor del peso levantado en funciones de la potencia ó fuerza actuante: multiplicar este valor por la velocidad del mismo peso, y hallar el máximo de dicha expresion. En el caso de nuestro Autor sean

V la velocidad con que se mueve el agua chocante.
u la velocidad de los álabes de la rueda, y la del peso.
P el peso.
R el radio de la rueda.
r el radio del exe donde se envuelve la cuerda.
y F la cantidad de la friccion resultante del peso de toda la Máchina.

Con esto $V-u$ será la velocidad con que el agua choca los alabes: y en la theórica que hasta ahora se ha enseñado se puede expresar su fuerza por $A(V-u)^2$, siendo A una constante, y su momento por $RA(V-u)^2$. Este debe ser igual al momento del peso rP, con mas los de las fricciones: el que resulta del peso puede expresarse por nP, siendo n un número constante qualquiera: y el que resulta del peso total de la Mcáhina por fF, siendo f otro número constante qualquiera.

Ten-

Tendremos, pues, $RA(V-u)^2 = rP + nP + fF$, que da $P = \frac{RA(V-u^2)-fF}{r+u}$: y $Pu = \frac{RAu(V-u)^2 - fFu}{r+u}$.

Para hallar el máximo de esta cantidad debemos diferenciarla, é igualar la diferencial á cero. Será por tanto $RAdu(V^2-4Vu+3u^2)-fFdu=0$: que da $u = \frac{2}{3}V - \left(\frac{fF}{3RA}+\frac{1}{9}V^2\right)^{\frac{1}{2}}$: es la velocidad que deben tener los alabes de la rueda, y el peso para que la Máchina haga el mayor efécto posible : de suerte, que el peso se debe ir proporcionando, para conseguir la expresada velocidad. Si se supone $F=0$: esto es, la friccion nula, quedará $u = \frac{1}{3}V$: es lo que hasta ahora nos han enseñado generalmente todos los Autores. La velocidad V del agua debiera, segun esto, ser á la velocidad u de los alabes, excluida la friccion, como 3 con 1 : atendiendo á aquella, la razon debiera ser aun mayor ; de suerte, que la velocidad de los alabes, segun dicho systhema, debe ser aun menor que la tercera parte de la velocidad del agua. Echense ahora los ojos sobre las experiencias de nuestro Autor pag. 115. coluna 12, y se verá la falsedad del mismo systhema, porque no se halla ni una sola experiencia de las 27 que expone, que no dé la velocidad de los alabes mayor que la tercera parte de la velocidad del agua ; llegando el exceso hasta dar algunas la mitad.

Para resolver el caso segun nuestra theórica, no tenemos sino expresar la fuerza con que choca el agua los alabes por $A(V-u)$: lo que reduce la equacion primera á $RA(V-u)=rP+nP+fF$, y da $P = \frac{RA(V-u)-fF}{r+u}$, y $Pu = \frac{RAu(V-u)-fFu}{r+n}$: cuya diferencial igualada á cero, da $RA(V-2u)-fF=0$, ó $u=\frac{1}{2}V-\frac{fF}{2RA}$: donde se ve que la velocidad de los alabes debe ser algo menos que la mitad de la veloci-

ci-

cidad del agua que los choca, segun se halló por las experiencias, ó segun lo expresa con cortísima diferencia la coluna 12. de la pag. 115. de nuestro Autor. Pero no es aun esto lo que acredita mas nuestra theórica. La cantidad A es la constante, que multiplicada por la velocidad produce la resistencia ó fuerza del fluido, que (*Cor.3.Prop.36.Lib.2.*) es $\frac{1}{3}mca^{\frac{3}{2}}u\,sen.\theta$, ó siendo $sen.\theta = 1$, $= \frac{1}{3}mca^{\frac{3}{2}}u$, por lo que es $A = \frac{1}{3}mca^{\frac{3}{2}}$, en cuya expresion *ca* denota la seccion vertical del agua en el canal, ó del agujero por donde sale aquella: y asi se ve que quanto mayor fuere dicho agujero, menor será $\frac{fF}{2RA}$, y mayor la velocidad u que corresponde dar á los alabes, y al peso P. Ninguna cosa mas conforme con las experiencias del Autor de ellas. En la misma pag. 115 se ve que las practicó por seis distintos agujeros unos mayores que otros. Las primeras 10 hechas con el menor agujero, dan, tomando un medio entre ellas y supuesto $V = 10$, $u = 3,548$, y $\frac{fF}{2RA} = 1,452$. Las 7 segundas, hechas con mayor agujero $u = 3.89$. y $\frac{fF}{2RA} = 1,11$. Las 4 terceras, con otro mayor, $u = 4,3$, y $\frac{fF}{2RA} = 0,7$. Las 3 quartas, con otro mayor, $u = 4,53$, y $\frac{fF}{2RA} = 0,47$. Las 2 quintas, con otro mayor, $u = 4.775$, y $\frac{fF}{2RA} = 0,225$: y ultimamente la *6*, con otro mayor agujero, da $u = 5,2$: cuya cantidad excede en algo el mayor valor que puede tener la $u = 5$, cuya diferencia es bien corta á vista de las que dan entre sí las demas experiencias. No se verá menos acreditada la misma theórica quando se vea en el Tom. 2. aplicada á todas las acciones y movimientos del Navío.

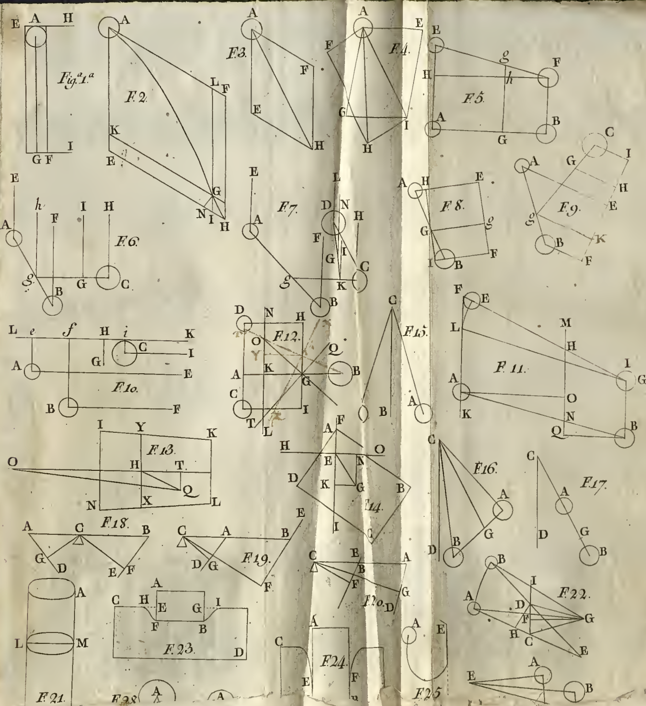
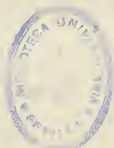
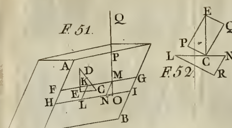
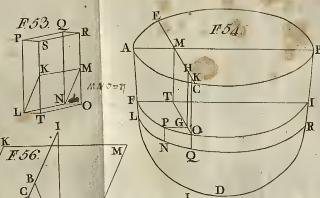
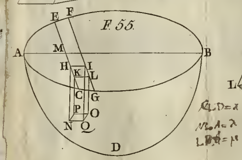


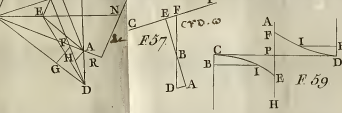
Fig.a 1.a
F.2.
F.3.
F.4.
F.5.
F.6.
F.7.
F.8.
F.9.
F.10.
F.11.
F.12.
F.13.
F.14.
F.15.
F.16.
F.17.
F.18.
F.19.
F.20.
F.21.
F.22.
F.23.
F.24.
F.25.

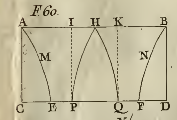


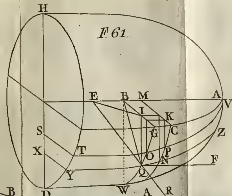

F. 51.
Q P A D K M G F E C H L N O I B
E Q P L C N F. 52. R

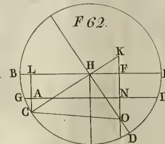

F. 53. Q P R S K M N L T O
F. 54.
E A M B H K C F T I L P G O R N Q D

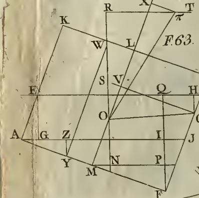

F. 55.
E F A M B H I K L C G P O N Q D

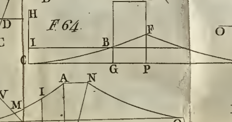

F. 56.
K I M B C E L N F A H G R D
F. 57.
C E F I B D A
F. 59.
A F I B C P B D I E H

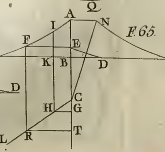

F. 60.
A I H K B M N C E P Q F D

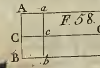

F. 61.
H E B M A V I K G C S T O P Z X N F Y Q D W A R

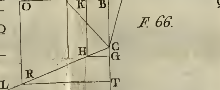

F. 62.
K B L H F E G A N I C O D Q

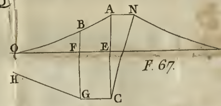

F. 63.
R X T π K W L S V B E Q H D O C A G Z I J Y N P M F

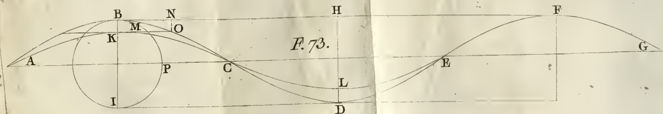

F. 64.
H F I B C D G P

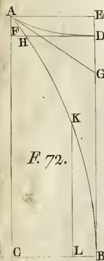

F. 65.
A I N F E O K B D Q C H G L R T

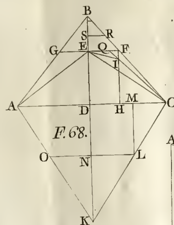

F. 58.
A a C c O B b

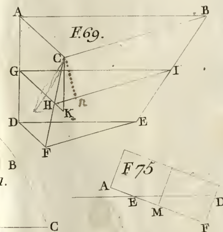

F. 66.
A N V I M O K B Q H C G L R T

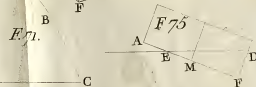

F. 67.
A N B O F E H G C

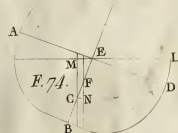

F. 73.
A B C D E F G H I K L M N O P

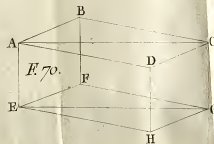

F. 72.
A B C D E F G H I K L

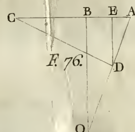

F. 68.
A B C D E F G H I K L M N O Q R S

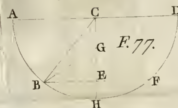

F. 69.
A B C D E F G H I K n

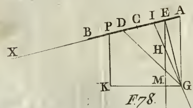

F. 71.
A B C
F 75
A D E F M

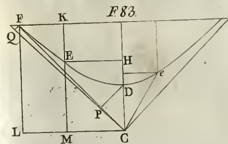

F. 74.
A B C D E F L M N

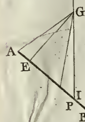

F. 70.
A B C D E F G H

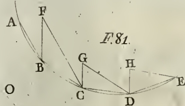

F. 76.
A B C D E O

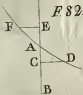

F. 77.
A B C D E F G H

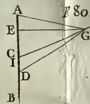

X
B
P
D
C
I
E
A
H
K
M
G
F.78.
L
F
O
V


F
K
F.83.
Q
E
H
e
D
P
L
M
C


F
F.79.
G
A
E
I
P
B


A
F
F.81.
B
G
H
E
C
D


F.82.
F
E
A
C
D
B


A
F.80.
E
G
C
I
D
B





EXAMEN MARITIM

T. I.







EXAMEN MARITIMO
Theórico Práctico,
ó
TRATADO DE MECHANICA
aplicado á la
CONSTRUCCION,
CONOCIMIENTO Y MANEJO DE LOS NAVIOS
y demas Embarcaciones.

Por D. JORGE JUAN,

Comendador de Aliaga en la Orden de San Juan, Xefe de Esquadra de la Real Armada, Capitan de la Compañía de Guardias Marinas, de la Real Sociedad de Londres, y de la Academia Real de Berlin.

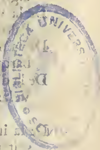
TOMO SEGUNDO.

EN MADRID:
En la Imprenta de D. Francisco Manuel de Mena, Calle de las Carretas.

M.DCC.LXXI.
Con permiso Superior.

Advertencia.

EN el Prologo del Tomo I se dió una breve historia de todo lo ocurrido hasta ahora en lo Theórico-marítimo, y asimismo de lo que se comprehende en los dos Tomos de esta Obra; sin embargo, para los Marineros que no estubieren versados en el cálculo se repetirá, que pueden reducirse á leer el último Libro de este Tomo, donde encontrarán en abreviado, y sin cálculo, las resultas que les corresponden, con las citas de los Capítulos á que tambien nos referimos.



TABLA

De los Capítulos y materias.

LIBRO 1.

de

CAPITULO 3.

CAPITULO 4.

CAPITULO 5.

CAPITULO 6.

crip-

CAPITULO 7.

LIBRO 2.

CAPITULO 1.

ma-

Apli-

Fór-

CAPITULO 5.

CAPITULO 6.

Que

CAPITULO 7.

CAPITULO 8.

CAPITULO 9.

LIBRO 3.

CAPITULO I.

que

Ve-

Que

LIBRO 4.

CAPITULO I.

Quan-

CAPITULO 2.

CAPITULO 3.

par-

CAPITULO 4.

CAPITULO 5.

La

pli-

LI-

LIBRO 5.

CAPITULO I.

CAPITULO 2.

CA-

CAPITULO 3.

son

Ha-

CAPITULO 4.

so

CAPITULO 5.

Que

ERRATAS.

Pag.	*linea.*	*dice.*	*diga.*
32	34	todo	toda
45	32	GL	GK
64	18	de	del
71	21	6475	3475
71	23	10.675	10675
73	9	16	26
85	24	de cuerpos	de dos cuerpos.
86	19	diferencia	distancia
114	29	LHG	IHG
120	13	§.281	§.181
127	13	disminuciones	dimensiones
133	16	b	*b*
154		Fig.33.	Fig.35.
183	19	las	los
223	17	$n =$	$u =$
240	21	menor	mayor
247	18	$= 80^\circ\ 20'$	$= 8^\circ\ 20'$
257	24	$\surd e^2 + m^2$	$\sqrt{e^2 + m^2}$
314	24	de la obra	de la ola
349	22	manera disminuirá	manera se disminuirá.



EXA-





EXAMEN MARITIMO THEORICO PRACTICO, ó TRATADO DE MECHANICA, aplicado á la CONSTRUCCION, CONOCIMIENTO, y manejo de los Navíos, y demas Embarcaciones.

LIBRO PRIMERO.

DE LA CONSTRUCCION DE LA NAVE.

CAPITULO PRIMERO.

De la Nave en general, y de sus propiedades.

1 LA Nave es un cuerpo flotante destinado á dos fines, el uno para transportar efectos y generos de unos á otros parages, y el otro para la Guerra; bien sea para ofender y apresar á las de los enemigos, ó bien para que como Castillos ataquen á los de las Costas. A qualquiera de los dos fines que se destine, es preciso que la Nave suporte un peso considerable, compuesto de la carga

que debe conducir, y del peso de los materiales con que estubiere construida: debe, por consiguiente, ocupar dentro del fluido (*Tom.*1. *Lib.*2. *Prop.*7.) un espacio tal, que el peso de ella sea igual al del mismo fluido que hubiere desocupado. Este espacio, ó parte de la Nave sumergido en el fluido, debe experimentar la resistencia de este en el caso del movimiento, y las potencias que se destinaren á moverla han de ser proporcionadas para darle la velocidad necesaria. Dos son las especies de potencias que hasta ahora se han empleado en mover las Naves: la accion de los Remos, y la del viento en las Velas: aquellos se reducen á unas piezas de madera con que, chocando con fuerza y rapidez el fluido en la parte exterior de la Nave, encuentran la resistencia proporcionada, y por causa de la reaccion se mueve la Nave: y estas á unos lienzos que, expuestos á la violencia de los vientos, los impelen; y por consiguiente á la Nave donde se sujetan. De estas dos especies, la primera no es de tanto uso como la segunda, porque siendo el trabajo de los hombres el que ha de mantener y producir la accion de los Remos, no puede ser sino por corto tiempo, no por dias y meses á que de ordinario se dilatan los transportes ó viages de Mar; por el contrario las Velas, una vez expuestas y colocadas en su debida situacion, á menos que no varie el viento, ó sea necesario hacer variar de direccion á la Nave, no es menester emplear trabajo alguno en ellas. De qualquier modo que sea, ya se ve por lo expuesto, que la Nave ha de tener varias propiedades ó calidades precisas para que pueda lograr el fin á que se dirige. Ha de ser en primer lugar firme y fuerte, para conservarse, y conservar sin lesion sus efectos y gente que se destina á manejarla. Ha de ser estanca; esto es, impenetrable al fluido, para que este no moge los efectos, ni pueda, siendo con abundancia, hacer que se sumerja mas y

mas,

mas, y que por consiguiente se hunda perdiendo el todo. Ha de ser de la figura y disposicion conveniente, para que tome la velocidad ó marcha mayor posible, á fin de finalizar quanto antes sus viages; ó si es para la Guerra, para poder quando le conviniere emprender ó evitar los lances que se le ofrecieren. Ha de tener buque ó capacidad para admitir todos los efectos que necesite conducir, y para alojar con comodidad la gente destinada á su manejo, ó la que se hubiere de transportar. Ha de ser estable: esto es, resistente á la inclinacion que pudiere ocasionarle por uno y otro lado, ya la fuerza del viento en la Velas, ó ya qualquiera otra accidental, pues habiendo de ser abierta en las partes que quedan fuera del fluido, para lograr la comunicacion, pudiera llegar el caso de que el fluido se internase, y de perderse los efectos, y aun quizas el todo de la Nave. Ha de tener igual y semejante figura por ambos lados de ella, pues las propiedades que se juzguen convenientes para un lado, no lo pueden ser menos para el otro. Ha de tener disposicion para poderse dirigir con prontitud y seguridad por el camino necesario, no solo para lograr el mas corto, sino para evitar los tropiezos que en él se pueden encontrar, pues un choque con violencia pudiera ser la destruccion total de la Nave. Por ultimo, si se destinare para la Guerra, ha de poder suportar su artilleria, y tener disposicion para colocarla de forma que sea manejable con desembarazo, y que por las troneras no pueda introducirse el fluido quando resultare alguna inclinacion en la Nave.

2 A mas de estas propiedades ó calidades primitivas, necesita la Nave otras para precaverse de un accidente, que de ordinario es su destruccion. Los vientos, chocando á las aguas, las impelen y agitan, formando lo que todos conocen muy bien por el nombre de olas, ó golpes de mar: y estas, agitadas mas y mas

por los vientos, se elevan hasta alturas espantosas, perdiendose con ello la horizontalidad de la superficie de las aguas, y formandose montañas de fluido que con violenta rapidez chocan, y aun destruyen quanto encuentran en su curso. Se siguen ó suceden unas olas á otras, y no solo impelen la Nave, y segun su curso la dan un movimiento, distinto quizas de aquel á que quisiera dirigirse, sino que la obligan á estar en un continuo movimiento de rotacion sobre un exe horizontal, que es mas ó menos violento, segun la magnitud de las olas, y la disposicion y figura de la Nave. En cada ola ha de hacer aquella dos oscilaciones, una de caida á la parte opuesta que choca la ola, y otra de reaccion al tiempo de separarse de ella: y siendo tan veloces las olas, por precision lo han de ser las oscilaciones ó movimientos, redundando de ellos momentos de inercia enormes en todas las partes de la Nave, y particularmente en todas aquellas que estan mas distantes de su centro de gravedad. Por este accidente se hace ya preciso que la Nave sea mas fuertemente ligada, ó unida entre las piezas que la componen: que esten sus troneras ó partes superiores de comunicacion mas altas, á fin de que en las oscilaciones que hiciere no llegue á entrar el fluido: que tenga disposicion para que quando entre este, pueda con facilidad evaquarse; y por ultimo que sea de figura tal, que quando no se eviten las oscilaciones enteramente, contribuya aquella á que sean menores y mas lentas. Como no todos los mares son de igual violencia y agitacion, no todas las Naves necesitan igual fuerza, figura y medidas: deben proporcionarse segun los parages que hubieren de surcar, y segun los destinos que se les dieren. Por esto se halla tanta variacion en ellas, no solo en lo que toca á su figura, magnitud y proporcion de buque, sino en el número de sus mástiles ó palos, á que se aplican las Velas, como tambien

al

al número, figura y disposicion de estas: haciendo el todo de sus atenciones y reparos un estudio tan dilatado, como importante á todo el Genero humano.

3 Hay embarcaciones que tienen de largo ó *Eslora*, entre tres y quatro veces su ancho ó *Manga*: las hay de quatro, de cinco, de seis, y hasta ocho veces su ancho. Haylas que tienen de profundo, ú dentro del fluido, la mitad de su ancho, otras el tercio, y otras menos; pero bien se puede inferir de lo dicho en el Tomo primero las distintas propiedades que deben resultar: á cada Reyno ó Provincia le ha enseñado la continuada práctica de muchos siglos lo que debe hacer, y enmendar, segun los alcances de sus luces, y de una theórica que aun ahora se halla bien limitada. Pero en lo que todos han convenido generalmente es, en no hacer las Embarcaciones con superficies planas, particularmente las que hubieren de navegar en agitados mares: en efecto los golpes de estos en ningunas superficies actuan con mayor fuerza, y por consiguiente en ningunas hacen mayor estrago.

4 Con esto se han venido á reducir á hacer el cuerpo de las Embarcaciones que va sumergido en el fluido en figura de una elipsoide, ú de dos distintas semielipsoides, haciendo la impelente algo mas corta que la impelida, aunque á una y otra se les aplica alguna diferencia por muy fundadas razones. Pudieran haberse hecho, por igual motivo, circulares ó esphéricas; pero se presentaba para ello un poderoso inconveniente, y es, que en tal caso no podrian dirigirse sino segun la perpendicular á la Vela: esto es, siendo ABDE la seccion horizontal de la Nave, FG la Vela, Lam. 1.
y HC la direccion del viento que la hiere, la Nave Fig. 1.
no pudiera correr sino por la CB, perpendicular á FG, pues descompuesta la fuerza del viento en dos, una paralela, y otra perpendicular á la Vela, la primera

mera se desvanece ó es cero, por ser su seno de incidencia cero (*Cor.*2. *Prop.*10. *Lib.*1. *Tom.*1.), y no actua sino segun la segunda: de suerte, que el ángulo HCB que formaran las dos direcciones del viento y del curso ó camino de la Nave habia de ser por precision obtuso, y por consiguiente se perdiera la ventaja que hoy se logra con hacer las Naves algo longas: pues en tal caso, aunque la potencia ó fuerza de la Fig. 2. Vela FG siempre se dirige por la perpendicular CB, siendo la resistencia lateral ú del costado ADE mayor que la que se exerce por la punta ó Proa A, no puede dexar de ser mayor la velocidad que tome la Nave por la Proa, que la que tome lateralmente ó sobre una perpendicular á AE; y por consiguiente, ya no puede correr por la CB, sino por otra direccion, como CI, média entre CB y CA, siendo tanto mas próxima á CA, quanto mayor fuere la resistencia lateral respecto á la de la Proa. Con esto bien se ve, que el ángulo HCI, que forman las dos direcciones del viento y camino que sigue la Nave, puede ser agudo, y por consiguiente tendrá la ventaja esta especie sobre la otra de poderse dirigir en parte contra el viento; lo que la otra no.

5 A más de esto, esta especie de Naves no pierden tampoco ventaja alguna en quanto á la resistencia contra las olas, porque quando estas son excesivas, saben los Marineros presentarlas una ú otra punta, y en tal caso llevan ventaja á la circular, porque en igual volumen menos objeto presentan las longas, que las esphericas. Añadese á esto, que las olas corren segun la direccion HC del mismo viento, y que segun esta misma impelen la Nave, y la hacen por consiguiente tomar una direccion media entre CI y CK: con que si no se hubiera tomado el medio de prolongar las Naves, apenas pudieran estas tomar otra direccion que la del viento, ó en una palabra, fueran al arbitrio de estos, y no al de los que las dirigieran. Es-

6 Esta misma razon ha obligado á los Marineros á llenar ú ocupar los dos extremos ó puntas circulares de la elipsoide A y B: pues siendo AB la superficie del fluido, y ACB una seccion vertical de la elipsoide, tiradas las tres tangentes DE, AD y BE, haciendo que el cuerpo ó sólido se estienda hasta ADCEB, y no quede terminado en la ACB, mayor será la resistencia lateral; y por consiguiente mayor ventaja se conseguirá en las direcciones que haya de tomar la Nave. Fig. 3.

7 Estas razones poderosas han obligado á prolongar las Naves; pero si no olvidamos que quanto mas próximas á la rotundez, son mas firmes y capaces de resistir á los golpes y esfuerzos de las olas, concluiremos, que ha sido preciso tomar un medio. Se han alargado quanto lo ha permitido su seguridad, y por tanto en los Mares menos expuestos á la agitacion, se han estilado siempre las Naves mas largas: no se ha concluido aun la verdadera proporcion entre el largo y ancho, porque, como se ve, pende de los parages que deben surcar; no obstante, la práctica ha acreditado, que siendo la Manga, ó ancho, con corta diferencia, la quarta parte de la Eslora, ó largo, se pueden exponer las Naves sin riesgo á las mas fuertes agitaciones del Mar.

8 La profundidad que se les dá tambien se halla varia: la que es profunda está mas expuesta á tropezar ó encallarse en el fondo del Mar, y por consiguiente á romperse y perderse: y la que no lo es bastante, no puede exercer tanta resistencia lateral, y de ello no puede tener tanta ventaja en las direcciones que quisiere tomar respectivamente á la del viento; no obstante, si la proporcion entre las resistencias laterales, y las de la Proa fueren iguales en una y otra Nave, parece que iguales ventajas debia lograr la una que la otra: asi es, no haciendo atencion á las olas; pero co-

como estas, por lo ordinario, y á excepcion de tal qual vez, son superficiales, su impulso hace mas efecto sobre la que tiene menos resistencia, que es la menos profunda, que sobre la otra. Se ha hecho, por consiguiente, preciso tomar un medio, mayormente ofreciendose el embarazo de que la mas profunda exerce mas resistencia por la Proa, ó por la direccion de su marcha, y por consiguiente se le hace precisa mayor potencia ó mayor Vela para poderse mover con igual velocidad, lo que no dexa de ser inconveniente, porque las Velas mayores se hacen mas dificiles de manejo. De estas consideraciones ha resultado, que los que navegan mares poco profundos han estilado sus Naves menos profundas; pero á poca diferencia son las profundidades que se practican entre tercio y mitad del ancho. No obstante, esta medida debe resultar del peso que ha de suportar la Nave; ó al contrario, el peso de la medida: de suerte, que tienen relacion uno con otro, una vez determinados largo y ancho, como se verá mas adelante.

9 Despues de esto, lo que mas urgia era el inquirir como se habia de obligar á la Nave á mantenerse constantemente debaxo de la misma direccion, ó á dirigirse por un camino recto. Si la direccion de la potencia ó fuerza de las Velas se procurara que siempre coincidiese con la de las resistencias del costado, la Nave no pudiera girar segun los principios dados (*Cap.*4. *Lib.*1. *Tom.*1.); pero las olas la chocan indistintamente y con desigualdad, ya adelante, ya detras del centro de gravedad: y por consiguiente son otras tantas potencias que obligan á girar la Nave sin medida ni seguridad, ya hacia la derecha, y ya hacia la izquierda. A mas de esto, el centro de las potencias, que lo es el de la Vela, inclinandose la Nave, ya porque la obliga la fuerza del viento, ó ya porque la agitacion de las olas lo causa, varia de lugar respectiva-

vamente al centro de gravedad, por mas que en el caso de sosiego se procure hacerles concurrir: y por consiguiente la Nave debe, por esta nueva causa, girar tambien, y estár en continuo movimiento de la derecha á la izquierda. Hacíase, pues, preciso buscar méthodo de evitar estos movimientos, y sujetar la Nave á que siguiese una sola direccion. La experiencia, sin duda, lo manifestó á primera instancia: no habia sino tener pronta á emplearse una nueva potencia que pudiera equilibrar las que obligan á salir la Nave de su direccion: en efecto, si por qualquiera de los lados de ella se pone una tabla sumergida en el fluido, por dicho lado habrá esta resistencia mas, y por consiguiente será la nueva potencia que se necesita para equilibrar á las otras; pero los Marineros adelantaron mas, pues poner, ya á un lado ó ya á otro, las mismas tablas, y haberlas de sujetar, seria un continuo insuportable trabajo, que evitaron, poniendo la tabla fixa y sobre goznes en el extremo de la Popa de la Nave, y dando medio para hacerla girar sobre ellos, se hace pasar al lado necesário de derecha ó izquierda con la prontitud que se requiere; es lo que llaman *Timon*: este sujeta, pues, á la Nave, y la dirige por un camino recto, es el que la govierna, aunque no con tanta exâctitud que absolutamente no salga de la línea recta, porque el Timon no puede actuar sino por haberse ya apercibido el efecto de otra potencia, y antes que se acuda al remedio es preciso que aquel haya obrado en parte: por este motivo, el govierno ó camino de la Nave no puede dexar de ser algo tortuoso, y su perfeccion consiste en que lo sea lo menos que posible fuere.

10 Sirve tambien para el propio fin la pluralidad de Velas que los Marineros disponen en sus Naves, aplicadas á distintos Mástiles colocados á varias distancias del centro de gravedad, pues con ello usan las

necesarias para guardar equilibrio entre ellas, entre las resistencias, los golpes de las olas, y las inclinaciones que la Nave pudiere tomar.

11 Esta pluralidad de Velas y Mástiles se hizo tambien precisa en las Embarcaciones grandes, para que, aumentando la potencia, no aumentase la magnitud de la Vela y el Mástil; pues siendo excesivos se hace impracticable el manejo de aquellas, y estos, ó se rompen, ó destruyen las Naves con los terribles momentos de inercia con que actuan, procedentes de los movimientos que resultan de la agitacion de las olas.

12. En lo interior de la Nave, y particularmente en las grandes, se vieron precisados á usar de diafragmas, que es lo que llaman *Cubiertas*: pues habiendose de reducir la fábrica á una armazon ó costillage compuesto de piezas, ya porque las maderas no alcanzan, y ya porque no tienen toda la curvidad necesaria, no podia tener firmeza el todo, ni hubiera sufrido el peso ó empuge hacia adentro del agua y de las olas, á menos de poner en práctica dichos diafragmas, para que, como estribos, sostengan mutuamente ambos lados ó costados. Poniéndolas al mismo tiempo horizontales, les han servido de varios pisos ó techos, y de colocar en ellos con buena distribucion los varios efectos, la Artillería y alojamientos de la gente. Aun en las Embarcaciones pequeñas, donde los diafragmas tales fueran impracticables por el corto ámbito que entre ellos quedara, se hace preciso poner á lo menos las bigas que hubieran de formarlos, que llaman *Baos*: pues sin estos no seria dable sufriese la Embarcacion el menor esfuerzo. Del peso que se pone sobre las cubiertas, y de la fuerza de inercia que en los movimientos resulta, se sigue, que la misma actua sobre los Baos, y de estos sobre los costados de la Nave: de suerte, que con gran facilidad los apartara

tara

tara de su lugar, ocasionando en ellos un continuado y perjudicial movimiento: por tanto, estos Baos deben sujetarse á los costados firmemente, de modo que se evite el mas mínimo movimiento ó juego que pudieran tener.

13 La distinta figura y disposicion que se les ha dado á las Velas ha sido vária; y aunque este asunto parezca indiferente para el efecto, llevan sus ventajas las unas á las otras, y se hacen preferentes, segun las ocasiones. Las hay quadrilongas, triangulares y trapecias, que distinguen los Marineros con los nombres de *Redonda*, *Latina y Cangreja.* Hay otras que varían en algo de estas; pero no son mas que especie de las primeras. Sobre un Mástil, Palo, ó Arbol vertical AB, y en el extremo superior de él A, se afirma otro Fig. 4. palito horizontal CD, que llaman *Verga*, del qual pende la Vela quadrilonga DCEF: se sujetan los dos extremos baxos E y F á la Nave, y es lo que llaman Vela redonda. Del mismo modo, al palo AB se afir- Fig. 5. ma obliquamente la Verga CD, de la qual pende la Vela triangular DCF: se sujeta á la Nave el extremo F, y queda la Vela que llaman Látina. Igualmente al palo AB, y contra la Nave, se afirman dos Vergas AD, Fig. 6. EF, y entre ellas y el palo se aplica una Vela trapecia DAEF, y es la que llaman Cangreja. Cada una tiene su particular ventaja y defecto: las primeras son mas á proposito para la resistencia; pero no pueden disponerse con tan buen ángulo, respective al viento, como las otras: á que contribuye mucho, no solo la figura de la misma Vela, sino la colocacion de las cuerdas ó xarcias con que se sujetan y afirman los palos. El exercicio de disponerlas, recogerlas, manejarlas, igualmente que el de hacer girar y governar la Nave, es lo que llaman *Maniobra*, que como se ofrece tan de continuo, se hace la principal ocupacion del Marinero. Para llegar al perfecto conocimiento de sus ven-

tajas, como las que pueden resultar de la figura y disposicion del Buque, se necesita la theórica que dimos en el Tomo primero, que se aplica en los Capitulos siguientes.

CAPITULO 2.

De la infinita variedad de Buques que pueden resultar, y de la fábrica del cuerpo de la Nave, segun el uso mas antiguo práctico.

14 DEterminadas en la Nave su longitud y amplitud, ó *Eslora* y *Manga*, parece que quedaba determinada toda su figura, si en efecto fuese una elipsoide, como diximos; pero la práctica ha manifestado, que es menester apartarse en algo de esta disposicion, ampliandola mas hacia la parte de adelante ú de Proa, y estrechandola hacia la de atrás ú de Popa: la theórica no manifiesta menos esta necesidad, como se verá á su tiempo; pero sease la figura, con proxîmidad, la que se quiera, nada hace para que el modo de construirla se aparte de ser el mismo con cortisima diferencia. Estilan los Constructores para
Lam. 2. la fábrica de la Nave establecer un palo quadrado AB,
Fig. 7. que llaman *Quilla*, y hace el mismo uso que el hueso principal del espinazo, pues sobre ella se elevan como costillas C, D, F, H y I, que llaman *Quadernas*, y á los extremos B y A dos piezas BK, AL, aquella curva, que llaman *Roda*, y á esta *Codaste*; llenando despues todos los intermedios de las Quadernas con otras, hasta tanto que casi estén unidas, queda formado el cuerpo, que despues se entabla.

15 Para la regular descripcion de las Quadernas consideran los Constructores varias lineas: la principal

pal LCDFHI, que pasa por todos los puntos del mayor ancho de las Quadernas, llaman *línea del fuerte*: esta divide el cuerpo de la Nave en dos partes: el superior se llama *obra muerta*, y el inferior *obra viva*, ó fondos de la Nave: esta obra viva ó fondos, contiene igualmente otras dos partes, que divide la línea LGEMNO: la superior LCGDEFMHNIO, que llamaremos segun nuestras reglas, *cuerpo principal de la Nave*, y la inferior que se le agrega hasta la Quilla, que llaman *Reveses*, nombre genérico que dan los Constructores y Marineros á toda porcion ó palo cóncavo. No tiene en nuestro Idioma nombre asignado la línea LGEMNO que termina el cuerpo principal, porque no han estilado nuestros Constructores, ni tampoco los Franceses, esta distintiva descripcion del cuerpo principal: los Ingleses, que con otras Naciones la usan en parte, la llaman *Raising line*: esto es, *línea del arrufo*, por significar arrufo ó *raising* lo que se va elevando desde el medio de la Nave, tanto yendo hacia Popa, como hacia Proa, una línea ó plano; pero siendo esta voz general para toda línea, se debe distinguir la que termina el cuerpo principal, no escusando la especificacion, y asi la llamaremos *línea del arrufo del cuerpo principal*. La QRSTV, que pasa por los extremos de las Quadernas, se llama *línea de la borda*, por llamarse borda el borde ó canto superior de la Nave; pero siendo general el uso de elevar las Quadernas, desde Q hasta R, y desde T hasta V, aun algo mas del término que señala esta línea, para conseguir mayor aloxamiento y comodidad, se pudiera llamar mas propiamente *línea del galon*, por llamarse galon una tabla que forma un filete y media caña que se clava y corre precisamente por todos los puntos que describen esta línea. Todas estas líneas, con otras muchas que consideran los Constructores, se hace preciso que sean curvas ó rectas, y bien seguidas: esto

es,

es, toda seccion horizontal, vertical ú obliqua, que se haga ó pueda hacer de la Nave, es preciso que sea una línea bien seguida y sin tropezon ó repentina oquedad, á fin que las tablas que despues se clavan, puedan aplicarse bien; y formen una superficie tersa y perfecta, cuya condicion se hace necesaria, no solo para que el entablado esté bien seguido y seguro, sino para mejorar la marcha, evitando todo tropiezo, ú oquedad, de que resultara nueva resistencia, que la Nave tendria que vencer: asi como para evitar todo movimiento repentino, que causara grandes fuerzas de inercia.

16 Como la variedad de líneas que pueden describirse es infinita, infinitas pueden ser las distintas líneas LGEMNO, LCDFHI que terminan el cuerpo principal, asi como las LCDFHI, QRSTV, que terminan la obra muerta, y por consiguiente infinitos serán los cuerpos de las Naves, ó estas mismas, é infinitas sus circunstancias y propiedades, puesto que de su cuerpo depende la mayor ó menor resistencia que puede padecer en el movimiento, asi como su estabilidad, oscilaciones, govierno, flotacion, y demas circunstancias.

17 Sin embargo del infinito número de Naves distintas que resultan de la variacion de las líneas descritas, aun no hemos dado á esta diversidad toda la extension posible: estas mismas líneas pueden colocarse mas ó menos elevadas, ó distantes de la Quilla; y aun con todo, no determinan sino las anchuras y profundidades del cuerpo; todas las secciones que entre ellas se pueden hacer, quedan indeterminadas, y pueden tener infinita variedad, que la darán igualmente al cuerpo, y á sus propiedades. Esta infinita variedad ha sido causa de que ni la práctica, ni la theórica de la construccion hayan hecho los progresos necesarios: el número infinito de tentativas de aquella,

no

no ha sido suficiente para distinguir la confusion de las distintas variedades; y una theórica de principios erroneos, no podia tan facilmente exâminar los que efectivamente lo eran. No obstante, los Constructóres, que antes no se governaban en sus fábricas sino por una práctica ciega, elevandolas sobre muy pocos datos, y aun muchos menos que los que hasta ahóra hemos prescrito, se redugeron de algun tiempo á esta parte á formar Planos: con estos han llegado á perfeccionarse mucho, pues no solo enmiendan algunos defectos sobre el mismo papel, sino que conservando con ellos el todo de las dimensiones, y figura total del cuerpo, al paso que la práctica les va manifestando los yerros, procuran corregirlos, segun les dicta una regular prudencia: si esta no alcanza la causa, con segunda ó tercera tentativa se procura conseguir algun beneficio. Con estas tentativas se han governado hasta ahora, y aun se goviernan; y aunque distantes de lo perfecto, á que creyeron haber llegado algunos Theóricos, se admirará lo que se han aproxîmado: tanto puede una repeticion continuada de experiencias.

18 No conocieron, como hemos dicho, los antiguos Constructores la delineacion de los Planos, y aun hoy hay muchos que tampoco la conocen, particularmente los que fabrican Barcos, y otras Embarcaciones pequeñas. Para elevar su buque, despues de sentada en el debido lugar la Quilla AB, y en sus extremos elevado, baxo de un mismo vertical, el Codaste AL, y la Roda BK, dandoles á su arbitrio las inclinaciones LAS, KBT que llaman *Lanzamentos*, forman, tambien á arbitrio, ó segun la escuela que sus Padres les dictaron, una forma ó plantilla CDE, que llaman *Gálibo*, de casi toda la figura que debe tener la mayor ó mas capaz costilla, que llaman la *Quaderna maestra*: y en efecto por aquel se corta ó for-

Fig. 8. Lam. 3.
Fig. 9.

forma esta con sus gruesos correspondientes, y se
Fig. 8. eleva en o, distante, con corta diferencia, de A los dos tercios de la Quilla, procurando que quede exâctamente perpendicular á esta.

Fig. 9. 19 La figura del Gálibo CDE se compone de varios arcos circulares, como por exemplo de tres CF, FG y GH, cuyos centros son N, P y O, y de una linea recta HE, paralela á CQ, perpendicular á OH, y tangente al círculo inferior en el punto H: puede constar de solos dos, ú de un solo arco, ó curva qualquiera: todas las condiciones que se le piden son, que el arco CF caiga perpendicularmente sobre la QC, que es el mayor ancho de la Quaderna ó Gálibo, y el GH sobre la OH perpendicular á CQ, ó paralela á QI, línea ó plano vertical que ha de dividir la Nave en dos partes iguales; y aun esta condicion no se hace tan precisa, pues bien pudiera rematar la curva, como quiera, en I, punto en la Quilla donde debe sentarse la Quaderna. De este mismo punto I se tira al Gálibo la tangente IH, y queda enteramente formada la figura CFDHI de la Quaderna, y por ella se
Fig. 8. corta y eleva en o, como queda expresado.

20 Con igual orden se forma otra pequeña Qua-
Fig. 10. derna como ABCD, que llaman *Aleta*, cuyo mayor ancho AE es, con corta diferencia, los dos tercios de la Manga, ú del ancho de la Quaderna maestra. Su pie D se afirma y clava en el Codaste ó punto D, dan-
Fig. 8. dole una inclinacion DC, que corresponde á la que tenga el Codaste, para que el punto C se afirme á una pieza de madera que cruza al Codaste, y llaman *Yugo.*

21 Con estas dos Quadernas tienen ya suficiente los mas antiguos, ó menos especulativos Constructores para construir todas las demas. Colocan quatro reglas gruesas ó piezas de madera EF, que llaman *Maestras*, y otros *Vágaras*, que corran desde las Aletas ó Popa del Navio, abrazando la Quaderna maestra has-

hasta la Roda, y les dán la curvidad que su práctica les dicta, y algunas medidas que sus Maestros les previnieron; particularmente á la mas alta, que corre por todos los mayores anchos que han de tener las Quadernas, le dan cierta amplitud ó abertura en los puntos G y H, llamados *Quadra* y *Mura*, que estan colocados en las quartas partes de la longitud de la Nave, proporcionandola al cuerpo que se quiere dar á ésta. En efecto, colocadas las quatro maestras, queda ya casi enteramente terminado el cuerpo total.

22 Señalan despues sobre la Quilla los puntos donde deben elevarse las demas Quadernas, como 3, 6, 9, 12 &c. y III, VI, IX, XII &c. que de ordinario estan igualmente distantes, y guiados por las Maestras toman con plantillas la figura que en aquel punto ó plano perpendicular á la Quilla encierran, y con ellas van formando las Quadernas, que elevan en sus correspondientes puntos, quedando formado el cuerpo total de la Nave, que despues se entabla. (*a*)

23 Otros Constructores adelantan mas, porque el Gálibo prescrito CFDE les sirve para cortar todas las Quadernas comprehendidas entre la Quadra y la Mura. Para ello determinan primero el arrufo que quieren dar al cuerpo principal comprehendido entre dichos dos términos con una línea como IMN, y sobre unas tablitas A y B, señalan las elevaciones que dicha línea tiene sobre la Quilla en los puntos de cada una de las Quadernas. Determinan asimismo la curvidad que ha de tener el costado de la Nave ó línea del fuerte entre los mismos términos en la línea NOP, y sobre otras tablitas AB señalan las diferencias entre los

Fig. 9.

Fig. 8. y 11.

Fig. 13. 12.

(*a*) De esta especie de construccion parece que usó el Theniente General D. Antonio de Gastañeta; pues en su Quaderno intitulado, *Proporciones de las medidas mas esenciales......* para la fabrica de Navíos y Fragatas de Guerra, &c., no se ve sino la descripcion de la Quaderna maestra y Aletas; y de ningun modo el de las demas Quadernas.

los anchos que deben tomar las Quadernas, y el máximo que tiene la Quaderna maestra, ó las diferencias
Fig. 8. entre los anchos que tubiere la maestra mas alta EF.
Fig. 9. Esto sentado, colocando sobre QC, QA=o, 18 de la tablilla A, será la AB, paralela á QE, la que represente el plano que divide la Quaderna en dos partes iguales, y CFGDHL la parte del cuerpo principal que debe formar la misma Quaderna. Para concluir esta, que ha de fenecer en B, siendo LB=al arrufo de la Quaderna 18 de la tablilla A, se hace otra plantilla MR, con la parte Mo recta, y la oR curva, y en ella, empezando desde o, se marcan, segun las ordenadas de una curva qualquiera, las divisiones 3, 6, 9, 12 &c., aplicando despues esta plantilla de suerte que su punto 18, que corresponde á la Quaderna 18, concurra en B, y sea tangente al Gálibo en D; se describe la línea DSB, que con la parte CFD constituye toda la Quaderna 18; esto es, CFGDSB. Del mismo modo se describen las demas Quadernas 3, 6, 9, 12 &c., y III, VI, IX, XII &c., con la diferencia de que la QA, LB, y punto de la plantilla MR sean los que corresponden á cada Quaderna.

24 Formadas ya todas las Quadernas desde la Quadra á la Amura, se colocan las quatro maestras
Fig. 8. EF como antes, y se concluyen por ellas todas las demas que faltan desde la Quadra á las Aletas, y desde la Mura á la Roda. En lugar de la nueva plantilla
Fig. 9. MR suelen algunos hacer uso del mismo Gálibo CFDE puesto lo de arriba abaxo; pero en tal caso los Reveses salen con mucha cavidad, á causa del codillo ú demasiada curvidad GDH, que de ordinario tiene el Gálibo, y que algunos conservan por fundados motivos.

25 En esta segunda práctica ó modo de construir que hemos explicado, usan algunos de una corta diferencia, y es, que no sea la QA, ó su igual LE, la diferencia de los mayores anchos de las Quadernas,

que

que se colocaron en las tablillas A y B: quieren que Fig. 12.
HL disminuya mucho mas, á fin de que con ello an- Fig. 9.
gosten mas por abaxo las Quadernas. Para lograrlo señalan la disminucion que debe tener ó llevar la HE, que es la que se llama *Plan de la Quaderna*, con una línea curva QR, y tomando sus distancias á la recta Fig. 13.
VX paralela á la Quilla, se transfieren á otras tablillas semejantes á las precedentes. Usan luego de estas, en lugar de las otras que contienen los mayores anchos de las Quadernas; pero como despues de aplicada la plantilla MR, no queda la Quaderna sino con un an- Fig. 9.
cho mucho menor que el que le corresponde, giran el Gálibo sobre el punto D, en que es tangente á la plantilla, hasta que el punto C, saliendo hacia fuera, quede en el abertor correspondiente, y en esta disposicion se describe la línea CFDSB como antes, que da la Quaderna. En este méthodo no terminan las Quadernas en los puntos C de los mayores anchos, ú del fuerte perpendicularmente á CQ, ni la línea del arrufo del fondo existe tampoco mas. De él usan los Franceses, como se puede ver en *Mr. Duhamel*, que describe un méthodo casi igual: el primero es de los Ingleses, y es lo que ellos llaman *Whole moulding*.

26 Con estas prácticas continuaron los Constructores por muchos siglos, hasta que de pocos tiempos á esta parte se reduxeron á formar Planos del cuerpo del Navío, á fin de corregir con facilidad y sin excesivos gastos los errores que podian percibir: pues bien cierto es, que no considerandose en dicha práctica ninguna de las secciones horizontales del cuerpo; que son las que deben premeditarse para conocer las resistencias que pueden resultar en el fluido, ni aun tampoco las secciones verticales de los extremos, de cuya figura depende, como se verá mas adelante, la fuerza ó suavidad de los movimientos del Navío, mal podian remediar los errores que de semejantes omisiones

ocurren. Despues de fenecida la fábrica, ó á lo menos sus Quadernas, se apercibian, y sin un desperdicio de las maderas que los causaban, substituyendo otras en su lugar, no se podian corregir, sino en las sucesivas fábricas, y con pérdida de mucho tiempo, y de las Embarcaciones defectuosas.

CAPITULO 3.

Del modo de describir los Planos de las Fábricas expuestas en el Capítulo antecedente.

27 PAra delinear el plano de las fábricas expuestas en el Capítulo precedente, es menester advertir, que lo que los Constructores llaman planos son ciertas proyecciones ichnográphicas y orthográphicas del cuerpo de la Nave, ú de las líneas que terminan su fábrica. Se reducirá, segun esto, la delineacion de los planos á formar dichas proyecciones baxo las reglas que la Geometría nos prescribe. Que estas sean suficientes para considerar los errores ó ventajas que las líneas pueden producir, se hace claro, pues queda el arbitrio de señalar quantas proyecciones se quisieren de las líneas que se necesitaren considerar.

28 Tres son para este efecto, á lo menos, las proyecciones que deben hacerse: una sobre un plano vertical paralelo á la Quilla: otra sobre otro plano vertical que corte esta en ángulos rectos; y el tercero sobre un plano horizontal paralelo á la misma. Para todos tres supondremos la Quilla horizontal, pues es el méthodo de descripcion mas fácil, y la que sin embargo ofrece quantas consideraciones se hacen precisas. Como la Nave consta de dos mitades iguales y semejantes, por las razones que expusimos (§. 1.), basta en las

pro-

proyecciones representar la una mitad, pues con ello se tienen ambas.

29 La Quilla se coloca con dos de sus faces verticales, y las otras dos horizontales: con esto, en la proyeccion vertical paralela á la Quilla, no puede verse sino la faz vertical AB que se representa por dos Fig. 8.
líneas paralelas que comprehenden el peralto de la misma. El Codaste y Roda tambien se ponen en el propio vertical, con que tampoco deben manifestar sino sus dos faces mas anchas, del mismo modo que expone la figura. En la proyeccion vertical perpendicular á la Quilla, el plano de proyeccion corta esta en ángulos rectos, con que su representacion es el quadrilongo HI que consta del alto y grueso de la misma Fig. 10.
Quilla: y el Codaste y Roda no se ven sino por sus cantos ó gruesos, y se representan en toda su elevacion por dos paralelas, ó casi paralelas, que terminan sus gruesos; pero no habiendose de representar sino la mitad de la Nave, supuesto que la FG sea el plano que la divide por toda su longitud en dos partes iguales, la paralela á este HK distante la mitad del grueso del Codaste, terminará la mitad de este, y la IL la mitad de la Roda. Esta disposicion se toma para no representar en la parte izquierda sino la mitad de la Nave desde la Popa, hasta la Quaderna maestra, y en la derecha la mitad desde esta Quaderna hasta la Roda, pues con ello se evita la confusion de líneas que de lo contrario resultara. En la proyeccion horizontal paralela á la Quilla, el plano de proyeccion, corta esta paralelamente, con que su representacion se reduce á la longitud de toda ella, y se termina por la AB paralela á VX, que representa el plano que di- Fig. 13.
vide la Nave por toda su longitud en dos partes iguales: y lo mismo el Codaste y Roda LA, BK, que se ven igualmente de canto.

30 Para mayor inteligencia en lo succesivo llamare-



remos á la proyeccion vertical paralela á la Quilla, *Proyeccion longitudinal*: á la vertical que la corta en ángulos rectos, *Proyeccion transversal*; y á la horizontal paralela á la Quilla, *Proyeccion horizontal.*

31 En las proyecciones longitudinal y horizontal, todas las Quadernas se ven de canto, por colocarse sus planos perpendiculares á la Quilla, con que deben representarse cada una de ellas, por dos paralelas, que terminen sus gruesos; pero para evitar confusion podemos reducirnos al uso comun de no señalar sino un solo canto ó lado de la Quaderna. De los puntos señalados sobre la Quilla para ellos, se elevan perpendiculares, tanto en una proyeccion, como en otra, y estas representan los cantos expresados; solo que para evitar confusion, de lo que efectivamente se debe cuidar mucho, no se levantan sino de los puntos 3, 6, 9, 12 &c., y III, VI, IX, XII &c. lo que basta para la exâctitud de la fábrica, pues las demas Quadernas intermedias con facilidad resultan de las ya señaladas, que se llaman las *principales.* Otros Constructores no elevan perpendiculares sino á cada quatro; pero lo mas comun es á cada tres, que tambien es mas exâcto.

32 En la proyeccion transversal, todas las Quadernas se representan en su total extension y verdadera figura; á lo menos todas aquellas que se colocan cortando en ángulos rectos la Quilla, que son las mas ó todas, á excepcion de algunas en Popa y Proa, y la Aleta CD, que como se ve tiene alguna inclinacion: por cuyo motivo aun en la proyeccion horizontal no se representa por línea recta, sino por una curva.

Fig. 10. Fig. 8. Fig. 13.

33 Para representar las Quadernas en la proyeccion transversal, que es á lo que se reduce casi toda la fábrica, pues por ellas se termina el Buque, y con él todas las propiedades que acompañan la Nave, se puede empezar por describir la Quaderna maestra, terminandola por las dos verticales MN, OP que encier-

cierran su mayor ancho ó manga del Vaxel: y habiendo señalado las alturas MN, OP, ó puntos N y P en Fig. 10. donde efectivamente debe tener su mayor ancho, que de ordinario es desde los tres quartos, ó algo menos, hasta el total de media manga, se tiran las horizontales NQ, PR, en las quales deben estar los centros de los arcos de círculo mas altos de los que terminan la Quaderna. Fixado despues el plan que debe tener, esto es, lo que el punto S, donde empieza la rectitud SF, dista del plano GF, se tiran las verticales ST, en las quales se deben hallar los centros de los arcos inferiores que terminan la misma Quaderna, y se describen estos, habiendo señalado primero la elevacion que el punto S debe tener sobre la horizontal MO, que pasa por la cara alta de la Quilla, cuya elevacion se llama *astilla muerta*. Tirados los dos arcos superior é inferior, se busca el centro de otro medio que les sea tangente á uno y otro, y tiradas las tangentes HS, IS, quedará descrita toda la Quaderna desde su mayor ancho hasta la Quilla.

34 Los centros de los círculos, ó los radios QN, TS, asi como el del arco intermedio, quedan, como se ha visto, al arbitrio del Constructor, que los determina segun las calidades que quiere dar á su Nave, ó el buque que quiere que encierre: en los Navíos, la distancia desde el punto M ú O á la Quaderna es, por lo ordinario, de un tercio de la mitad de la manga MF; aunque los Franceses siempre la dan mucho mas, no siendo para Navíos de carga: mas adelante se verá, y ya se ha demonstrado (*Pro.* 58. *Lib.* 2. *Tom.* 1) quanto en esto se equivocan, quando por ello juzgan que el Navío será mas veloz en su marcha, mas andador, ó como suelen llamar los Marineros mas *velero*. Por igual razon suelen hacer muy grande la astilla muerta, ó elevacion del punto S, como muy chico el plan, ó su distancia del plano GF; pero ambas cosas tienen el mismo erroneo principio.

El

35 El radio TS se cuida tambien que no sea muy grande en las fábricas Inglesas, á fin de conservar una especie de codillo en el arco inferior, para que la tangente tirada desde la cara inferior de la Quilla á la Quaderna, no toque esta mas arriba de la pieza principal con que se forma la misma Quaderna, que llaman *Plan*, pues de esta suerte, si la Nave llega á encallarse en la tierra, ó á *varar*, como dicen los Marineros, cayendo por precision sobre un lado, apoya sobre dicho madero ó plan, que es el mas fuerte, y no sobre los demas que se le unen.

36 Descrita la Quaderna maestra, se trasladan
Fig. 10. las alturas de sus puntos S y N, á los M y P, y por
Fig. 8. ellos se describen los arcos paralelos IMN, GPH, que terminan el arrufo del cuerpo principal, y alturas de los mayores anchos que deben tener las Quadernas, desde la Quadra G, hasta la Amura H: y en la pro-
Fig. 13. yeccion horizontal se describen los NOP, QDR, tambien paralelos, que terminan los mayores anchos de las mismas Quadernas y sus planes, señalando primero los puntos N y P, segun las medidas de Quadra y Mura que se hubiesen fixado. Las alturas desde la
Fig. 8. Quilla, hasta los puntos en que la curva NMI corta las Quadernas, se trasladan á la proyeccion transversal, como por exemplo la de la Quaderna 18, desde la ho-
Fig. 10. rizontal MO al punto V, y por todas ellas se tiran horizontales, que se cortarán iguales á las distancias
Fig. 13. desde la curva QDR, al plano VX que divide la Nave
Fig. 10. en dos partes iguales, como por exemplo V W=QC.
13. 37 De todos los puntos V se levantan verticales,
Fig. 10. ó tiran paralelas á la FG, haciendolas todas iguales á ST, y sus extremos son los centros con que se describen los arcos inferiores de las Quadernas. Del mismo modo las alturas, desde la Quilla hasta los puntos en
Fig. 8. que la curva GPH corta las Quadernas, se trasladan á la proyeccion transversal, como por exemplo la de la

Qua-

Quaderna 18, desde la horizontal MO al punto X, y por todas ellas se tiran horizontales que se cortan iguales á NQ, y sus extremos son los centros con que se describen los arcos superiores de las Quadernas. Se juntan estos dos arcos de cada Quaderna, con otro tercero que les ha de ser tangente, é igual á aquel con que se describió la Quaderna maestra, y con ello quedan descritas, en quanto al cuerpo principal, todas las comprehendidas entre la Quadra y la Mura. Fig. 10.

38 Los Reveses se describen como en el Capítulo práctico: pues formada una plantillita de tabla, de como media, ó un tercio de línea de grueso, dandola la figura de MSR, y señaladas en ella las divisiones o, 3, 6, &c. se prosigue del modo que allí se explicó. Fig. 9.

39 Para describir todas las demas Quadernas desde la Quadra hasta la Aleta, y desde la Mura hasta la Roda, se prosiguen á discrecion las curvas PGE, PHF, y ONE, OPF: rematando las de Popa á la altura y ancho de la Aleta con corta diferencia, y las de Proa en la Roda, casi en la misma altura que remataron en Popa; aunque algunos Construćtores hacen menor esta elevacion. Se trasladan todas las anchuras de las Quadernas terminadas por la curva NE á la proyeccion transversal desde el plano GF á la curva XA: y todas las alturas de la curva GE desde la horizontal MF á la misma curva XA, y las intersecciones de las anchuras con estas alturas, dan los puntos en la curva XA por donde deben pasar las Quadernas. Fig. 8. 13. Fig. 10. Fig. 8. Fig. 10.

40 Señalados estos puntos, y descrita á discrecion la Aleta ABCD, se tiran las rećtas αD, βC, γB para que representen las tres maestras mas baxas EF, procurando que con la curva ó recta NXA, queden con corta diferencia igualmente distantes, y corten las Quadernas lo mas perpendicularmente que posible sea. Las distancias horizontales desde los puntos en que las maestras cortan las Quadernas ya descritas Fig. 8. Fig. 10.

Fig. 13. al plano GF, se trasladan á las curvas HGI, SMW, YTU, por cuyos puntos se describen las mismas curvas, y se continuan á discrecion hasta la Aleta, y hasta la Roda, señalando primero los puntos extremos Fig. 8. F de la Proa, por transferir las alturas de los extremos de las maestras de la proyeccion transversal, á la longitudinal, y baxando las perpendiculares FF en esta de los mismos extremos hasta la proyeccion horizontal.

41 Delineadas ya el todo de las maestras en la proyeccion horizontal, se van trasladando las distancias, desde la línea VX, á los puntos en que aquellas cortan las Quadernas comprehendidas entre la Quadra y la Fig. 13. Aleta, y entre la Mura y la Roda, á la proyeccion Fig. 10. transversal, desde el plano GF á sus correspondientes Maestras: despues de lo qual, solo resta tirar curvas que pasen por todos los puntos de cada Quaderna, y quedarán descritas estas.

42 Esto ultimo, que segun lo poco que nos ha costado referirlo, parece lo mas fácil, es sin embargo lo mas dificil, y en que estriba una de las mayores dificultades de la práctica de la construccion, porque no siempre los puntos de cada Quaderna quedan en la debida disposicion para que, tirando por ellos una curva, forme esta una Quaderna regular, libre de tropiezos, corcobas, codillos, ó repentinas oquedades: lo que se hace preciso por las razones ya expresadas, y por otras muchas, como se verá mas adelante. La ventaja que lleva la construccion por los planos, á la práctica ciega que en el Capítulo antecedente explicamos, es que estos errores pueden corregirse fácilmente en el papel, quando en aquella práctica quedan casi sin remedio. Para conseguirlo, se vuelve otra vez á la proyeccion horizontal: se enmienda la curvidad de sus maestras, dandolas mas ó menos capacidad, segun requirieren los defectos que se noten

en

en las Quadernas de la proyeccion transversal, y se repiten estas enmiendas dos, tres, ó mas veces, hasta que las Quadernas descritas agraden ó convengan con la idea de la formacion que parezca deben tener: con lo que queda descrita toda la obra.

43 No obstante, para mayor perfeccion en las propiedades de la Nave, falta aun un paso que dar muy preciso; pues por lo que toca á su andar, las principales líneas que se deben considerar, aunque no precisas para la fábrica, son las secciones horizontales: y aunque las Quadernas parezcan seguir muy buena curvidad, no por eso dexan de tener las secciones horizontales, muchas veces, codillos y oquedades, que de ninguna manera convienen, puesto que (*Prop.* 55. *Lib.*2.) demonstramos que ninguna línea resiste menos en el fluido que la recta, y de ahí la mas próxîma á esta. Para verificar este exâmen, se tiran en la proyeccion transversal dos, tres, quatro, ó mas horizontales $\delta\varepsilon$, $\zeta\eta$, y las anchuras, desde los puntos donde cortan estas las Quadernas, hasta el plano GF, se trasladan á la proyeccion horizontal, sobre sus respectivas Quadernas desde la línea VX: por todos los puntos que se señalaren, se tiran las líneas curvas $\alpha\beta\gamma$, y $\delta\varepsilon\zeta$, señalando primero los extremos por tirar iguales horizontales sobre la proyeccion longitudinal, y baxando perpendiculares desde sus extremos á la proyeccion horizontal, como Eδ, $\alpha\alpha$, $\gamma\gamma$ y $\zeta\zeta$. Señalandas las proyecciones horizontales de estas secciones, se considera su curvidad: y si se hallare que no siguen con la regularidad que se desea, se enmiendan de nuevo las maestras y las Quadernas, hasta conseguir que el todo vaya conforme á las intenciones del Artifice, y á las reglas y theórica que mas adelante se explicará. Si se observare, por exemplo, que la cavidad de la línea horizontal inferior $\beta\gamma$, desde la Quaderna XVIII, hasta su extremo γ, no conviniere, Fig. 13.

se enmiendan las dos maestras lF, WF, asi como las tres Quadernas de Proa, como se ve con las líneas entrecortadas; y de esta enmienda resultará la de la misma línea, segun los puntos manifiestan.

44 Estas proyecciones horizontales quieren los mas de los Constructores que no sean paralelas á la Quilla, sino á la misma superficie del agua, porque de ordinario la Nave no flota con su Quilla paralela á aquella superficie; pero la diferencia es tan corta, que dificilmente se pueden establecer secciones paralelas á la Quilla buenas, que no lo sean tambien las paralelas á la superficie del agua: y asi hay algunos que no se sirven sino de aquellas.

45 Estas proyecciones resultan, segun se ha visto, del méthodo que los Ingleses llaman de *Whole-moulding*: el otro que usan los Franceses, tiene la misma descripcion, una vez delineadas las Quadernas comprehendidas entre la Quadra, Mura y Aleta; pero
Fig. 10. en él se carece de las líneas horizontales como VW, ú de toda la distincion de la parte del cuerpo principal, asi como de las horizontales, como NQ, que dan los de los arcos superiores que describen las Quadernas comprehendidas entre la Quadra y la Mura.

CAPITULO 4.

Del modo de describir los Planos segun hoy practican los Constructores mas especulativos y prácticos.

46 EN el estado explicado estaba la fábrica de las Naves, quando los Ingleses dieron con su méthodo un paso mas adelante. La misma proyeccion transversal de las Quadernas lo dicta. Los arcos superiores de las comprehendidas entre la Quadra y la Ale-

Aleta, ó entre la Mura y la Roda, van disminuyendo gradualmente, á proporcion que el de la Aleta es menor, cuyo orden se pierde en las Quadernas de enmedio, por ser sus arcos todos iguales; y aunque esto no tiene mas inconveniente, que el de encerrar estas un cuerpo cylíndrico, quando de golpe dexa de serlo en la Quadra para seguir con otro especie de cónico, como en las Quadernas desde la Quadra á la Aleta se tiraban sus correspondientes arcos superiores solo á tientas, era justo describirlos con orden, quando se presentaba á la vista, el que debian disminuir gradualmente segun las secciones de un cuerpo cónico: y asi no se contentaron en hallar los centros de dichos círculos para poderlos describir, sino que establecieron el cuerpo cónico, no solo desde la Quadra hasta la Aleta, sino desde la misma Quaderna maestra: es lo que ellos llaman *formar el cuerpo por arcos de círculo.* Este méthodo lleva tambien de ventaja al otro, el que ya no es preciso sujetarse á que los planes disminuyan igualmente que los mayores anchos de las Quadernas: esto es, no es ya necesario que QDR sea paralela á Fig. 13.
NOP; ni que el arrufo del cuerpo principal IMN sea y 8.
tampoco paralelo á la línea del fuerte GPH: la descripcion de cada una de estas líneas queda al arbitrio del Artifice, lo que le dá mas lugar para mejorar el cuerpo del Vaxel.

47 Para proceder con esta ventaja, despues de elevado sobre la Quilla el Codaste y la Roda, asi como todas las perpendiculares á aquella que representen los cantos de las Quadernas, se tiran á discrecion, ó segun las medidas resueltas, las dos curvas EGPHF Lam. 4.
y IMN, tanto en la proyeccion longitudinal, como Fig. 14.
en la horizontal. Se describe despues en la transver- y 16.
sal la Quaderna maestra, segun se dixo (*Cap.* 3.), y trasladan á ella todas las alturas de los puntos de la línea EGPHF, asi como todos los anchos de la misma,

que

que darán, con sus intersecciones, todos los puntos de
Fig. 15. las curvas ó rectas EGP y PHF. Del mismo modo se
Fig. 14. trasladan todas las alturas de IMN, y todos los anchos de la misma, que darán, con sus intersecciones, todos
Fig. 15. los puntos de las curvas ó rectas IM, MN.

48 Por todos los puntos de las EGP y PHF (*Proyeccion transversal*) se tiran horizontales, y en estas se deben hallar los centros de los círculos superiores que terminan los cantos de las Quadernas, puesto que ha de ser la altura de sus mayores anchos. Para hallar estos centros considérese, que la parte del cuerpo de la Nave terminada por ellos, puede ser un cuerpo formado por la revolucion de una línea qualquiera al rededor de un exe, como de la línea ABC al rededor
Fig. 17. del exe EX, y que despues de formado, se le da á todo él nueva curvidad, por un movimiento paralelo de todas sus partes ó puntos, á fin de que la curva ABC se reduzca á la DFC: en este caso bien es claro, que el exe EX se convertirá en la curva GHX, y por consiguiente todos los centros sobre que giraron los puntos de la ABC se hallan ya sobre la GHX, y las distancias desde esta curva á la DFC serán los radios con que se han de describir los círculos, que serán la proyeccion de las secciones del cuerpo. Los centros se han de hallar, por consiguiente, en una línea qualquiera recta ó curva, como GHX, y de su mayor ó menor curvidad dependerá la magnitud de los radios, que termina la DFC, y por consiguiente la menor ó mayor capacidad de los círculos que se describan, como la total del cuerpo.

Fig. 15. 49 Esto sentado, siendo Q el centro con quē se describió el arco superior de la Quaderna maestra, y A el de la Aleta ó Quaderna 33, describase una curva qualquiera AKQ, y los puntos donde esta cortare las horizontales tiradas, serán los centros de los círculos, y sus distancias horizontales á los fixados en la EGP,

los

los radios con que se describirán. Con la misma disposicion se describirá otra curva RST que pase por R, centro asimismo del arco superior que termina la Quaderna maestra, que cortará todas las horizontales tiradas, y las secciones serán igualmente los centros de los círculos, y los radios sus distancias horizontales á la FHP.

50 Descritos ya todos los arcos superiores, se pasa á los inferiores: se elevan verticales de todos los puntos de las MI, MN, y se cortan todas iguales al radio MB de la Quaderna maestra, con cuyas distancias se describen los arcos inferiores; pero esto no se práctica sino hasta la Quadra y la Mura: desde estos puntos hacia Popa y Proa no han sabido hacer uso los Constructores Ingleses del arrufo del cuerpo principal, ni del ancho ó amplitud de los planes: y aunque en sus planos continuan las líneas MI, MN hasta Popa y Proa, como para hacer uso de ellas, ellos mismos confiesan que no les sirve de nada la prolongacion. Con el mismo arco del medio con que se unieron los dos arcos superior é inferior de la Quaderna maestra, se unen tambien los de las demas Quadernas comprehendidas entre la Quadra y la Mura, y quedan estas fenecidas, á excepcion de sus Reveses.

51 Para concluir todas las demas de Popa y Proa, de las quales solo los arcos superiores quedan descritos, se tiran las maestras $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\epsilon\zeta$, del mismo modo que se dixo en el méthodo práctico: se trasladan todos los puntos en que estas cortan las Quadernas ya descritas desde la proyeccion transversal á la horizontal, y por todos los puntos de esta se describen las proyecciones de ellas, que se continuan despues á arbitrio hasta Popa y Proa. Se trasladan luego los puntos de estas proyecciones, ó en donde se cortan las Quadernas contenidas desde la Quadra á Popa, y desde la Mura á Proa, á la proyeccion trans-

ver-

versal, y por todos los puntos correspondientes se tiran curvas, que serán las descripciones de las Quadernas. Las mismas maestras sirven igualmente para describir todos los Reveses; pero en ello hay riesgo de equivocarse en mucho, si no se tira otra maestra entre la εζ y la Quilla, pues quedando aquella muy separada de esta, se puede en el intermedio apartarse mucho la verdadera descripcion. En sustancia, este méthodo es el mismo ya descrito en el Capítulo antecedente, á excepcion de haberse adelantado el modo de describir todos los arcos superiores de las Quadernas desde Popa hasta Proa; lo que allá no se conseguia, sino con las comprehendidas entre la Quadra y la Mura, y de haber quedado arbitrarias las curvas
Fig. 14. IMN, que allí han de ser por precision paralelas á GPH. Por ultimo, añadiremos aqui tambien, que los Ingleses en lugar de terminar la Popa por la Quaderna, que hemos llamado Aleta, y por consiguiente por una superficie plana, considerando lo que diximos (§. 3.), la han hecho terminar con curvidad á imitacion de la Proa.

52 Para ello siguen las maestras hasta rematarlas
Fig. 15. en el propio Codaste OC, y pieza que lo cruza, llamada Yugo LD, como en los puntos ζ, δ, β, y se sigue como antes. En lugar de la Aleta se coloca otra
Fig. 14. Quaderna LV, que corte la Quilla obliquamente, que-
15. 16. dando su plano vertical: y su proyeccion en las longitudinal y transversal, se consigue trasladando sus puntos ó intersecciones con las maestras, como se practica con las demas Quadernas: como hace el oficio de la Aleta, conserva el mismo nombre que esta, pues solo se distingue de la otra en colocarse obliquamente.

53 En todo esta descripcion caben casi las mismas dificultades que en la precedente, pues lo ordinario es, que solo despues de varias tentativas y correcciones

se

se consigue que las Quadernas descritas queden libres de tropiezos, corcobas, codillos, ó repentinas oquedades: es precisa, pues, la repeticion de operaciones, enmendando la proyeccion horizontal de las maestras, hasta tanto que en la transversal se vean las Quadernas libres de aquellos defectos. Al contrario, si despues de hechas las descripciones pareciere que las maestras en la proyeccion horizontal tubieron algun defecto, como por exemplo demasiada convexidad, asi como desde la Quaderna 27 hacia Popa, se enmendarán segun las líneas de puntos (*Proyeccion horizontal*) y resultarán las correcciones como en las líneas de puntos (*Proyecciones longitudinal y transversal*).

54 Se puede aliviar ó abreviar mucho el trabajo de las tentativas, si antes de haber continuado á arbitrio la proyeccion horizontal de las maestras, se describe á discrecion una Quaderna, como por exemplo la 30 ú XXIV, pues trasladando sus puntos de interseccion con las maestras á la proyeccion horizontal, se tendrán puntos por donde proxîmamente deben pasar las curvas ó proyecciones horizontales de las maestras. Despues de estar á satisfaccion del Artifice todas las Quadernas, se proyectan las secciones horizontales $\eta\theta$, $\varkappa\lambda$ en la proyeccion horizontal, con las líneas $\zeta\gamma\theta$, $\varkappa\mu\lambda$, y de estar estas igualmente acordes con sus intenciones, queda perfeccionado el todo; de lo contrario es preciso alterar, tanto las maestras como las Quadernas, y repetirlo hasta que todo corresponda.

55 Esto es lo que han adelantado hasta hoy los Constructores Ingleses: los Franceses han tomado un camino contrario: vieron que por el méthodo antiguo solo describian con regla el cuerpo del Vaxel desde la Mura á la Quadra, y que el resto se reducia á las tentativas con las maestras: con que despreciando

aquellas reglas, que en parte los sujetaban, se redugeron á describir todas las Quadernas, excepto la maestra, por las tentativas.

56 Elevados sobre la Quilla el Codaste y la Roda, asi como todas las perpendiculares á aquella, que representan los cantos de las Quadernas, se describen
Lam. 5. en la proyeccion transversal la Quaderna maestra
Fig. 19. $P\alpha\gamma\varepsilon M\varepsilon\lambda\theta P$, la Aleta $E\xi\pi\zeta$, y se tiran las maestras PGE, $\alpha\xi$, $\gamma\pi$, $\varepsilon\zeta$ en Popa, asi como las de Proa PBF, $\alpha\sigma$, $\gamma\varphi$, $\varepsilon\omega$ que van á rematar en la Roda. Se dividen despues estas maestras segun las ordenadas de una curva qualquiera, bien sea colocando las divisiones segun los números quadrados 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, &c.
Fig. 19. y 22. como en la maestra $\varepsilon\zeta$, en cuyo caso la curva será
Fig. 21. y 19. una parábola: bien sea elevando sobre la AP perpendiculares igualmente distantes, haciendo AE = PE, describiendo el arco de círculo PGE tangente á AP en P, y trasladando sus ordenadas á la Maestra, en cuyo caso la curva será una porcion de elipse: ó bien sea
Fig. 19. haciendo las distancias de los puntos B, C, D, H, &c. á la perpendicular IK mitades unas de otras, en cuyo caso la curva será la logaríthmica; ó bien de qualquier otro modo que se quiera, y se trasladan todos estos puntos á la proyeccion horizontal: se tiran por todos ellos curvas, rematandolas en sus correspondientes
Fig. 20. puntos E, ξ, π, ζ, y si estas curvas siguen con la regularidad que el Artífice desea, asi como las que se tiraren por todos los puntos de las mismas maestras en la proyeccion transversal, que formaran las efectivas Quadernas, la obra quedará concluída. Si al contrario las curvas no tubieren la perfeccion regular, como de ordinario sucede en las ultimas Quadernas de Popa y Proa, se alteran á discrecion una, dos, ó mas veces, hasta que queden libres de tropiezos, corcobas, codillos, ó repentinas oquedades. Si se observare, por
Fig. 19. exemplo, que las Quadernas XXIV y XXVII de Proa fue-

fueren demasiado concavas en la parte inferior, pueden enmendarse como se ha hecho con las líneas de puntos.

57 Despues de estar á satisfaccion del Artífice todas las Quadernas, se proyectan las secciones horizontales $\eta\vartheta$, $\varkappa\lambda$, en la proyeccion horizontal, con las líneas $\zeta\gamma\theta$, $\varkappa\mu\lambda$, y de estar estas igualmente acordes con sus intersecciones, queda perfeccionada la obra; de lo contrario es preciso alterar, tanto las maestras como las Quadernas, y repetirlo, hasta que el todo corresponda. Si despues de concluido se quiere que la Popa remate curva, ú de *cucharro*, como llaman los Marineros, y no con Aleta plana, se prolongan en la proyeccion transversal las maestras $\alpha\xi$, $\gamma\pi$, hasta en β y δ, y estos puntos, en el Yugo y Codaste, se trasladan á las proyecciones horizontal y longitudinal, y se hace pasar por ellos la continuacion de las maestras, como se ve con las líneas entrecortadas. Sus intersecciones con las Quadernas se trasladan á la proyeccion transversal, y por los puntos que dieren se tiran las curvas entrecortadas, que serán las Quadernas correspondientes á la Popa curva, ú de cucharro.

58 Este es el méthodo de que se sirven los Constructores Franceses mas versados: la misma práctica les ha dado el golpe de vista tan perspicaz para describir las curvas que representan las Maestras, asi como las Quadernas, que á pocas tentativas consiguen la perfeccion de la obra acorde con sus intenciones: para los que no tienen tanto exercicio es algo dificil, y pocas veces salen Quadernas perfectas; pero suplen este defecto con un modo fácil y seguro de dividir las maestras en la proyeccion transversal, por cuyas divisiones han de pasar las Quadernas.

59 Dividida la $\varepsilon\zeta$ segun los números quadrados, dividen la PGE segun las ordenadas igualmente dis- Fig. 19. y 22. Fig. 19.

E 2 tan-

Fig. 21. tantes del arco PGE, siendo este tangente en P á la AP, y dandole de ordinario, con corta diferencia, á
Fig. 19. la AP vez y media, ú dos veces la AE, ó su igual PE.
y 21. Dividida esta maestra, se coloca con las mismas divi-
Fig. 23. siones en EP, y se forma sobre ella el triángulo EAP: se tiran por las divisiones los radios $A\pi$, A33, A30, A27, &c., y con esto, si despues se tiran las $\pi\gamma$, $\xi\alpha$,
Fig. 19. paralelas á EP, é iguales á las dos maestras $\gamma\pi$, $\alpha\xi$, darán las divisiones hechas en aquellas por los radios, las divisiones de estas. Se tiran despues curvas por las divisiones correspondientes, y serán las efectivas Quadernas. Esto practican algunos Constructores; otros
Fig. 23. quieren que aun la $\varepsilon\zeta$ esté dividida por el triángulo
y 19. $\pi A\gamma$. Otros que las $\xi\alpha$ y $\pi\gamma$ no sean paralelas á la EP, sino que vayan con alguna inclinacion; pero todo esto se reduce á dar mas ó menos capacidad á las Quadernas, y puede servir para alterarlas: si por
Fig. 23. exemplo los ángulos $A\xi\alpha$, $A\pi\gamma$ fueran mas agudos, las divisiones de las maestras $\alpha\xi$, y $\gamma\pi$ se aproximaran mas de α y γ, y por consiguiente las Quadernas tubieran mas capacidad: lo mismo se debe entender de qualquiera otra division: de suerte, que no es menester vincular en esto mas misterio que el de resultar el Navío con mas ó menos buque.

60 Si las Quadernas quedaren, con lo practicado, acordes con la idea del Constructor, quedará la obra concluida, á menos que las secciones horizontales no disgusten. en tal caso es preciso alterar las divisiones de alguna de las maestras $\alpha\xi$, $\gamma\pi$, ú de la $\varepsilon\zeta$, y volver á trazar aquellas hasta que el todo agrade: si no se practican estas enmiendas, rara vez se libertaran las Quadernas de tropiezos, corcobas, codillos, ó repentinas oquedades.

61 Si la Aleta no distare de la Quaderna 33 lo mismo que distan entre sí las demas Quadernas, no
Fig. 21. debe distar tampoco la AE de la primera perpendicular

lo

lo mismo que lo que distan entre sí las demas perpendiculares: deben ser entonces proporcionales la distancia de Quaderna á Quaderna, á la distancia desde la 33 al punto E, como la distancia de perpendicular Fig. 18. á perpendicular, á la distancia desde la AE á la prime- Fig. 21. ra perpendicular que se sigue: lo mismo se debe entender de los demas puntos ξ, π.

62 Para la division de las maestras de Proa $\alpha\sigma$, Fig. 22. $\gamma\varphi$, $\varepsilon\omega$, se forma otro triángulo con la base dividida segun los números quadrados 1, 4, 9, 16, &c.; ó segun las ordenadas de otra qualquiera curva, y despues de tiradas desde el vértice las $A\omega$, $A\varphi$, $A\sigma$, que disten proporcionalmente del radio AXXVII lo que los mismos puntos disten de la Quaderna XXVII, y se aplicarán las líneas $\varepsilon\omega$, $\gamma\varphi$, $\alpha\sigma$, iguales á las maestras, dandoles la obliquidad con la base que parezca mas propia, para que las divisiones de las unas den regulares, ó bien seguidas Quadernas. Se describe despues, ó aun antes, la Logaríthmica PHF: para ello se Fig. 20. forma el rectángulo PoFA, y dividida la PA en 9 partes iguales, se levantan de las divisiones perpendiculares, y se hace la primera $BC = \frac{1}{2}AF$, y la segunda $DG = \frac{1}{2}BC$, y asi hasta la ultima division: tirando despues una curva por todos los extremos de las perpendiculares será la Logaríthmica, cuya proyeccion debe transferirse á la recta ó curva PBF. Divididas Fig. 19. con esto todas las maestras de Proa, se tiran por las divisiones curvas, que serán las Quadernas: en ellas, si fuere necesario, se practicarán las enmiendas, segun queda explicado.

63 Las distancias proporcionales de los puntos ω, φ, σ, hasta el radio AXXVII no deben formar su Fig. 22. relacion con la distancia desde el radio AXXVII al radio AXXIV, como hacen algunos Autores (a); sino con la distancia desde el radio AXXVII al radio AXXX, que

(a) Ve Mr. Duhamel, pag. 219.

que es mayor que la otra: y aun si los puntos caen entre la Quaderna XXX y XXXIII, como sucede en este caso, deben formarse las relaciones de las partes comprehendidas entre estas Quadernas, con la distancia entre el radio AXXX y AXXXIII: y aun en esto cabe error si la curvidad de las líneas fuere grande. El verdadero méthodo de hallar, por exemplo, el lugar del radio Aφ, será medir la distancia desde la Quaderna XXVII al punto φ en las proyecciones longitudinal ú horizontal, y puesto que esta distancia sea n, expresando por la unidad la distancia de Quaderna á Quaderna, será $(9+n)^2$ la distancia desde el radio Aφ al punto o, ó la del mismo radio al AXXVII $= 18n+n^2$: de esta suerte, si fuere $n = \frac{7}{5}$, será esta distancia, con corta diferencia, $= 27\frac{1}{5}$.

64 Este méthodo de proyectar las Quadernas, no solo facilita las tentativas, sino que asegura de la perfecta curvidad de las maestras; pero no por ello quedan bien descritas las Quadernas, ni resultan de satisfaccion las secciones horizontales: es preciso, como en los demas méthodos, venir á las tentativas, y lo que es mas, es preciso practicarlas tambien muchas veces, con las Quadernas comprehendidas entre la Mura y la Quadra. A mas de esto, no porque se hayan descrito las Quadernas en la proyeccion transversal, y las maestras en la horizontal, pareciendo unas y otras perfectas, hay seguridad de que efectivamente lo sean, porque los puntos de las Quadernas comprehendidos entre las maestras, en la proyeccion transversal, pueden no corresponder á los de la horizontal. Para precaberse de esto es preciso duplicar, ó triplicar las maestras, y en tal caso se multiplican tambien las tentativas, porque no se sabe la relacion que deben tener entre sí las divisiones de cada maestra, para que las Quadernas queden perfectas. Todos estos defectos evita la descripcion de las Quadernas

por arcos de círculo, como practican los Ingleses; pero aun estos no lo han conseguido sino en el cuerpo principal desde la Mura á la Quadra: de estas hacia Proa y Popa se han reducido á las tentativas, asi como en todos los Reveses, de suerte que tampoco se libertan de ellas sino en parte. En el Capítulo siguiente damos el modo de lograrlo enteramente.

CAPITULO 5.

Del modo de describir el cuerpo de la Nave geometricamente, y todas las Quadernas con arcos de círculo.

65 NO habiendose hasta ahora premeditado el modo de describir el cuerpo de la Nave sino por tentativas, y de ningun modo por los medios que la Geometría ofrece, se nos hace preciso entrar en este exâmen, pues la utilidad nos dará muy bien la recompensa del trabajo. Si el cuerpo de la Nave fuera una elipsoide perfecta, ó la union de dos semielisoides unidas en la Quaderna maestra, bien es claro que se presentaba la facilidad de describir todas sus Quadernas en la proyeccion transversal, porque todas fueran círculos: igualmente lo fueran, si el cuerpo de la Nave fuese formado por la revolucion de una curva qualquiera al rededor de un exe; pero este cuerpo no convendria con el que la práctica ha manifestado necesitan las Naves, ni con el que dicta la theórica, como se verá mas adelante. La Quaderna maestra se reduxera á un solo círculo, y lo mismo las demas: y aunque esto tubiera el inconveniente de que comprehendieran muy poco espacio, podia remediarse, acompañando á cada círculo una línea recta que denotara

tara el plan que debia tener, de suerte que la mitad del cuerpo principal de la Nave fuera entonces formado por la revolucion de una curva qualquiera al rededor de un exe, y de un plano á quien se diera la curvidad necesaria para que fuese tangente al cuerpo formado por la revolucion de la curva; pero todo esto no fuera bastante: los círculos que denotaran las Quadernas tubieran todos sus mayores anchos á la misma altura, porque el exe de la revolucion debia ser paralelo á la Quilla; sin ello las secciones del cuerpo que denotaran las Quadernas no serian círculos.

66 Este inconveniente puede sin embargo remediarse: no hay mas que darle, despues de formado el cuerpo, una curvidad distinta, segun un plano vertical que pase por la Quilla: esto es, siendo EX el exe, y EMX la seccion longitudinal ó vertical del cuerpo que pasa por la Quilla: désele al exe EX, y con él á todo el cuerpo, la curvidad APB, pasando verticalmente el punto E al A, el C al D, el F al G, &c., y asimismo el punto H al I, el K al L, &c.: con esto es evidente que remediando el daño de que se hallen todos los mayores anchos de las Quadernas en el exe EX, no se han alterado las secciones del cuerpo que denotan las Quadernas, porque cada una de por sí se ha trasladado entera con un movimiento vertical, igual al que se le dió en su punto correspondiente al exe.

Lem. 2. Fig. 24.

67 Pero no basta tampoco este remedio: es preciso acudir á otro no menos necesario; como el exe ha de ser siempre paralelo á la Quilla, porque sin ello no serán círculos las secciones que denoten las Quadernas, como se dixo antes, todos los planes de ellas serán por consiguiente iguales, y el arrufo de ellos en las ultimas Quadernas de Popa ha de ser muy corto, ú de ser segun se requiere para el beneficio del Timon, como se verá mas adelante, es preciso que las mismas Quadernas de Popa no tengan los anchos necesarios,

tan-

tanto para el manejo de la caña del Timon, como para la colocacion y manejo de la Artillería. Iguales dificultades se ofrecen en la Proa, porque hasta la ultima Quaderna de ella tubiera plan, y fuera con exceso amplia.

68 El remedio se presenta con la misma facilidad que antes: no hay mas que darle al exe EX, y con él Fig. 25.
á todo el cuerpo, un movimiento horizontal perpendicular á la Quilla: esto es, haciendo pasar el punto E al A, el C al D, el F al G, asi como el H al I, el K al L, &c., y en la Proa al contrario el X al B, el N al O, el Q al R, &c., pues con ello, evitandose el daño, no se alteran tampoco las secciones de las Quadernas: siempre son los mismos círculos, y sus centros se hallan en la línea curva ADG &c. á que se reduxo el exe por los dos movimientos vertical y horizontal, quedando sus radios CH, FK, ú DI, GL, &c. lo mismos que antes.

69 Como estos movimientos quedan arbitrarios, arbitrarias serán tambien las curvidades que se han de dar al exe; pero siempre ha de quedar este una línea curva: sin ello no quedarán asimismo curvos los costados de la Nave; y asi, de disponer curvo el exe, tambien lo serán los costados, y qualquiera seccion del cuerpo que se haga, ya sea vertical, horizontal ú obliqua, será siempre una curva perfecta, de suerte que no necesitaremos de tentativas para saber de cierto que lo serán.

70 Ya no nos falta sino hacer atencion á los Reveses para que quede enteramente descrita la Nave y todas sus Quadernas desde el extremo de Popa hasta el de Proa. Pueden ser aquellos igualmente las secciones de otro cuerpo formado por la revolucion de un exe paralelo á la Quilla, á quien por darle del mismo modo dos movimientos, uno vertical, y otro horizontal, se aplique tangente al cuerpo principal y á la

Fig. 26. Quilla, ó al plano vertical BZ, coincidente con esta, que divide la Nave en dos partes iguales. Los centros S, T, U, V, &c. con que se describan los Reveses, se hallarán por consiguiente en una línea curva, y de la curvidad de esta, ú de los movimientos vertical ú horizontal que se le hubieren dado al exe, dependerá la mas ó menos concavidad de los Reveses; pero qualquiera que sea el movimiento dado al exe, la seccion de ellos hecha por las maestras, será siempre una curva perfecta.

Fig. 24. 71. Se describirá, pues, á arbitrio la curva ASTUV &c. para que denote la curvidad vertical dada al exe, cuidando que sea tangente á la Quilla y al Codaste en A, punto donde se une este con el Yugo. Las intersecciones de esta curva con las Quadernas serán los centros de los círculos con que se han de describir los Reveses, y por tanto se pasarán sus alturas sobre la Quilla á la proyeccion transversal. Despues de esto, respecto que el cuerpo que formen los Reveses ha de ser tangente al cuerpo principal que termina la AILM, las distancias entre esta curva y la ASTUV &c. serán los radios con que se habrán de describir los Reveses. Tomando, pues, estas distancias, se colocarán horizontalmente desde la BZ á los puntos STUV &c., desde los quales se describirán los mismos Reveses, que serán no solo tangentes al cuerpo principal, sino á la BZ. Con igual práctica se describirán los de Proa: y si la Roda fuere tangente á la Quilla, podrán servir estas por el arrufo que se le diere al exe: de suerte que en ellas se terminarán las alturas de los centros con que se hayan de describir los Reveses. Si la Roda no fuere tangente á la Quilla, se unirán por un arco suave que lo sea á una y otra, á fin de quitar el codillo que en su union resulta.

Fig. 26. (margin note beside "zontalmente")

72. Estas reglas entendidas facilitan el modo de describir ó proyectar las Quadernas en el cuerpo principal,

cipal, y en los Reveses, no solo con un arco de circulo, sino con dos, tres, ó mas si fueren necesarios, cuya práctica se hace precisa, porque con el arco único, los planes quedan terminados, se hacen mayores que el de la Quaderna maestra, y no le queda mucho arbitrio al Artífice para corregir el todo quando las secciones horizontales no corresponden á sus intenciones, y los Reveses salen con mucha concavidad, lo que ya se dixo que no conviene.

73 El modo de describir el todo de las Quadernas y el cuerpo principal con tres arcos de círculo, segun se trazaron algunas en los antecedentes Capítulos, se reduce, pues, á añadir al cuerpo, formado por la revolucion de una curva al rededor de un exe, otros dos cuerpos, formados por iguales revoluciones, que sean tangentes entre sí: esto es, terminado el arrufo y amplitud que deben tener los planes, se pondrá sobre ellos un cuerpo que les sea tangente, y despues se incluirá otro que sea tangente á este, y al primero ó mas alto. Todos los centros de los círculos de las secciones que expresen las Quadernas, se hallarán, por las razones expresadas, en una línea curva, y sus radios serán los mismos que los que tubieron en el cuerpo que se formó por la revolucion de otra curva.

74 Segun esto, elevados sobre la Quilla, el Codaste y la Roda, así como todas las perpendiculares á aquella que representen los cantos de las Quadernas, se tirarán, segun las medidas resueltas, las dos curvas EGPHF y EIMNF en la proyeccion longitudinal, y las correspondientes EGPHF, VIMNF en la horizontal. Descrita despues en la transversal la Quaderna maestra, segun se dixo en los Capítulos precedentes, se trasladan á ella todos los puntos de aquellas curvas, y por ellos se tiran horizontales como PQ, GK, &c. ML, IA, &c., y las verticales MB, IX, &c.: en estas, segun lo prescrito, se deben hallar los centros del

Lam. 6. Fig. 27. y 28.

Fig. 29.

 cuer-

cuerpo inferior de los tres que han de ser tangentes entre sí, del mismo modo que en las horizontales PQ, GK, &c. los del cuerpo superior: por lo qual tiradas á discrecion las curvas QKE, BXY, las intersecciones de estas con las horizontales y verticales, darán los centros de los círculos Pα, Gξ, &c., y Mε, Iπ, &c.; asi como las distancias QP, KG, &c., y BM, XI, &c. los radios con que deben describirse. Descritos, pues, estos, se tienen ya los dos cuerpos superior é inferior, y para describir el intermedio que les sea tangente, se puede, describiendo círculos iguales, ó todos con el mismo radio con que se describió el círculo intermedio αε de la Quaderna maestra, asi como ξπ, procurando que sean tangentes á sus correspondientes, con lo qual queda trazado todo el cuerpo principal de la Nave.

75 Si por describir todos los círculos intermedios iguales á αε saliere el cuerpo de la Nave algo demasiado lleno, ú delgado, respecto á las intenciones que se tubieren, se pueden describir con radios que aumenten ó disminuyan segun las ordenadas de una curva qualquiera.

76 Para describir despues los Reveses, y evitar las concavidades excesivas que resultan en ellos, describiendose con un solo cuerpo tangente al principal, y
Fig. 29. al plano LO, plano transversal que divide la Nave en dos partes iguales, se describirán asimismo por otros dos cuerpos tangentes entre sí, asi como al principal, y á dicho plano. Descritas, pues, á discrecion las dos
Fig. 27. curvas EAK, DBL, tangentes suavemente á la Quilla, la primera por el otro extremo al Codaste, y la segunda á la vertical, que pasa por el Yugo, aquella terminará la altura á que deben hallarse los centros de los círculos del cuerpo inferior, y las distancias entre las dos curvas los radios con que deben describirse di-
Fig. 27. chos círculos. Con esto pasando las alturas A33, S30,

Q27, &c., á $\theta\lambda$, $\mu\gamma$, $\varpi\varphi$ &c., se tomarán en estas líneas las distancias Aθ, $\gamma\mu$, $\varphi\varpi$,&c. iguales á OA, TS, BQ, &c., y con ellas como radios, y con los centros θ, μ, ϖ,&c. se describirán los círculos $\lambda\Lambda$, $\gamma\Theta$, $\varphi\Phi$,&c. que serán las partes inferiores de los reveses. Para las superiores describase la curva UVXY, &c., y con las distancias V33, X30, Y27, &c., como radios, cuyos centros quedarán en una curva, como se ve en la figura, se describirán círculos tangentes á sus correspondientes $\lambda\Lambda$, $\gamma\Theta$, $\varphi\Phi$, &c., y al cuerpo principal, con lo que quedarán completos los reveses. Fig. 27. y 29. Fig. 27.

77 En el ultimo de Popa de estos que corresponde al Yugo, el arco inferior degenera en la recta LV, por lo que el radio con que se describa, ó la distancia entre las dos curvas EASQ, DOTB, en la vertical UD, que corresponde al Yugo, debe ser infinita, y por tanto la DOTB no debe ser tangente á la UD, sino á una infinita distancia. Al contrario el arco superior del ultimo reves de Popa, que corresponda al Yugo, degenera en círculo infinitamente pequeño tangente al mismo Yugo, y á la recta LV, por lo que la curva UVXY ha de pasar por el punto U que está en la vertical del Yugo. Con igual orden se describirán los reveses de Proa; pero en estos no hay precision que los arcos inferiores degeneren en la Roda en línea recta; ni los superiores en círculo infinitamente pequeño.

78 Para la exâcta descripcion de las curvas QKE, y BXY, se ha de advertir que respecto á que el cuerpo principal de la Nave remata en Popa en una línea recta EV, ó que la ultima seccion ó Quaderna degenera en dicha línea recta, es evidente que los radios de los círculos como PQ, GL, &c. han de ir disminuyendo, y que el ultimo en E degenera en un punto: y asi la curva QKE, debe por consiguiente pasar siempre por el punto E, extremo de la PGE. Por iguales razones los círculos Mϵ, Iπ, &c. han de ir aumentando hasta Fig. 29.

que

que degenere el correspondiente al punto V en la recta VE, y como esta puede considerarse el círculo de un radio infinito, se sigue que la curva BXY se ha de tirar de suerte que continuada sea tangente á la LO á una infinita distancia. Como la Proa remata en un punto F, tanto la curva CDF, como la RSTF deben pasar por dicho punto F, extremo superior del cuerpo principal.

79 Con esto queda descrita la Nave por un méthodo geométrico, y no solo se escusan muchísimas tentativas, sino que se trazan las Quadernas perfectas, sin que en ellas haya tropezon, corcoba, ni repentina oquedad; sabiendose sin embargo, que todas las secciones del cuerpo de la Nave, ya sean horizontales ú obliquas, como las que representan las maestras, son perfectas curvas, como es necesario que lo sean para el cómodo ajuste de la tablazon. Aun hasta el Navío de fábrica Francesa que describimos (§. 55. *hasta* 64.) sale con muchisima mas perfeccion, como se ve enmendado, con cortisima diferencia, el mismo buque que allá describimos, y en quien no cupo toda esta perfeccion, por la dificultad de describirse las Quadernas sin la debida regla.

Lam. 5. Fig. 30.

80 No se pretende por esto, que por precision hayan de ser todas las Quadernas compuestas de arcos de círculo: pueden ser eclipses, parábolas, ú otras qualesquiera curvas; pero como nada hay tan facil de trazar como el círculo, y con ellos se pueden dar á las Quadernas quantas variaciones se quisieren, ya por alterar las curvas PGE, QKE, MIV, BXY, así como los radios de los círculos intermedios, y asimismo las EASQ, DOTB, UVXY, es muchisimo mas perfecto reducirse á ellos, que á las demas curvas. En el Navío Frances, por exemplo, la curva MIV se ha descrito de suerte que ha disminuido los planes, y la BXY los radios de los círculos del cuerpo inferior, con lo qual ha

Lam. 6. Fig. 19. Fig. 27. Lam. 5. Fig. 30.

ha salido el cuerpo de la Nave mas delgada, ó menos llena que lo que hubiera salido con contraria disposicion.

81 Se omiten algunas pequeñas atenciones, que deben tenerse igualmente presentes en la descripcion de los planos ó proyecciones, como es el hallar los precisos puntos donde han de rematar las tablas, y aquellos por donde se han de tirar las Maestras, así como la descripcion de la verdadera figura que estas tienen, y sirve para hallar los abatidos, ó declive que han de tener las maderas en sus gruesos, pues todo esto pertenece á los Tratados de Práctica, en que es menester estenderse con particularidad: lo que no debemos incluir aqui para no confundir tantas especies como dicta la Theórica.

CAPITULO 6.

Del modo de describir en los planos ó proyecciones las obras muertas.

82 LAS obras muertas, que como hemos dicho (*Capit.* 1.) son las que se elevan sobre la línea del fuerte, ú de los mayores anchos de la Nave, se recogen ó internan, al paso que se elevan, á fin de aproximar mas del centro de gravedad el peso que han de suportar: y disminuir por este medio las fuerzas de inercia que deben padecer en los movimientos. Para construir estas obras muertas estilan los Ingleses señalar segunda línea del fuerte, pues estando muy baxa la primera, empezara por consiguiente á recoger el costado desde mas abaxo de la superficie del agua, donde debe quedar el primer fuerte, lo que sería perjudicial para otras propiedades.

Lam. 4. Fig. 14. 83 Tiran, pues, la E*abc*F por línea de este segundo fuerte, procurando que el punto *b* esté poco mas baxo que la cubierta principal, y las elevaciones de esta línea desde la Quilla se pasan á la proyeccion transversal, colocandolas en las verticales tiradas por
Fig. 15. todos los puntos de las PGE, PHF, pues ambas líneas del fuerte se construyen de las mismas anchuras que
Fig. 14. produce la línea EGPHF. Quedan por ello terminadas las *ba*E, y *bc*F con sus puntos en la proyeccion transversal, y por ellos se tiran líneas horizontales, como
Fig. 15. *bi*, *ak*, *nm*: haciendo centro en estas, como en *i*, *k*, *m*, con una distancia determinada y constante, se describen arcos, como *bl*, *ao*, *np*, &c., que dan la contínuacion de las Quadernas, hasta *lop*: executandose lo propio en la Proa.

Fig. 14. 84 Se tira despues la *defgh* para representar el canto alto del Galon en la Borda *fg*, y las elevaciones de esta línea desde la Quilla se trasladan á la proyeccion transversal, y tiran, por los puntos que dieren, las horizontales *dq*, *er*, *fs*, haciendo lo mismo en Proa. Tírase tambien la propia línea *defgh* en el plano horizontal, que terminará los anchos que debe tener, y estos mismos se trasladan tambien á la proyeccion transversal, como *qd*, *re*, *sf*, &c., los que dan la línea *def*, por cuyos puntos han de pasar los Reveses de las Quadernas. Para señalarlos, forman una plantilla *tu*, tal, que aplicada tangente al arco *bl*, pase por el punto *f*, y su extremo superior *u*, quede paralelo á la C*q*. Se aplica despues esta plantilla con igual disposicion á los demas arcos, y puntos correspondientes, y sirve de regla para tirar todos los Reveses.

85 Para la Proa hacen otra plantilla *xy*, que aplícada al punto *f*, y tangente al arco, se señala en ella el punto o: aplicada, de la misma suerte, á la Quaderna XXVII, se señala el punto XXVII: se divíde despues la distancia o XXVII segun las ordenadas

nadas de una curva, ó segun lo estubiere la *fh*, y aplicando cada punto de la plantilla á su correspondiente de esta línea, y puesta tangente al arco inferior, se describen los demas Reveses.

86 Este méthodo le usan tambien algunos para describir los Reveses de Popa; pero en muchas ocasiones saldrá defectuoso, porque para hacer convenir la plantilla con el arco inferior, es preciso darle un movimiento de rotacion sobre los puntos de la *fed*; y aunque por este movimiento no dexa de conservarse siempre la superficie ó costado de la Nave bien seguido, y sus secciones no se apartaran de ser curvas perfectas, hay casos que llegan á degenerar las que se hagan en los extremos de las Quadernas, y sobre la *fd*, en curvas, parte cóncavas, y parte convexâs, lo que es contra las ideas que se llevan, y perjudicialisimo para clavar la tablazon: defectos que los Constructores enmiendan despues con la zuela.

87 Otro error suelen cometer en la descripcion de la línea *bc*F, que la hacen sin reparo á su gusto, dandola la curvidad que les parece mas agradable á la vista: en este dictamen debieramos estar, no habiendo inconveniente; pero siempre que el ángulo *izb*, que forma la *iω*, tirada desde el centro *i* al punto *ω*, en que son tangentes arco y reves, con la *bz*, tangente al arco *bc*F en *b*, fuere agudo, los arcos de algunas de las Quadernas III, VI, &c. cortarán el arco *bω* de la maestra mas abaxo que el punto *ω*, y saliendo mas afuera que en la maestra, no puede salir perfecto el costado. Por este motivo se verá que se describió la curva *bc*F sin aquella suavidad que se le podia dar. Igual defecto puede ofrecerse en Popa, segun la magnitud y disposicion que se diere á las Quadernas, y segun la línea *ban*E que puede ser curva y convexâ hacia arriba: la regla para evitarlo será la misma que se dió para la Proa.

Fig. 14. Fig. 15. Fig. 14. Fig. 15.

88 Quando se tire el reves de la Quaderna XXVII, es preciso tener presente que la curva *vj* ha de rematar en la Roda en el punto *j* sin violencia, pues tal amplitud pudiera darse á la Quaderna en el punto donde la corta la misma curva, que concluyera esta con algun codillo violento.

Fig. 15. y 16.

89 Los Franceses concluyen las mismas obras muertas, siguiendo su méthodo general de division de las maestras. Concluyen la Quaderna maestra continuando la vertical PA, hasta la altura que diere la proyeccion longitudinal, y haciendo AI=AK, que llaman *recogimiento del portalon* de la cantidad determinada que se tubiere, y describiendo dos arcos, uno convexô PL, PO, tangente en P á la PA, y otro cóncavo LI, OK, tangente al primero en I y O. Continuan con igual orden las Quadernas 33 y XXVII, y tirando despues maestras, como LN, IS, TV, OQ, KR, se dividen estas por los triángulos ya construidos, colocandolas en ellos igualmente entre las Quadernas o, 33, y o, XXVII, y trasladando los puntos correspondientes á la proyeccion transversal. Tirando despues curvas por dichos puntos hasta las alturas que diere la proyeccion longitudinal, quedan concluidas las Quadernas.

Lam. 5. Fig. 19. Fig. 23. y 22.

90 Podemos tambien construir las obras muertas siguiendo nuestras reglas geométricas. Se tira la segunda línea del fuerte E*abc*F, si necesaria fuese, y bien seguida, porque no es precisa aqui la atencion que antes se advirtió respecto al error que se comete en la fábrica Inglesa. Las elevaciones de esta línea desde la Quilla se pasan á la proyeccion transversal, colocandolas en las verticales tiradas por todos los puntos de las PGE, PHF, puesto que ambas líneas del fuerte se suponen de las mismas anchuras que produce la línea EGPHF. Quedan con ello terminadas las *ba*E, y *bc*F con sus puntos en la proyeccion transversal, y por

Lam. 6. Fig. 27. Fig. 29.



por ellos se tiran líneas horizontales, como *bi*, *ak*, *nm*: se cortarán estas por una curva *ikm*: y haciendo centros en las intersecciones que dieren, y con las distancias á los puntos *b*, *a*, *n*, &c. se describirán arcos, como *bl*, *ao*, *np*, &c. que darán la continuacion de las Quadernas hasta *lop*: executandose lo propio en la Proa.

91 Se tirará despues la línea del galon *defh*, tanto en el plano longitudinal como en el horizontal, y sus alturas y anchos de Popa se pasarán al transversal: por cuyos puntos, con radios que vayan disminuyendo, segun las ordenadas de una curva, se tirarán círculos como *pdu*, *oer*, *lf* tangentes á los *np*, *ao*, *bl*; cuidando que siempre recojan: y se terminarán las elevaciones por sus correspondientes en el plano longitudinal.

92 Lo mismo se practicará para la Proa; pero cuidando que la cavidad del arco *yh* sea tal, que la *lsj* del plano horizontal remate suavemente en la Roda.

93 La theórica de esto está fundada en los mismos principios dados en la descripcion de los fondos, con que podemos escusar el repetirla. Con ella se evitan enteramente los tropiezos que resultan siguiendo el méthodo Ingles, y los costados se tiran con toda propiedad, siendo el todo de las Quadernas perfectos arcos de círculo, que se describen facilmente; lo que no se consigue por el méthodo Frances.

CAPITULO 7.

De las Cubiertas.

94 EN el Capítulo primero diximos que en lo interior de la Nave se usan diafragmas, que es lo que llaman los Marineros cubiertas, y que estas

sirven como de estrivos para que la fuerza, peso y violencia del agua no fuerce hacia adentro los costados de la Embarcacion, ni tampoco se separen: y que habiendolas distribuido en debida disposicion, sirvan al mismo tiempo como de pisos ó techos para colocar en ellos los varios efectos, la Artillería, y los alojamientos de la gente. El número de ellas es proporcional al buque de la Embarcacion, pues quanto mayor fuere este, mayor es el espacio que se hace preciso apuntalar ó fortificar, y mayor la distribucion y alojamiento que se requiere, como la cantidad de cañones que se deben colocar.

95 Las reglas que en esto siguen los Constructores es, que las cubiertas han de distar unas de otras, á lo menos, lo preciso para que la gente que debe andar sobre ellas, ó entre ellas, lo pueda executar con algun desahogo, y sea practicable el trabajo que en las mismas se hubiere de hacer: que no disten tampoco tanto, que por ello salgan demasiado altas las obras muertas, ó muy *alterosas*, como dicen los Marineros, á fin de evitar que no se eleve mucho el centro de gravedad, y que por ello no sea estable la Nave. En los Navíos de Guerra se coloca la primera ó principal cubierta, sobre la qual se pone la mas gruesa Artillería, con atencion á que sus troneras, que los Marineros llaman *portas*, queden razonablemente elevadas sobre la superficie del Mar, á fin de que esta no se introduzca por ellas en sus agitaciones regulares, y no se malogre el uso de la Artillería: lo ordinario es ponerla en el lugar de la Quaderna maestra, elevada sobre la Quilla entre $\frac{4}{9}$, y media manga del Navío, segun la fábrica de él, pues como ya diximos (§.8.), esto debe proporcionarse con su volumen, á causa de que su flotacion es proporcional á este, y por consiguiente la cubierta quedará mas elevada sobre las aguas, quanto mayor fuere el volumen, sin embargo que su dis-

distancia de la Quilla quede constante.

96 Tambien depende esto de un juicio prudente de los Marineros ó Constructores, porque algunos hay que juzgan ser suficiente en los Navíos grandes el que las portas esten elevadas sobre el agua 5 pies, quando otros no se contentan con 6, y quieren hasta 7: lo cierto es, que siempre que se pueda dar al Navío una bateria elevada, ú *desahogada*, como dicen los Marineros, sin perjuicio de otras propiedades, será una ventaja grande, porque de ordinario las mares se agitan de suerte que saltan por encima de las portas.

97 En fin, de qualquier forma que sea, los Constructores tienen establecida por regla general la altura que debe tener la cubierta sobre la Quilla, que por lo ordinario les ha dictado la misma práctica, ó las lecciones de sus Maestros, sin embarazarse regularmente en si añaden ó quitan algo del volumen del Navío: de que resulta muchas veces, que sus baterias no salgan de la elevacion que desearon; no obstante, las theóricas que hasta hoy se han publicado, han dado luces para que ya se haga atencion por los más expertos Constructores de asunto tan importante, y por tanto tienen en ello mejor acierto.

98 Establecido el punto *b* por aquel en que debe Lam. 4.
colocarse la cubierta en la Quaderna maestra, ya sea á Fig. 14.
la elevacion sobre la Quilla de los $\frac{4}{9}$ ó mitad de la manga, ó ya sea en un medio como á los $\frac{19}{40}$ de ella, parece que ya quedaba determinado todo su sitio, poniendola paralela á la superficie del agua, puesto que igual razon subsiste para que diste lo mismo de esta en toda su longitud; pero la práctica ha acreditado que es forzoso arquearla, ó elevarla mas en sus extremos de Popa y Proa, dandole lo que ya difinimos (§. 15.) por la voz *Arrufo*, á fin de que con esto las aguas que en ella se viertan corran al medio, ó hacia la Quaderna maestra donde se hallan de ordinario los desagues: y tambien

bien para evitar que con el tiempo no se arqueen en contraria disposicion, por baxarse los dichos extremos de Popa y Proa, que los Marineros llaman con razon *quebranto*: lo que es inevitable en las Embarcaciones grandes, como se explicará despues.

99 El Arrufo, ó mayor elevacion que se dá á la cubierta en Popa, es desde $\frac{1}{72}$ á $\frac{1}{36}$ de la Eslora, ó longitud de la Nave, usando de esta medida segun el mayor ó menor volumen que se de á las Quadernas de Popa, respective á las de Proa: pues es bien cierto, que de esta relacion depende el asiento que tomará el Navío en el agua: aumentando el volumen en Popa, no se hace preciso tanto Arrufo; y al contrario si se disminuye. Los Constructores tienen ya determinadas sus medidas segun la práctica les enseñó en las Naves que construyeron, y solo esta es quien les guia. Quando las alteraciones que practican en los Buques son cortas, no se hace sensible la diferencia que puede resultar; pero no han faltado casos en que se ha hecho bien notable. No obstante les queda el recurso de que enmiende la carga lo que no pudo advertir el estudio: pues poniendo mas peso donde haya mayor volumen, se logra que la Nave tome el asiento que se propuso. Tiene esto, sin embargo, el perjuicio grande de que no puede, v.g. pasarse peso de la Popa á la Proa, para que baxe esta, sin elevarse aquella, y por consiguiente que esté mas expuesta al quebranto, como se explicará despues.

100 Los Constructores, no obstante, señalan el punto *d* mas distante de la Quilla que el *b* de la cantidad que su práctica les ha enseñado, ya sea de $\frac{1}{72}$, de $\frac{1}{36}$, ú de qualquiera otra parte media de la longitud de la Eslora: y con iguales principios señalan en la Proa otro, que quando mas se eleva sobre el *b* de $\frac{1}{72}$ de la Eslora. Por estos tres puntos se tira una curva *dbi*, y es la que termina la colocacion ó sitio de la cubierta principal.

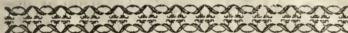
No

101 No solo se da á esta cubierta el arrufo ó arqueo que hemos determinado; se hace igualmente preciso que se encurve tambien segun sus secciones transversales, ó perpendiculares á la Quilla, baxandola en los costados, y dexandola mas elevada en el medio, á fin de que las aguas que en ella se viertan corran á los mismos costados donde se hallan los desaguaderos. Esta curvidad, que los Constructores ó Marineros llaman *Arco ó vuelta de los Baos*, porque este nombre dan á las bigas que forman las cubiertas, debe proporcionarse á la longitud de los Baos, ó ancho de las cudiertas en cada punto de su longitud, á fin que el declive ó pendiente necesaria sea constante; pero tampoco en esta se conforman todos los Constructores: quando mas suelen darle al punto del medio $\frac{1}{48}$ de toda la longitud del Bao de elevacion sobre los puntos de los costados. No obstante los Ingleses dan menos quando la cubierta tiene otra encima, y mas quando está expuesta á que suban sobre ella los golpes de mar: de suerte, que las cubiertas altas tienen mas vuelta que las baxas.

202 Señalado ya el sitio de la cubierta principal ó primera, se señalan los de las segundas y terceras que van sobre aquella, si la Nave fuere de buque suficiente para admitirlas. Lo ordinario es colocarlas paralelas á la primera, y distantes entre sí 5, *6*, 7, y hasta $7\frac{1}{2}$ pies, segun la magnitud de la Nave, y el uso que se debe hacer de su espacio entre cubiertas, que los Marineros llaman *entrepuentes*. En los Navios mayores que montan Artillería gruesa de *36* ó 24 libras de bala, se dan los $7\frac{1}{4}$ pies Ingleses de altura, comprehendiendo en ella el grueso del Bao, siendo está suficiente para el buen desahogo, uso y manejo de la Artillería. En los menores se disminuye á proporcion hasta los $6\frac{3}{4}$ pies, que se hacen precisos siempre que hubiere de ponerse Artillería entre las dos cubiertas. No habien-

biendo de colocarse esta, puede ser menor la altura de entrecubiertas, y disminuir en proporcion hasta los 5 pies, que es lo menos que se le puede dar para que la gente pueda marchar por él baxandose, ó estando sentada. Suele ponerse tambien otra mas baxa que la primera, que llaman *sollado*, particularmente en Navíos grandes, pues quedando tanta distancia ó buque desde aquella hasta la Quilla, no tubieran firmeza ninguna los costados en aquel espacio.

103 A mas de estas se suele poner otra media cubierta, que va mas alta que todas, y desde Popa hasta la mitad de la Nave, que llaman los Marineros *Alcázar*: y otras aun menores, una que va sobre el Alcázar, y se estiende desde Popa hasta la mitad de aquella, que llaman *Toldilla*, y otra que á igual altura que el Alcázar, va en Proa, y se llama *Castillo*; pero sobre ninguna de estas se ofrece que advertir, segun lo ya dicho, y lo que nos proponemos. Solo diremos que el paralelismo de las cubiertas no lo estilan todos los Constructores: los Franceses dan algo mayor la altura del entrepuentes en Popa, y en general la distancia entre todas las cubiertas. Por lo que toca á la primera tienen el motivo de dar algun desahogo al juego de la *Caña del Timon*, que es el Palo con que se sujeta y govierna aquel; pero resulta mayor arrufo, que tambien es perjudicial. Lo mas cierto es, que no han hallado aun modo de colocar dicha caña sin perjuicio de las piezas de madera que sujetan la Popa, particularmente de una que llaman la *Cruz*, y va sobre el extremo del Codaste. Los Ingleses remedian esto encorvando en el medio dicha pieza hacia abaxo. En quanto á las demas individualidades y atenciones que se deben tener en la fábrica de las cubiertas, nos remitimos á los Tratados Prácticos, porque son dilatados, y fuera del asunto que nos hemos propuesto.



LIBRO SEGUNDO.

Examen del cuerpo del Navío, de sus centros, y de las fuerzas, resistencias, y momentos que padece.

CAPITULO PRIMERO.

De la flotacion del Navío, de su línea de agua, de su peso total, y del de su casco.

104 LOs Constructores con la continuada práctica de tantos años, y con la tradicion que de unos á otros ha pasado, saben ya con corta diferencia la línea de agua en que debe quedar su Navío, y la disposicion en que se ha de establecer. Supuesto que por muchas tentativas y experiencias se haya hallado la disposicion mas ventajosa de flotar un Navío, no hay tropiezo en fixar la misma para otro enteramente semejante, y de igual peso y magnitud al primero. Esta es la regla que les ha conducido hasta poco tiempo á esta parte: y efectivamente, sino se variaran las medidas, ni el peso de maderas, y otros materiales, no hay duda en que sería acertadisima la regla; pero de ordinario se practican estas variaciones, y por ellas queda incierto el estado y disposicion que convendrá dar á la Embarcacion.

105 Los Constructores que ya tienen alguna especulacion, se valen de los principios de Hydrostática, á lo menos para determinar el volumen que debe ocupar su Navío dentro del fluido. Ya demonstramos

(*Prop.7. Lib.2. Tom.1.*) que el volumen que un cuerpo debe ocupar en el fluido para quedar sobre él en reposo, es igual al volumen del fluido, cuyo peso sea igual al del cuerpo flotante. De esta proposicion se infiere conseqüentemente, que sabido el peso de todas las partes que componen el Navío, como son Maderas, Herrages, Xarcias, Anclas, Artillería, Víveres, Tripulacion, &c. se puede saber quantos pies cúbicos de agua del Mar pesan lo mismo que la suma total, é igual número de pies cúbicos deberá tener el Navío sumergidos en el agua. No se hace imposible determinar el peso total de los Navíos, ú del Navío que se quisiere fabricar: el cálculo es algo penoso; y expuesto á errores; pero no es sino material; y una vez averiguado lo queda para siempre.

106 El cálculo del volumen de fluido que desocupa el cuerpo del Navío, para un Geómetra, ninguna dificultad tiene. Todo él se puede considerar dividido en Prismas por planos verticales y horizontales, cuyo volumen medido por las reglas comunes de Geometría, dan el volumen total del cuerpo; del qual se puede despues cortar la parte que debe quedar sumergida. En esta práctica lo unico de que se ha de cuidar es de que los Prismas sean pequeños, para que sus lados exteriores, que son los mismos del Navío, sean sensiblemente planos; pues necesitandose para la facilidad del cálculo en sus medidas que se supongan asi, se hace preciso que lo sean, para que no se padezca tampoco error sensible. Un corto exâmen de Geometría facilita mucho la operacion. Que sea AMNOC la proyeccion longitudinal del Navío, y la recta ABC la línea del agua hasta donde con corta diferencia se debe sumergir. Divídase la altura Bo en la Quaderna maestra en un numero de partes iguales, v.g. en cinco, que es suficiente para el uso comun, y por las divisiones B, E, H, K, N, tírense á la ABC las paralelas

Lam. 7.

DEF,

DEF, GHI, JKL, MNO, que representarán otros tantos planos, ó secciones horizontales, en que se supone cortado el cuerpo del Navío. Trasládense todos los puntos en que estos planos cortan las Quadernas, á la proyeccion transversal, para tirar por ellos la línea curva que represente aquellos. Trasládense los de esta proyeccion á la horizontal, y por ellos tírense las curvas ABC, DEF, GHI, JKL, MNO, que terminarán ú darán la verdadera representacion y medida de dichos planos. Tómense ahora en estos los anchos de las Quadernas o, III, VI, &c. y o, 3, 6, &c. como otras tantas ordenadas á las curvas: y respecto que el area comprehendida entre dos de ellas es igual á la suma de estas, multiplicada por la mitad de su distancia, si á esta llamamos d, tendremos $(o+III)\frac{1}{2}d$ por el area comprehendida entre las Quadernas o y III: $(III+VI)\frac{1}{2}d$ por la comprehendida entre la III y la VI, y asi de las demas: con esto el area ó plano comprehendido entre las Quadernas o y XXVII, será $= (o+III)\frac{1}{2}d+(III+VI)\frac{1}{2}d+(VI+IX)\frac{1}{2}d+(IX+XII)\frac{1}{2}d+(XII+XV)\frac{1}{2}d+(XV+XVIII)\frac{1}{2}d+(XVIII+XXI)\frac{1}{2}d+(XXI+XXIV)\frac{1}{2}d+(XXIV+XXVII)\frac{1}{2}d$, y reduciendo $=$ - - - - - - - - - - $(\frac{1}{2}o+III+VI+IX+XII+XV+XVIII+XXI+XXIV+\frac{1}{2}XXVII)d$: de suerte, que el area ó plano comprehendido entre la Quaderna maestra, y la última extrema de Proa ó Popa, es igual á la suma de todas las intermedias con la mitad de las extremas, multiplicada por la distancia comun entre ellas: es la regla que tambien dió *Mr. Bouguer* en su *Tratado del Navío*. Para obtener despues el todo de las areas, no es necesario sino añadir á cada una los espacios que quedan entre las Quadernas extremas y la Roda ó Codaste, que se reduce á un pequeño triángulo igual al producto de la amplitud de la Quaderna, por la mitad de la distancia desde ella al punto donde la curva se junta con la Roda ó Codaste: v.g. en la curva ABC $=$ XXVII$\cdot\frac{1}{2}$(XXVIIC), y asi

 de

de las demas. Solo se tendrá cuidado de substraher de cada una de las areas el espacio que ocupan las dos líneas inmediatas que representan la Quaderna maestra, porque resulta duplicado en la regla que se dió.

107 Teniendo con esto la medida de las secciones en que se cortó el plano longitudinal, se pasa á medir los sólidos ó volumenes que encierran: cada uno de ellos, asi como en los planos, es igual á la suma de dos secciones multiplicada por la mitad de la distancia entre ellas. En cada prisma se puede suponer que hay dos lados paralelos, que serán las dos secciones horizontales. Supónganse estas dos rectángulos, cuyos lados sean a y e, b y f, siendo $b > a$, y $f > e$: con esto un rectangulo medio entre los dos, distante del menor ae la cantidad x, será $\left(a+\frac{b-a}{d}x\right)\left(e+\frac{f-e}{d}x\right)=$

$ae+\frac{a}{d}(f-e)x+\frac{e}{d}(b-a)x+\frac{x^2}{d^2}(f-e)(b-a)$, ó la diferencial

del prisma $= aedx+\frac{a}{d}(f-e)xdx+\frac{e}{d}(b-a)xdx+$ - - -

$\frac{x^2dx}{d^2}(f-e)(b-a)$: cuyo integral, poniendo $x=d$, es $aed+\frac{1}{2}ad(f-e)+\frac{1}{2}ed(b-a)+\frac{1}{3}d(f-e)(b-a)=$ - - - $\frac{1}{3}aed+\frac{1}{6}afd+\frac{1}{6}bed+\frac{1}{3}bfd=\frac{1}{6}ad(f+2e)+\frac{1}{6}bd(2f+e)$. Suponiendo ahora $e=f$, se reduce á $\frac{1}{2}d(ae+bf)$, que es en lo que fundamos el cálculo, como igualmente lo fundó *Mr. Bouguer*. La suposicion de $e=f$ no encierra error sensible, visto que son con corta diferencia iguales las longitudes de las dos secciones horizontales: y asi el sólido comprehendido entre la seccion ABC, y la DEF, es igual á $(ABC+DEF)\cdot\frac{1}{2}d$, expresando ahora d la distancia BE: del mismo modo el sólido comprehendido entre la seccion DEF, y la GHI, es igual á $(DEF+GHI)\frac{1}{2}d$, y asi de las demás: luego el sólido ó volumen de todo el Navío, será = - - -

(ABC

$(ABC+DEF)\frac{1}{2}d+(DEF+GHI)\frac{1}{2}d+(GHI+JKL)\frac{1}{2}d+(JKL+MNO)\frac{1}{2}d+(MNO+Q)\frac{1}{2}d = \frac{1}{2}(ABC)+DEF+GHI+JKL+MNO+\frac{1}{2}Q)d$, expresando Q el area superficial de la Quilla: de suerte que el volumen del Navío será igual á la suma de todas las secciones intermedias con la mitad de las extremas, multiplicada por la distancia comun entre ellas. A esto es necesario añadir el volumen de la tablazon, Quilla, Roda, Codaste, Timon, y Taxamar, con lo que se tendrá el volumen total de toda la parte del Navío que se supone sumergida hasta la línea del agua ABC.

108 Adviertase que la Quilla no es paralela á la línea MNO, lo que se supone en el méthodo del cálculo que se ha llevado; pero despues de compensadas las diferencias en mas y menos que hubiera, llevandose un computo justificado, quedan las resultas despreciables, y por tanto se ha seguido la regla generalmente. El exemplo siguiente manifestará el méthodo en que se puede llevar el cálculo sin confusion.

Cál-

Cálculo del volumen de fluido que ocupa un Navio de 42 pies Ingleses de Manga.

Líneas de agua de Popa.

Quadernas.	1ª.		2ª.		3ª.		4ª.		5ª.		
	P.	P.	P.	P.	P.	P.	P.	P.	P.	P.	
0	10	06	10	05	9	11	9	0	7	4	
3	20	11	20	10	19	10	17	11	14	8	
6	20	10	20	8	19	8	17	8	14	2	
9	20	8	20	5	19	4	17	1	13	4	
12	20	5	20	1	18	10	16	4	12	0	
15	20	1	19	8	18	2	15	4	10	1	
18	19	8	18	11	17	3	13	9	7	5	
21	19	2	18	1	15	7	11	1	5	2	
24	18	1	16	7	13	4	8	0	3	8	
27	16	5	14	2	9	8	5	5	2	6	
30	13	10	10	2	5	10	3	0	1	4	
33	4	5	2	3	1		0	5	0	2	
	205	0	192	3	168	5	135	0	91	10	Sumas.
	7	2	7	2	7	2	7	2	7	2	Distancia entre Quadernas.
	1435		1344		1176		945		637		Producto.
	24		32		28		22		15		Producto.
	0		2		3		0		6		Producto.
	18		9		4		2		1		Valor de los triángulos extremos.
	1487		1387		1211		969		659		Medias areas de las líneas de agua.

Lí-

Líneas de agua de Proa.

Quadernas.

	1.ª		2.ª		3.ª		4.ª		5.ª		
	P.	P.	P.	P.	P.	P.	P.	P.	P.	P.	
0	10	06	10	05	9	11	9	0	5	4	
III	20	11	20	10	19	11	17	11	14	7	
VI	20	11	20	8	19	7	17	6	13	8	
IX	20	10	20	8	19	2	16	9	12	4	
XII	20	9	20	4	18	6	15	10	10	2	
XV	20	4	19	8	17	7	14	5	7	7	
XVIII	19	3	18	1	15	9	11	6	4	10	
XXI	17	0	15	3	11	10	7	2	1	1	
XXIV	12	8	9	6	2	10	1	0			
XXVII	2	5	1	0							
	165	7	156	5	135	1	111	1	71	7	Sumas.
	7	2	7	2	7	2	7	2	7	2	Distancia entre Quadernas.
	1155		1092		945		777		497		Productos.
	28		26		23		19		12		Productos.
	4		3		0		0		4		Productos.
	6		2		16		2		2		Valor de los triangulos extremos.
	1193		1123		984		798		515		Medias areas de Proa.
	1487		1387		1211		969		659		Medias areas de Popa.
	2680		2510		2195		1767		1174		Medias areas totales.
	24		24		23		21		17		Espacio de la Quaderna maestra.
	2656		2486		2172		1746		1157		Medias areas restantes.
	2		2		2		2		2		
	5312		4972		4344		3492		2314		Areas de ambos lados.

2656	Medio espacio de la 1ª línea de agua.
4972	Espacio de la 2ª.
4344	3ª.
3492	4ª.
2314	5ª.
100	Medio espacio de la Quilla.
17878	
$3\frac{1}{2}$	Distancia entre las líneas de agua.
53634	
8939	
62573	Volumen del Buque.
2800	De la Tablonería.
400	De la Quilla.
72	De la Roda.
63	Del Codaste.
72	Del Taxamar.
84	Del Timon.
66064	Volumen total de Navío.

109 Averiguados los pies cúbicos que debe sumergirse el Navío, se multiplicarán por $1019\frac{2}{3}$, que son las onzas Castellanas que pesa cada uno siendo de agua del mar, y se tendrá el peso que debe tener todo el Navío armado, provisionado y equipado, para que quede en la línea de agua ABC. (*a*)

Si

(*a*) El peso de un pie cúbico Frances de agua del Mar lo hallé, por mis experiencias hechas en el *Calldo*, de $77\frac{11}{32}$ libras Castellanas. El pie Frances es al Ingles como 16 á 15, y sus cubos como 4096 á 3375: luego $4096 : 3375 = 77\frac{11}{32} : 63\frac{2987}{4096}$. Pesará, pues, el pie cúbico Ingles de de agua del Mar 63 libras $11\frac{2736}{4096}$ onzas Castellanas.

Segun las *Lecciones Physicas de Cotes*, es tambien el peso de un pie cúbico Ingles de agua del Mar de 1030 onzas *Averdupois*, ú de $64\frac{3}{8}$ libras.

La

110 Si el peso del Navío fuere algo mayor ó menor que este, y se quisiere saber, con el mismo peso, qual será su verdadera línea de agua, no hay mas que convertir el exceso ú diferencia de un peso á otro en pies cúbicos de volumen, partiendola por $1019\frac{2}{3}$, que son las onzas que pesa cada uno: y despues los mismos pies cúbicos que resultaren, volviendolos á partir por el area ó seccion de la línea del agua ABC, pues la resulta será lo que esta línea debe estar mas ó ménos elevada. Fundase la regla en que el Navío debe sumergirse mas ó menos, y ocupar un nuevo volumen igual al del fluido, cuyo peso sea la diferencia; pero este volumen es el que encierra la seccion ó area de la línea del agua ABC por la altura que se sumergiere el Navío, por suponerse que esta sea muy corta: luego partiendo el volumen por el area, vendrá al quociente la altura. En el exemplo dado el volumen que el Navío sumergiera en el fluido, supuesto que llegase á la línea ABC, es de 66064 pies cúbicos: multiplicando estos por $1019\frac{2}{3}$, resultan 67263259 onzas de peso. Demós que el Navío hubiese de pesar 70000000: la diferencia será 2736741, que partida por $1019\frac{2}{3}$, resultan 2684 pies cúbicos á que corresponde: partiendo estos por 5312, que es el valor en pies quadrados de la seccion ó area ABC, vienen al quociente 6 pulgadas poco mas, que es la altura á que quedará la línea de agua verdadera mas alta que la ABC.

111 Si no conviniere que esta línea se altere, ya por-

La libra Castellana será, pues, á la de *Averdupois* como 10072 á 10000 ó proximamente como 140 á 139.

La libra de *Averdupois* es á la de *Paris*, segun el mismo *Cotes*, como 63 á 68, ó proximamente como 139 á 150: luego la libra Castellana es á la de *Paris* proximamente como 14 á 15.

Con esto las medidas que se dieren en libras Castellanas, podrán convertirse á libras Francesas ó Inglesas.

El peso de un pie cúbico Frances de agua del Mar en libras Francesas será, por consiguiente, de 72 libras y 3 onzas de *Francia*.

el pie cubico español valuado en libras españolas, pesa los dos tercios, mas un ciento veinte y quatro-ava, de lo que pesa el pie cubico frances valuado en libras francesas. y la libra francesa es mayor en $7\frac{1}{7}$ p.o que la castellana.

porque de executarlo quedará la batería de cañones demasiado baxa ó alta, será preciso ocurrir á alterar el Navío, dandole menos ó mas volumen, hasta que el que resultare convenga con el peso total que deba tener. Esta alteracion se puede conseguir de varios modos, ya sea dando mas ó menos llenos á las Quadernas, ó ya sea aumentando ú disminuyendo alguna de las medidas del Navío, ó todas juntas. Pero supuesto que se les haya dado á las Quadernas la figura mas perfecta, se procurará aumentar ú disminuir el Navío en todas sus partes proporcionalmente: lo que se puede conseguir con mucha justificacion. Si expresare v el volumen hallado por el cálculo, V el que se quiere que tenga el Navío, m la manga correspondiente al volumen v, y x la correspondiente al V, será por la semejanza que han de tener los Navíos $v : V = m^3 : x^3$; lo que da $x = \frac{mV^{\frac{1}{3}}}{v^{\frac{1}{3}}}$: de suerte, que el producto de la raiz cúbica del volumen que se quisiere tenga el Navío por la manga de aquel de quien se deduxo el cálculo, partido por la raiz cúbica del volumen hallado por el mismo cálculo, dará al quociente la manga del nuevo Navío, que tendrá el volumen V que se desea. En el mismo exemplo precedente, si en lugar de contener el Navío debaxo del fluido 66064 pies cúbicos, se quisiere que tenga 72000, será $= \frac{42.(72000)^{\frac{1}{3}}}{(66064)^{\frac{1}{3}}} =$ $43\frac{1}{4}$ pies, valor de la manga que le corresponde. En este cálculo se supone que todas las partes del Navío aumenten proporcionalmente; pero aunque asi no fuese, no siendo grande la alteracion, el error siempre sería despreciable: pues aunque se yerre el cálculo en 1000 pies cúbicos, habiendose de partir estos por 5312, que es el area, ó seccion de la línea de agua, no re-

resultará sino $\frac{1000}{5312}$ de pie ú 2 pulgadas de error en la altura de la línea del agua; lo que se hace despreciable.

112 El cálculo material del peso que tiene un Navío de Guerra determinado por el de todas sus partes, como diximos antes, se hace dilatado y expuesto á error: para los Constructores es mucho mas facil exâminar, por alguno de los planos que tubieren de Navíos puestos en práctica, el volumen que hubieren desocupado; pues habiendo de ser el mismo para todos los de su clase, servirá de fundamento para los que en adelante construyeren. Exâminando el volumen que ocupan debaxo del fluido los Navíos y Fragatas del Rey construidos al méthodo Ingles, se halla, que el Navío de 70, con 48 pies de manga, desocupa 96500 pies: el de 60, con 42 pies de manga, 68650: la Fragata de 26 cañones de á 12, con 33 pies de manga, 34782: la Fragata de 22 Cañones de á 8, con $31\frac{1}{3}$ pies de manga, 25170: un Pacabote de 18 Cañones de á 6, con 26 pies de manga, 15740: y otro Pacabote de 16 Cañones de á 4, con 25 pies de manga, 11770. Multiplíquense estos pies cúbicos de volumen por $1019\frac{1}{3}$, que son las onzas Castellanas que pesa cada uno, siendo de agua del Mar, y partiendo el producto por 1600 onzas que contiene un quintal, tendremos, que el Navío de 70 pesará 61499 quintales: el de 60, 43750: la Fragata de 26, 22166: la de 22, 16040: el Pacabote de 18, 10031; y el de 16, 7511.

113 Si estos Navíos fueran semejantes, y de medidas proporcionales en un todo, sus volúmenes y pesos, habian de ser como los cubos de sus mangas: en este caso, tomando como base el Navío de 60, correspondian al de 70 65306 quintales de peso, cuya cantidad excede á la deducida por experiencia en 3807 quintales. De este exemplo se deduce, que á

medida que los Navíos son mayores, sus volumenes y pesos tienen menor razon que los cubos de sus mangas. Este hecho depende, no solo de que, contra toda razon fundamental, suelen algunos Constructores dar menores gruesos en proporcion á las maderas y herrages de los Navíos grandes, sino tambien de que estos necesitan, asimismo en proporcion, menores elevaciones de puentes y cámaras, y por consiguiente, menores elevaciones del todo del Navío. El de 60 tiene 6 pies $10\frac{1}{2}$ pulgadas de altura en el entrepuentes: á proporcion correspondian al de 70, 7 pies 10 pulgadas, y solo tiene 7 pies 1 pulgada. Las 4.as ligazones del Navío de 60 tienen $12\frac{1}{2}$ pulgadas de ancho: á proporcion correspondian al de 70, $14\frac{2}{7}$; y solo tiene $13\frac{1}{2}$. Es verdad que esto lo compensan, aunque en poco, dando á proporcion menor distancia entre las Quadernas en los Navíos grandes; pero solo cabe esto en las ligazones: las demas maderas siempre quedan sin compensacion. Los Baos de la 1.a cubierta en el Navío de 60 tienen $15\frac{3}{4}$ pulgadas de ancho: correspondian al de 70, 18, y solo tiene $17\frac{5}{8}$: añadiendose á esto, que con el mismo grueso de tabla se entablan de ordinario ambos Navíos. Es una práctica usada sin reflexîon, pues si nos acordamos de lo qué diximos de las Palancas (*Cor.* 15. 16. *y* 17. *Def.* 33. *Lib.* 1. *Tom.* 1.) la resistencia de las maderas es como los cubos de sus diámetros, y los momentos que sobre ellas se exercitan, por ser los pesos como los cubos de las mangas, son como los quadrados-quadrados, ó los momentos de inercia como las quintas potestades, por cuyo motivo á dimensiones proporcionales, menos resiste el Navío grande que el chico, y por consiguiente mayores gruesos necesitaba en sus maderas: todo al contrario de lo que practican los tales Constructores. Si representa g el grueso de las Quadernas, a su ancho, n el número de ellas, y m la manga del Navío, habria de ser general-

mente en todos constante la expresion $\frac{ng^2 a}{m^5}$ para que que sean igualmente fuertes : y asi se ve , que aunque los gruesos g , los anchos a , y el número de Quadernas n , fueran como las dimensiones lineares ó mangas m, siempre quedaría la expresion en $\frac{1}{m}$: lo que manifiesta, que aun en este caso quedarían las Fragatas mas fuertes ; y esto , con todo que llevaran mucha menos madera, en razon inversa de las mismas mangas : añadiendose , que por lo ordinario no hacen los Constructores, n sino como $m^{\frac{2}{3}}$, lo que reduce la expresion á $\frac{1}{m^{\frac{4}{3}}}$. Esta theórica la comprueba diariamente la experiencia : no se ve de continuo sino Navíos grandes desbaratados , descoyuntados y rotos , quando las Fragatas se mantienen firmes y sin el menor quebranto. Las maderas de aquellos son, pues, endebles , y las de estas pueden ser demasiado robustas. Si las Embarcaciones medias , como por exemplo de unos 40 pies de manga , se ha observado que tienen bastante fortaleza , no es necesario que las menores tengan á proporcion mayores gruesos de maderas ; antes pueden tener menos , sin riesgo de que sean menos fuertes : y al contrario los Navíos será preciso que las tengan mas gruesas , y con todo jamas se podrá adquirir igual fortaleza , sin riesgo de que ocupen despues demasiado buque en el fluido , y resulten defectos grandes. Debe por consiguiente considerarseles algun aumento ; pero sea con mucha medida , pues sola $\frac{1}{2}$ pulgada de aumento en los gruesos por cada 12 , ó 1 pulgada por cada 24 que tenga un palo , aumenta el peso proxîmamente en la razon de 12 á 13, por haber de ser como los quadrados de las dimensiones lineares : con que si el buque pesa 37100 quintales , como proxîmamente

pesa

pesa el del Navío de 70, como se verá mas adelante, aquel solo aumento de grueso le dará 3090 quintales de mas peso, que le harán baxar la batería 8 pulgadas, y perder muchísimo de su andar.

114 En nuestros Navíos Españoles, construidos por *Gastañeta*, las Quadernas iban tan unidas como á la Inglesa; pero las uniones ó empalmes de unas piezas con otras eran menores, lo que disminuía cada pieza de pie y medio ú dos pies en su largo, que importaba en todo al rededor de 1000 quintales de peso que se le quitaban al Navío: siempre era alivio; pero obra falsa, como saben los buenos Constructores.

115 Los Franceses dan mayor distancia entre las Quadernas, no ponen tampoco tanta curveria, de suerte que un Navío de 70 cañones con 46 pies Ingleses de manga solo ocupó 90260, que equivalen á 57522 quintales de peso. Este Navío tenia la misma Eslora y Puntal que el otro que citamos construido á la Inglesa, con que los pesos de sus buques han de ser como las mangas; esto es, como 48 á 46: si el buque de aquel es de 37100 quintales, el de este debia ser de solos 1546 quintales menos, en lugar de 3977 que se halló en el todo de sus pesos: luego la diferencia 2431 procede de la menos cantidad de maderas y herrages que llevó el Navío Frances: añadiendo á esto algo mas por la mayor cantidad de lastre que estos Navíos necesitan. La distancia entre Quadernas era mayor de 4 pulgadas, lo que hacia que cupiesen en todo el Navío 8 Quadernas menos, cuyo peso es, con corta diferencia, de 1030 quintales, que rebaxados de los 2431, ya no quedan sino 1401, que procederán de la menos curvería, y otras piezas menos que se ponen á la Francesa.

116 De todo esto resulta, que aun teniendo el peso de los Navíos por experiencia ó cálculo del agua que ocupan, no todos los de igual clase pesarán lo mis-

mismo: es preciso atender á su fábrica, peso y calidad de materiales; pero que siempre que se cuide de hacer las correcciones correspondientes á las diferencias que hubiere, se puede llegar á conocer con bastante proximidad el peso y volumen del Navío que se quiere fabricar.

117 Si en los Navíos fabricados á la Inglesa no hubiere mas diferencias que las precisas de las alturas de los Puentes, y la corta que hemos notado de gruesos de maderas: si en todo lo demas estubieren arreglados á la proporcion de sus Mangas, los buques que ocuparán dentro del fluido serán.

El Navío de 80 Cañones	con 51 pies de Manga	111.500 pies.
70	48	96.500
64	45	81.400
60	42	68.650
54	40	60.900

118 Del Navío de 80 Cañones suele hacerse uno de 100, añadiendole segundo entrepuentes: este pesa, con corta diferencia, 4200 quintales, á los que añadiendo 6475 quintales mas por el aumento de Artillería, sus pertrechos, mas gente, mas viveres, y 3000 quintales mas de lastre, serán 10.675 quintales que el Navío de 100 Cañones pesará mas que el de 80. Estos equivalen á 16793 pies cúbicos de volumen: luego el que ocupará el Navío de tres puentes será de 128293 pies. Este Navío fabricado por el Gálibo del de 80, tendrá 30 pulgadas mas baxa que este la batería: de suerte, que solo le quedará en $4\frac{1}{2}$ pies; lo que demuestra la necesidad de aumentar el volúmen de los Gálibos del Navío de tres puentes: y por consiguiente, que nunca será este de tan buenas propiedades como el de 80.

119 Al Navío de 54 Cañones tampoco le quedarán mas que $4\frac{1}{2}$ pies de altura en la batería: y asi para

dar-

darsela mas elevada fuera preciso aliviarle en el número y grueso de maderas.

120 Con las mismas reglas se puede deducir el volumen que deben ocupar las Fragatas. El cubo de 48, manga del Navío de 70 Cañones, es al cubo de de $31\frac{2}{3}$, manga de la Fragata de 22, como 96500 pies de volumen que ocupa el Navío, á 27708 que debiera ocupar la Fragata, siendo en todo semejante á aquel. La Fragata tenia su entrepuentes; pero no habiendo de llevar Artillería en él, estaba rebaxado, y la altura de toda ella, desde la Quilla hasta la Borda, era proporcionada con la del Navío: de suerte que por este motivo no habia correccion que hacer. La faltaba á la Fragata el Sollado y la Toldilla, y por motivo de distar las Quadernas unas de otras 26 pulgadas, en lugar de 20 que la correspondian, llevando la proporcion del Navío, la faltaban 16 Quadernas: y á mas de esto, el peso de la Artillería en la debida proporcion, habia de ser de 1000 quintales, y solo era de 550. El peso del Sollado fuera de 1140 quintales: el de la Toldilla, con dos trozos de costado, 170: el de las 16 Quadernas 740: y el de la Artillería, Balas, Cureñas y demas utensilios 880. El todo es 2930 quintales, que equivalen á 4597 pies cúbicos de volumen: restados estos de los 27708, quedan 23111; 2059 pies cúbicos menos que lo que la experiencia dió que resultan del mayor grueso que se les dió á las maderas.

121 El cubo de $31\frac{2}{3}$, manga de la Fragata de 22 Cañones, es al cubo de 25, manga del Pacabote de 16, como 25170 pies de volumen que ocupó la Fragata, á 12385 que debió ocupar el Pacabote: de lo que, rebaxando 300 que corresponden á 6 Quadernas que llevaba menos por motivo de lo mas distantes que iban segun la proporcion de los dos Buques, quedan 12085, solo 15 pies mas que lo que dió la experiencia, de donde se deduce, que este Pacabote estubo á

pro-

proporcion menos sobrecargado de maderas que la Fragata.

122 Sin embargo de esta justificacion, resultan algunas veces diferencias considerables. Los Capitanes, ó los Contramaestres ponen el lastre sin mucha regla: el que es mas tímido carga mas la mano: de suerte, que 200 quintales mas ó menos en un Buque pequeño, ó 1500 en otro grande no les es de consideracion. Esta diferencia se nota en la Fragata de 16 Cañones de á 12: el cubo de $31\frac{2}{3}$, manga de la de 22, es al cubo de 33, manga de la de 26, como 25170 pies de volumen que ocupó la primera, á 28447 que debió ocupar la segunda; pero por tener esta Fragata 5 pies de eslora mas que los que la correspondian, guardada la general proporcion, se deben aumentar 1138 pies, y sería el volumen que debió ocupar de 29585 pies cúbicos. A mas de esto, guardada la proporcion de los cubos, la Artillería no debia pesar sino 620 quintales, y pesó 910, 290 mas que lo regular, que con otros 130, correspondientes á los pertrechos, hacen 420 quintales. Estos corresponden á 660 pies cúbicos de volumen: y agregados á los 29585, será el que debió ocupar la Fragata de 30245 pies; pero por la experiencia fueron los que ocupó 34782: luego ocupó 4537 pies mas de lo necesario, que equivalen á 2890 quintales: de donde se infiere lo sobrecargada de lastre que navegaron la Fragata. Debe no obstante confesarse, que para parte de ello sobrava razon, porque los 290 quintales de mas peso en solo la Artillería, con lo demas de los pertrechos, elevaban el centro de gravedad, y era preciso, para la seguridad debida, baxarle por medio del aumento de lastre, aunque siempre fue excesivo el que se puso. Lo mismo se deduxera haciendo el cálculo sobre el Pacabote de 18 Cañones.

123 De esto resulta, que ni aun por calcular el

peso de todas las partes de que se compone el Navío, se tendrá segura su línea de flotacion ó volumen que debe ocupar dentro del fluido, porque esto depende del lastre que se ponga, y este de la situacion del centro de gravedad; pero asegurados de esta, la regla se hace tan justificada y general como se ha visto. Estos errores suelen tambien depender de no dar á las Embarcaciones la magnitud correspondiente. Para que todo resulte con la debida proporcion, pesando 550 quintales la Artillería de la Fragata de 22 Cañones, y 910 la Artillería de la de 26, debia ser 31 $\frac{2}{3}$, manga de la primera, á la manga de la segunda, como la raiz cúbica de 550, á la raiz cúbica de 910: debia, pues, ser la manga de esta de 37 pies, en lugar de 33. El volumen que ocupará en tal caso esta Fragata sería de 37540 pies cúbicos.

124 Todas las partes de los Buques deben reglarse sobre la misma proporcion, para que los volúmenes lo estén tambien: y en efecto la práctica manifiesta que lo están con corta diferencia, á excepcion de muy cortos errores que se cometen por ignorancia ó inadvertencia: solo podrán los Constructores apartarse de estas reglas por motivos justificados, como será el querer hacer una Embarcacion de mas carga, de mas resistencia, ú de mas andar: y en tal caso se atenderá á las alteraciones que se hicieren, para que hecho el cálculo del peso mayor ó menor que resulte, se dé tambien de mas ó menos al volumen.

125 Lo mas particular que se ofrece de este exâmen es, que hasta las Tripulaciones no se alexan de ser tambien como los cubos de las mangas. Vease la dotacion de las siguientes arreglada á dichos cubos, que no se aparta de lo establecido en la práctica.

Na-

Navíos de	Mangas	Hombres
80	51	717
70	48	590
64	45	493
60	42	401
54	40	346
26	37	273
22	31 $\frac{2}{3}$	178
18	26	95
16	25	84

Pero bien entendido que la Artillería tambien ha de estar arreglada, pues sobrecargando de esta á los Navíos tambien es preciso aumentarles las Tripulaciones. Siguiendo aquellas y estas la regla, igualmente la seguirán los Viveres, y por consiguiente el todo del Navío.

126 Del mismo modo que se calcula el volumen de fluido que desocupa el Navío estando calado hasta el termino de poder navegar, se calcula tambien el volumen que desocupa estando bacío ó solo su casco, como se tiene acabado de botar al Mar: y por consiguiente se infiere su peso. El volumen que ocupó en este estado el Navío de 70 Cañones, con 48 pies de manga, fue de 58222 pies cúbicos. El del Navío de 60, con 42 pies de manga, 42705. El de la Fragata de 26 Cañones 16380: el de la de 22 Cañones de 16693.

127 Estos volúmenes, estando proporcionadas las maderas y herrages de las Embarcaciones, deben ser como los cubos de sus mangas. El cubo de 48, manga del Navío de 70, será, pues, al cubo de 42, manga del de 60, como 58222, volúmen que ocupó el primero, á 39004, volúmen que debió ocupar el segundo; pero ocupó 42705, 3701 mas: luego resultan estos no solo por la mayor altura del entrepuentes que á proporcion tenia el Navío de 60 Cañones, sino particu-

larmente por el mayor grueso de maderas que sin necesidad se dió á este. De la misma manera, el cubo de 48, manga del Navío de 70, será al cubo de $31\frac{2}{3}$, manga de la Fragata de 22, como 58222, volúmen que ocupó aquel, á 16693, volúmen que debió ocupar esta: que se reduce á 13477, rebaxando 3216 pies cúbicos que corresponden á 2050 quintales que pesaron, y se substraxeron (§.120.) por razon del Sollado, Toldilla y Quadernas que llevaba de menos la Fragata; pero esta ocupó 16490 pies cúbicos de volúmen: luego la diferencia 3013 fueron de exceso por causa del mayor grueso que sin necesidad se les dió á las maderas. Este exceso solo se halló (§.120.) de 2059: luego la diferencia 954 procedió de 608 quintales de lastre menos que la Fragata llevó á proporcion del que llevó el Navío, quedando efectivos los 3013 pies cúbicos por el exceso de grueso en las maderas, que equivalen á 1920 quintales de peso.

128 Aun la Fragata de 26 que efectivamente pesó á proporcion menos que la de 22, contra toda buena regla, se halla en algo sobrecargada de madera. El cubo de 48, manga del Navío de 70, es al cubo de 33, manga de la Fragata de 26, como 58222, volúmen que ocupó el casco de aquel, á 18867: á que agregando 755, por razon de los 5 pies que tenia la Fragata de mas Eslora que la regular, hacen 19622: y substrayendo 3780, por razon del Sollado, Toldilla y Quadernas que tenia de menos, quedará por el volúmen que debió ocupar 15842; de suerte que aun ocupó 538 pies mas de lo que debia.

129 No parece que pudo jamas ser el ánimo de un mismo Constructor dar mas gruesos de madera á la Fragata de 22 que á la de 26: el error procede de los descuidos en la práctica de los Astilleros, pues varias veces he medido las Quadernas de dos Navíos iguales, y hallado la diferencia de una, y una y media pulgadas en sus gruesos.

El

130 El volúmen de fluido que desocupa el Navío de 70, estando vacío, es $\frac{3}{5}+\frac{1}{300}$ del que desocupa estando calado para navegar: el del Navío de 60, $\frac{3}{5}+\frac{6\frac{3}{5}}{300}$; y el de la Fragata de 22, $\frac{3}{5}+\frac{6\frac{1}{2}}{300}$; pero el aumento en estas dos Embarcaciones ya hemos visto que procede de lo sobrecargadas que se hicieron de maderas: y asi no debe servir de regla esta práctica. Si en las Fragatas se reglan los gruesos de maderas por las mangas, siendo p el volúmen que desocupa una de ellas en estado de navegar, supuesta en todo semejante al Navío, r el volúmen que corresponde al peso de cubiertas y costados que lleva de menos, y a el que corresponde al de la Artillería, que tambien se le pone de menos, será $p-r-a$ el volúmen con que ha de navegar la Fragata: y siendo q el que debiera desocupar vacía, supuesta en todo semejante al Navío, será $q-r$ el que realmente desocupará; luego $\frac{q-r}{p-r-a}$ será la razon en que se hallarán los dos volúmenes; pero en el Navío es esta $\frac{q}{p}$: luego siempre que $\frac{r}{r+a}$ sea mayor que $\frac{q}{p}$, como regularmente debe ser, será menor la razon en que estén los dos volúmenes en las Fragatas que en los Navíos. Esto es, aquel que desocupan quando están vacias, debe ser menor que $\frac{3}{5}+\frac{1}{300}$ del que desocupan quando están en estado de navegar. En los Navíos al contrario, debe aumentar la razon á medida que sean menores, porque sobre no haber en ellos cubiertas que substraher, tienen á proporcion mas elevados los entrepuentes.

131 Estas determinaciones deben ser tanto mas ad-

admisibles, quanto quedan comprobadas con la Fragata de 26 Cañones, pues no apartandose sino en muy poco de tener el grueso de sus maderas segun la regular proporcion de las mangas, estaba sobrecargada de Artillería y lastre, eran mayores sus esfuerzos en los balances, y sin embargo, todo lo suportó sin manifestar el menor escalabro: y asi las Fragatas no necesitan de mas grueso de maderas que el que á esta se le dió.

132 Todos estos reparos piden tan sólida atencion, como lo bien seguido de las líneas de agua en que fundan la perfeccion de sus fábricas los Constructores. La Embarcacion sobrecargada de maderas tiene mas volúmen sumergido en el fluido, halla mas resistencia en romper este, y por consiguiente no solo sale menos andadora, sino que está mas expuesta á la deriva, y menos obediente al Timon, porque de ordinario sumerge en el fluido los redondos que debía llevar elevados. Asimismo, aunque no esté sobrecargada de maderas, como lo esté de Artillería, sucederá lo propio, porque ademas del peso excesivo de esta, se aumenta el de mayor cantidad de lastre que se hace preciso, y por consiguiente se viene á los propios inconvenientes. De aquí se puede inferir que una Embarcacion sobrecargada de maderas y de Artillería, será de las peores calidades que pueden esperarse.

133 Los Franceses ya diximos que no colocan tanta madera. El Navío de 70, segun esta fábrica, calado hasta la línea en que navega, pesó 57522 quintales, y añadiendo 2501 por motivo de dos pies menos de manga que tenia, para reducirle á la de 48 pies, sería su peso 60023 quintales. El Navío de igual magnitud, hecho á la Inglesa, pesó calado 61499, y vacío 37106, cuya diferencia 24393 quintales es el peso que corresponde para equiparle y provisionarle. Este mismo peso corresponde igualmente al Navío Frances,

con

con algun lastre mas: que sea pues 25000 quintales; y rebaxados de los 60023 del peso total, quedarán 35023, que serán los que pesará el casco enteramente concluido: 2083 quintales menos que el casco hecho á la Inglesa. Segun la fábrica Francesa, el peso del casco será pues $\frac{3}{5} - \frac{1}{60}$ del peso total de un Navío. En las Fragatas debe aun disminuir algo, por razon de las menos cubiertas que llevan, y mucho mas si atendemos á lo dicho (§.113.): en efecto *Mr. Bouguer* (*Tratado del Navío* pag. 279 y 282) pretende que el casco de la Fragata la *Gazela* de 400 toneladas de peso total, solo pesaba 138: de suerte, que aunque fuesen 140, solamente sería este $\frac{3}{5} - \frac{1}{4}$ del primero.

CAPITULO 2.

Del centro de volúmen que ocupa el Navío en el fluido.

134 EN el Tratado de los fluidos se vió quanto la situacion del centro de volúmen contribuye para el aumento ó disminucion de las resistencias, inclinaciones y momentos. Se nos hace, pues, preciso calcular y deducir el verdadero sitio de este centro en el Navío, y considerar las ventajas que de su mejor colocacion se pueden alcanzar. En el Escolio de la Proposicion 17. Lib. 1. Tom. 1. de la Mechánica diximos, que para hallar el centro de las masas de un cuerpo igualmente denso, como es ahora el fluido que desocupa el Navío, no hay sino multiplicar el espacio diferencial comprehendido entre los dos planos paralelos al primitivo, por la distancia perpendicular desde este plano al espacio diferencial, integrar este producto, y partir despues por el espacio que ocupa el cuer-

cuerpo, pues el quociente será la distancia perpendicular desde el plano primitivo al centro de las masas ú del volumen. De esta suerte dividido todo el cuerpo del Navío en prismas por planos horizontales y verticales, y supuesto que uno de ellos esté contenido, como diximos (§.107.), por dos rectangulos paralelos, cuyos lados sean a y b, e y f, será el espacio diferencial de este prisma, como diximos en el mismo

$$\S = aedx + \frac{a}{d}(f-e)xdx + \frac{e}{d}(b-a)xdx + \frac{x^2dx}{d^2}(f-e)(b-a),$$

expresando x la distancia perpendicular desde el plano primitivo al espacio diferencial. Siguiendo, pues, la regla, será la distancia desde el mismo plano al centro de gravedad del prisma = - - - - - - - - - - -

$$\frac{\int\left(aexdx + \frac{a}{d}(f-e)x^2dx + \frac{e}{d}(b-a)x^2dx + \frac{x^3dx}{d^2}(f-e)(b-a)\right)}{\int\left(aedx + \frac{a}{d}(f-e)xdx + \frac{e}{d}(b-a)xdx + \frac{x^2dx}{d^2}(f-e)(b-a)\right)},$$

despues de haber colocado d por x. E integrando efectivamente, y reduciendo, quedará dicha distancia =

$$\frac{\frac{1}{2}d(ae+af+eb+3bf)}{2ae+af+eb+2bf} = \tfrac{1}{2}d \pm \frac{d(bf-ae)}{2(2ae+af+eb+2bf)},$$ el

signo positivo quando el plano primitivo es el menor ae, y el negativo quando es el mayor bf. Suponiendo ahora $e=f$, como hicimos en el mismo (§.107.), en lo que no se comete sensible error, quedará la distancia reducida á $\frac{1}{2}d \pm \frac{d(bf-ae)}{6(bf+ae)}$: esto es, igual á la mitad de la altura del prisma $\frac{1}{2}d$, mas ó menos el producto de la misma altura por la diferencia de los dos planos, partido por 6 veces la suma de los mismos.

135 Supongamos ahora que cada sólido comprehendido entre dos secciones horizontales de aquellas en que se cortó el cuerpo del Navío sea uno de estos

pris-

prismas: sea el area ó superficie de la primera seccion ó línea de agua A, el de la segunda B, el de la tercera C, y asi en adelante hasta la de la Quilla, que es la ultima, y llamaremos R. Con esto la distancia desde la línea del agua hasta el centro de gravedad del primer sólido, será $\frac{1}{2}d-\frac{d(A-B)}{6(A+B)}$, expresando d la distancia de una seccion á otra. La distancia desde la misma línea del agua hasta el centro de gravedad del segundo sólido $=\frac{1}{2}d-\frac{d(B-C)}{6(B+C)}$. La distancia al tercero $=\frac{1}{2}d-\frac{d(C-D)}{6(C+D)}$, y asi en adelante. Suponiendo ahora que cada sólido sea como un cuerpo reunido en su centro de gravedad, segun diximos en el Tom. 1. Lib. 1. Cap. 3, será la distancia desde la línea del agua al centro de todas las masas ú de volúmen, igual á la suma de todos los produĉtos de cada cuerpo por su distancia desde la línea del agua á su centro, dividida por la masa ó volúmen total. El primer produĉto es $\frac{1}{4}d^2(A+B)-\frac{1}{12}d^2(A-B)$: el segundo $\frac{1}{4}d^2(B+C)-\frac{1}{12}d^2(B-C)$: el tercero $\frac{1}{4}d^2(C+D)-\frac{1}{12}d^2(C-D)$: y asi de los demas: y la suma de todos $=\frac{1}{4}d^2(A+4B+8C+12D....+(n-1)4R)-\frac{1}{12}d^2(A-R)$, expresando n el primero de los terminos, y R el ultimo. La distancia, pues, desde la línea del agua hasta el centro del todo del volúmen será $=$

$$\frac{\frac{1}{4}d^2(A+4B+8C+12D+.....(n-1)4R)-\frac{d^2}{12}(A-R)}{d(\frac{1}{2}A+B+C+D+.....+\frac{1}{2}R)}=\frac{d(\frac{1}{4}A+B+2C+3D+.....+(n-1)R)-\frac{1}{12}d(A-R)}{\frac{1}{2}A+B+C+D+.....+\frac{1}{2}R}.$$

En el exemplo que dimos del Navío de 42 pies de manga §.108, se halló $A=5312$, $B=4972$, $C=4344$, $D=3492$, $E=2314$, $R=200$, $d=3\frac{1}{2}$, y $\frac{1}{2}A+B+C+D+E+\frac{1}{2}R=17878$: luego tendremos por la dis-

tan-

tancia desde la línea del agua al centro del volúmen

$$\frac{3\frac{1}{2}(1328+4972+8688+10476+9256+1000)-\frac{3\frac{1}{2}}{12}(5312-1000)}{17878}$$

$=7$ pies, menos $\frac{10}{9}$ de pulgada, ú despreciando un corto quebrado, serán 6 pies 11 pulgadas lo que el centro del volúmen está debaxo del fluido.

136 En este cálculo, como se ha visto, se ha despreciado el hacer atencion al volúmen que ocupan la Tablonería, Quilla, Roda, Codaste, Taxamar y Timon, porque fuera muy corta la alteracion que pudieran producir; pero respeto á que la Quilla puede hacer baxar algo el centro, se pueden tomar 7 pies.

137 Para hallar lo que el mismo centro del volúmen se aparta de la Roda, el Codaste, ó lo que es mejor de la Quaderna maestra, servirá la misma fórmula, con la diferencia de que cada sólido ó prisma será ahora el espacio comprehendido entre dos Quadernas, y las areas ó superficies las secciones de las mismas Quadernas: de suerte, que A será el area que la Quaderna maestra tiene debaxo del fluido, B la que tiene la III, ó la 3, C la que tiene la VI, ó la 6, y así de las demas. Pero es menester advertir que despues de las ultimas Quadernas XXVII, ó 33, hay otro pequeño sólido ó prisma comprehendido entre dichas Quadernas y la Roda ó Codaste. Para introducir este en la fórmula, supuesto que sea δ la distancia de dichas Quadernas á la Roda ó Codaste; ó la distancia media, será $\frac{1}{2}\delta-\frac{\delta(R-o)}{6(R+o)}=\frac{1}{3}\delta$ la distancia de las mismas Quadernas al centro del prisma, y $(n-1)d+\frac{1}{3}\delta$ la del mismo centro á la Quaderna maestra: su momento ó producto será $((n-1)d+\frac{1}{3}\delta)\frac{1}{2}\delta R$: hagase ahora $\delta=\frac{d}{k}$, expresando k la razon entre las distancias d y δ, y se re-

reducirá el momento á $\left((n-1)d+\frac{d}{3k}\right)\frac{dR}{2k}$, cuya cantidad partida por d: esto es, $\left(n-1+\frac{1}{3k}\right)\frac{dR}{2k}$, será la que se debe añadir al numerador de la fórmula para que quede introducida la accion de dichos prismas extremos. Añadida, se reduce á - - - - - - - - - - - -

$$\frac{d\left(\frac{1}{4}A+B+2C+3D+\&....+\frac{(2k+1)(n.-1)R}{2k}\right)-\frac{1}{12}d\left(A-\frac{2k^2+1}{2k^2}R\right)}{\frac{1}{2}A+B+C+D+\&....+\frac{1}{2}R}$$

introduciendo asimismo en el denominador el volúmen de los prismas extremos, ó tomando por denominador el volúmen de todo el cuerpo del Navío sumergido en el fluido, dividido por la distancia d de una Quaderna á otra.

138 No hay ahora cosa mas fácil que hallar los valores de A, B, C, D, &c.: cada area de estas es igual, por lo dicho en el §.106, á la suma de la mitad de la línea de agua AD, de dos veces la ED, de otras dos la HG, y asi en adelante hasta tomar la de la mitad de la anchura de la Quilla, multiplicada por la distancia de una seccion á otra. Asi en el exemplo que dimos en el §.108, todas las cinco casas que corresponden á la Quaderna o, son las quartas partes de estas líneas: multiplicando, pues, la primera por 2, y las otras por 4, y añadiendo la mitad de la anchura de la Quilla será la suma $=$ - - - - - - - - - - $21^{p.}\,0^{p.}+41^{p.}\,8^{p.}+39^{p.}\,8^{p.}+36^{p.}\,0^{p.}+29^{p.}\,4^{p.}+0^{p.}\,8^{p.}=168\frac{1}{3}$: luego $A=(168\frac{1}{3})\,3\frac{1}{2}=589$, por ser $3\frac{1}{2}$ la distancia entre las secciones ó líneas de agua. Del mismo modo, las cinco casas que corresponden á la Quaderna 3, son las mitades de las líneas de agua: luego tomando la primera, y el duplo de las otras, con la mitad de la anchura de la Quilla, tendremos la suma, que

será $\overset{p.}{20}\ \overset{p.}{11} + \overset{p.}{41}\ \overset{p.}{8} + \overset{p.}{39}\ \overset{p.}{8} + \overset{p.}{35}\ \overset{p.}{10} + \overset{p.}{29}\ \overset{p.}{4} + \overset{p.}{00}\ \overset{p.}{8} = 168\tfrac{1}{12}$: luego $B = (168\tfrac{1}{12})3\tfrac{1}{2} = 588$. Lo mismo se ha de hacer con las cinco casas de la Quaderna 6, 9, 12 &c. para hallar los valores de C, D, E, &c.: solo en la 33 se tomará dos veces la primera casa, y quatro veces las otras, porque así en esta Quaderna, como en la maestra, se tomó en el exemplo la mitad de las medias líneas de agua. Hecho así, se encuentra $C = 580$, $D = 565$, $E = 541$, $F = 515$, $G = 473$, $H = 417$, $I = 355$, $K = 284$, $L = 193$, y $R = 62$. A mas de esto, tomadas las medidas en el plano es $k = \frac{7}{3}$: luego colocando todos estos valores en el numerador de la fórmula, tendremos por la parte que toca á Popa -

$$7\tfrac{1}{6}(147 + 588 + 1160 + 1695 + 2164 + 2575 + 2838 + 2916 + 2840 + 2556 + 1930) + -$$

$$7\tfrac{1}{6}\left(\left(\frac{(\frac{14}{3}+1)11.62}{\frac{14}{3}}\right) - \tfrac{1}{12}\left(589 - \frac{\frac{14.7}{3}+162}{\frac{14.7}{3}}\right)\right) = 159387 - 313 = 159074.$$

139 Para la de Proa es A, como antes $= 589$, $B = 588$, $C = 575$, $D = 557$, $E = 529$, $F = 492$, $G = 422$, $H = 310$, $I = 127$, $R = 18$, y á mas de esto $k = \frac{14}{3}$: con que substituyendo estos valores en el numerador de la fórmula, se reducirá á - - - - - - -

$$7\tfrac{1}{6}(147 + 588 + 1150 + 1671 + 2116 + 2460 + 1532 + 2170 + 1016 + 180) -$$

$\frac{1}{12} \cdot 7\tfrac{1}{6}(589 - 18) = 100204$. Como esta cantidad es los momentos de Proa, y opuestos á los de Popa, será negativa: con que la distancia horizontal desde la Quaderna maestra al centro de las masas ú del volúmen, será $= \dfrac{159074 - 100204}{\dfrac{6273}{7\frac{1}{6}}}$ habiendo puesto por denominador el volumen del Buque, como en el §. 108, dividido por $7\tfrac{1}{6}$ distancia de Quaderna á Quaderna,

que

que se reduce á 5 pies $7\frac{1}{6}$ pulgadas, ó $5\frac{3}{5}$; porque por no dilatar mas el cálculo omitimos hacer atencion á la inclinacion que tiene la Quilla con el horizonte, por ser muy corta la diferencia que puede producir: así como á la altura de $3\frac{1}{2}$ pies que, en las Quadernas de Proa y línea mas baxa, es algo menor.

140 Como la Esfora que se ha dado al Navío de 60, es de 152 pies, y la colocacion de la Quaderna maestra á 82 distante de la Popa: distará la Quaderna del medio del Navío solos 6 pies, por lo que el centro de volúmen, y el de gravedad solo están $\frac{1}{3}$ de pie mas á Proa que el medio del Navío.

141 Hallado el centro de volúmen del Navío para una determinada línea de agua, conviene especular la alteracion que tendrá, puesto en otra qualquiera línea. Supongamos que en lugar de quedar sumergido en el fluido, como en el cálculo del §.108, se quiera el numero n de pulgadas mas ó menos calado, ó en otra línea paralela á la primera; pero mas ó menos alta del numero de pulgadas n. Siguiendo las reglas citadas de hallar el centro de las masas, se puede suponer que por el centro de volúmen ya hallado, pase un plano horizontal, y que este sea el primitivo: que el todo se componga de cuerpos, cada uno reunido en su centro, uno el todo del volúmen que antes ocupaba el Navío en el fluido, que llamaremos v, y otro la nueva porcion que se sumerge, que es $\frac{1}{12}na$ el producto del area de la mas alta línea de agua a por la altura $\frac{1}{12}n$ que de nuevo se ha de sumergir. Con esto el momento del primer cuerpo será cero, porque su centro coincide con el plano primitivo: y el momento del segundo será $\frac{1}{12}na\left(d \mp \frac{n}{12}\right)$ siendo d la distancia desde la línea del agua al centro de volúmen, y $\frac{n}{24}$ lo que dista el centro del nuevo cuerpo que se sumerge

de.

de la misma línea de agua: luego $\frac{\frac{1}{12}na(d \pm \frac{n}{24})}{v \pm \frac{1}{12}na}$ será lo que el nuevo centro del volúmen se apartará del primero: y por consiguiente $d \pm \frac{1}{12}n \mp \frac{\frac{1}{12}na(d \pm \frac{n}{24})}{v \pm \frac{1}{12}na} = \frac{v(d \pm \frac{1}{12}n) + \frac{an^2}{2.144}}{v \pm \frac{1}{12}na}$ lo que el mismo nuevo centro de volúmen distará de la superficie del agua. Pero la cantidad $\frac{an^2}{(v \pm \frac{1}{12}na)2.144}$ se hace despreciable, con que tambien podemos asignar por la referida distancia $\frac{v(d \pm \frac{1}{12}n)}{v \pm \frac{1}{12}na}$: ó porque á diferencia de otra cantidad despreciable, es $\frac{v.\frac{1}{12}n}{v \pm \frac{1}{12}na} = \frac{1}{12}n$, será igualmente la distancia del nuevo centro de volúmen á la superficie del fluido $= \frac{vd}{v \pm \frac{1}{12}na} \pm \frac{1}{12}n$: el signo positivo para quando se aumenta el volúmen, y el negativo para quando se disminuye. Si substituimos en qualquiera de estas fórmulas los valores que hallamos §§.108, 135 para el Navío de nuestro exemplo, baxo el supuesto que haya de sumergirse hasta otra línea paralela á la primera distante 6 pulgadas, ó que sea $n = 6$, tendremos $v = 62573$, $a = 5312$, y $d = 6$ pies 11 pulgadas: con que será la diferencia vertical desde el centro de volumen á la superficie del fluido $=$ ----- $\frac{62573(6\frac{11}{12})}{62573 + 5312\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = 7$ pies $1\frac{1}{3}$ pulgadas: ó por lo que se ha dicho haberse despreciado $= 7\frac{1}{6}$ pies.

142 Mas facil y generalmente se puede lograr esta solucion, no solo en el caso de sumergir mas ó menos el Navío, sino tambien en el de alterarle su cuerpo, lle-

llenando mas ó menos sus Quadernas, ó lo que es lo mismo aumentando ú disminuyendo su volúmen en qualquier parte. Que sea por exemplo w el volúmen que se le quiera agregar, y f la distancia desde el centro de este volúmen al centro de volúmen del Navío: y serán $v+w : w = f : \frac{fw}{u+w}$ distancia desde el mismo primitivo centro de volúmen del Navío al nuevo que se desea. La distancia f puede ser positiva ó negativa, segun el centro del volúmen que se añadiere esté mas baxo ó alto que el centro de volúmen del Navío: y asimismo la w será positiva ó negativa, segun se añadiere ó substraxere el volúmen. De esta suerte si el Navío se llenare mas en sus fondos, ó como dicen los Marineros, se le diere mas plan, se elevará sobre las aguas de igual volúmen al añadido, y tendremos dos cantidades iguales w, una positiva y otra negativa: y asimismo dos distancias f, una positiva y otra negativa: el produćto de las dos positivas, asi como el de las dos negativas, es positivo; por consiguiente ambos son positivos, y la suma será el produćto del volúmen añadido w por la distancia entre los dos centros del añadido y substraido.

143 Por lo que toca á lo que el mismo centro puede apartarse ó aproximarse á la Quaderna maestra, respećto á que para que el cálculo sea exáćto es preciso que el nuevo cuerpo que se sumerja sea corto, siempre resultará una cantidad despreciable en la mutacion horizontal del centro de volúmen.

144 Como añadiendo el nuevo volúmen $5312.\frac{1}{2}$ $= 2656$ pies que se supone sumergirse mas el Navío, á los 66064 pies, volúmen total, que en el cálculo resultaron, serán 68720, que es el volúmen que por experiencia (§.117) se halló con corta diferencia, debe ocupar un Navío de este buque, tendremos que el centro de volúmen en él estará debaxo de la superficie.

ficie del agua de los mismo $7 \frac{1}{6}$ pies.

145 Habiendo hallado el centro de volúmen de un Navío, es facil hallarle en los demas, si en sus fondos fueren enteramente semejantes. Llámese n el Navío, cuyo centro de volúmen se tiene conocido, y N el otro en quien se pretende hallar: sean: :-

m la Manga.
v el volúmen sumergido.
a el area ó seccion de la superficie del fluido.
d la distancia desde la superficie al centro de volúmen.
} En el primero.

M la Manga.
V el volúmen sumergido.
X La distancia desde la superficie del fluido al centro de volúmen.
} En el segundo.

Respecto que se suponen semejantes en sus fondos los Navíos, será $M^3 : m^3 = V : \frac{m^3V}{M^3}$, volúmen que debiera ocupar el Navío n para quedar en la misma disposicion que el otro N: lo que dá $v - \frac{m^3V}{M^3}$ por el volúmen que debiera ocupar de menos ú de mas, y $\frac{v - \frac{m^3V}{M^3}}{a}$ por la altura que hubiera de tener de menos ó mas calado, para quedar en la misma disposicion: por lo que $\frac{v - \frac{m^3V}{M^3}}{2a}$ será la distancia desde la superficie del fluido al centro del volúmen $v - \frac{m^3V}{M^3}$: y el momento de este $= \left(v - \frac{m^3V}{M^3}\right)\left(d - \frac{v - \frac{m^3V}{M^3}}{2a}\right)$: lo que dá la

la distancia del centro de volumen total v, al nuevo centro de volumen $\frac{m^3V}{M^3}$, en que debiera quedar el Navío n para estar en la misma disposicion que el N $=$
$$\frac{(v-\frac{m^3V}{M^3})(d-\frac{v-\frac{m^3V}{M^3}}{2a})}{v-(v-\frac{m^3V}{M^3})}$$
: luego la distancia desde la superficie del fluido al nuevo centro de volúmen será
$$d-\frac{v-\frac{m^3V}{M^3}}{a}+\frac{(v-\frac{m^3V}{M^3})(d-\frac{v-\frac{m^3V}{M^3}}{2a})}{v-(v-\frac{m^3V}{M^3})}$$
, que se reduce á $\frac{m^3V}{2aM^3}+\frac{v(2ad-v)}{2a.\frac{m^3V}{M^3}}$. Quedando ya con esto el Navío n en la misma disposicion que el N, sus distancias desde el centro de volúmen hasta la superficie del fluido, deben ser proporcionales á sus mangas: luego
$$m:M=\frac{m^3V}{2aM^3}+\frac{v(2ad-v)}{2a.\frac{m^3V}{M^3}}:x=\frac{M}{2a.m}\left(\frac{m^3V}{M^3}+\frac{v(2ad-v)}{\frac{m^3V}{M^3}}\right)$$

146 Si quisieremos, por exemplo, hallar lo que en el Navío de 70 Cañones está sumergido en el fluido su centro de volúmen, será $V=96500$, $M=48$: y para el Navío de 60, en quien se halló $d=7\frac{1}{6}$, será $v=68650$, $m=42$, y $a=5312+188=5500$, en cuya cantidad se añaden los 188 por el grueso de las tablas, á fin de tener la verdadera area ó seccion del fluido. Substituidos estos valores en la fórmula, resulta
$$x=\frac{8}{7.11000}\left(\frac{(7)^3 96500}{8^3}+\frac{68650((7\frac{1}{6})11000-68650)}{\frac{(7)^3 96500}{8^3}}\right):$$

ó $x = 7$ pies 10 pulgadas, que es lo que en el Navío de 70 está sumergido el centro de volúmen debaxo de la superficie del fluido.

147 Para la Fragata de 22 Cañones, será $V = 25170$, y $M = 32$: luego $x =$

$$\frac{16}{21.11000}\left(\frac{(21)^3 25170}{(16)^3} + \frac{68650((7\frac{1}{6})11000-68650)}{\frac{(21)^3 25170}{(16)^3}}\right)$$

$=4$ pies 9 pulgadas que tendrá esta Fragata su centro de volúmen debaxo de la superficie del fluido.

148 Para el Navío de tres Puentes, con 51 pies de Manga, es $V = 128293$, y $M = 51$: luego será $x =$

$$\frac{17}{14.11000}\left((\tfrac{14}{17})^3 128293 + \frac{68650((7\frac{1}{6})11000-68650)}{(\frac{14}{17})^3 128293}\right)$$

$=9$ pies justos, que es lo que en el Navío de tres puentes estará el centro de volúmen sumergido en el fluido.

149 De la misma manera se hallará el centro de volúmen en los demás Navíos y Fragatas, quando sus fondos fueron semejantes: no siendolo, será preciso deducirle por el cálculo, como hicimos para el Navío de 60.

CAPITULO 3.

Del Metacentro.

150 El centro de volúmen varía quando el Navío se inclina, y de esta variacion, como vimos en el Tratado de los fluidos, depende el mayor ó menor momento, y de este la estabilidad en el caso del reposo. Que sea ABD el cuerpo del Navío, AD su línea de agua quando está derecho, y GL la misma lí-

Lam. 1. Fig. 31.

línea quando está inclinado, de suerte que LED $=$ AEG será el ángulo de la inclinacion. Debaxo de esta suposicion, y de ser dicho ángulo infinitamente chico, hallamos (*Prop.* 67. *Lib.* 2. *Tom.* 1.) que los momentos verticales, que resisten á la inclinacion son $\left(HP + \frac{m}{12}\int e^3 c\right) sen.\Delta$, expresando Δ el ángulo de la inclinacion, H la distancia desde el centro de gravedad hasta el de volúmen hallado, P el peso total del Navío, m el peso de un pie cúbico del fluido, e la Manga AD, y c una diferencial de la longitud del Navío. Partiendo ahora por P, peso del Navío, quedará $\left(H + \frac{m}{12P}\int e^3 c\right) sen.\Delta$ por la distancia horizontal desde el centro de gravedad al nuevo centro de volúmen: y siendo $H sen.\Delta$ la distancia horizontal desde el centro de gravedad al primitivo centro de volúmen C, quedará $\frac{m\,sen.\Delta}{12P}\int e^3 c =$ á la distancia horizontal CN desde el mismo primitivo C al nuevo centro de volúmen N. Que de N se levante la vertical NE, y será E lo que *Mr. Bouguer* llamó *Metacentro* y siendo CN á CE, como $sen.\Delta$ á 1, será CE, esto es, la distancia desde el centro de volúmen al Metacentro, $= \frac{m}{12P}\int e^3 c$; ó porque es $\frac{m}{P} = \frac{1}{v}$, siendo v el volúmen total, será $CE = \frac{1}{12v}\int e^3 c$.

151 Toda la dificultad consiste ahora en hallar el valor de $\int e^3 c$. Para esto supongamos que la distancia de una Quaderna á otra sea d, que la anchura de la mayor de dos qualesquiera en el area ó superficie del agua sea a, y la de la menor b: con esto, la anchura de otra Quaderna distante de la b la cantidad x, será

$b+\frac{x}{d}(a-b)$; con que tendremos $e=b+\frac{x}{d}(a-b)$, y $e^3=b^3+\frac{3b^2x}{d}(a-b)+\frac{3bx^2}{d^2}(a-b)^2+\frac{x^3}{d^3}(a-b)^3$, y e^3c $=b^3dx+\frac{3b^2xdx}{d}(a-b)+\frac{3bx^2dx}{d^2}(a-b)^2+\frac{x^3dx}{d^3}(a-b)^3$: luego el integral de e^3c, por todo el espacio comprehendido entre las dos Quadernas de las anchuras b y $b+\frac{x}{d}(a-b)$, será $b^3x+\frac{3b^2x^2}{2d}(a-b)+\frac{bx^3}{d^2}(a-b)^2+\frac{x^4}{4d^3}(a-b)^3$, y el que corresponde á todo el espacio entre las Quadernas de la anchura a y $b=$ - - - - -

$$d(b^3+\tfrac{2}{3}b^2(a-b)+b(a-b)^2+\tfrac{1}{4}(a-b)^3)=\tfrac{1}{4}d(a^3+a^2b+ab^2+b^3).$$

Que sea ahora la anchura de la Quaderna maestra A, la de la III, ó $3=$ B, la de la VI, ó $6=$ C, y asi de las demas, y será $\int e^3c$ en todas las Quadernas desde la Maestra hasta Proa ó Popa $=$ - - - - - - - - -

$$\tfrac{1}{4}d(A^3+A^2B+AB^2+2B^3+B^2C+BC^2+2C^3+C^2D+CD^2+2D^3+D^2E+\&c)=$$

$$\tfrac{1}{4}d\left(A^2(A+B)+B^2(A+2B+C)+C^2(B+2C+D)+\ldots\ldots+S^2\left(R+\left(\frac{k+1}{k}\right)S\right)\right),$$

expresando S la anchura de la ultima Quaderna, R la de la penultima, y $\frac{k}{1}$ la razon de la distancia d de Quaderna á Quaderna, á la distancia desde la ultima S á la Proa ó Popa: por tanto, $\frac{1}{12v}\int e^3c=$ - -

$$\frac{d}{48v}\left(A^2(A+B)+B^2(A+2B+C)+C^2(B+2C+D)+\ldots\ldots+S^2\left(R+\left(\frac{k+1}{1}\right)S\right)\right),$$

es la distancia desde el centro del volúmen al metacentro.

152 Si los valores que hallamos en el exemplo §.108, en que calculamos el volúmen del Navío de 42 pies de manga, se substituyen en esta fórmula, se-

será $\frac{1}{12v}\int e^3c$ en la Popa $=$ - - - - - - - - - - - - - - - -

$\frac{7\frac{1}{6}}{48.68650}\left(42^2(42+41\frac{5}{6})+\overline{41\frac{5}{6}}^2(42+83\frac{2}{3}+41\frac{2}{3})+\overline{41\frac{2}{3}}^2(41\frac{5}{6}+83\frac{1}{3}+41\frac{1}{3})+\ldots\right.$

$\left.\ldots\ldots+(17\frac{2}{3})^2(27\frac{2}{3}+28)\right)$, y en la Proa $=$ - - - - - - - - - -

$\frac{7\frac{1}{6}}{48.68650}\left((42)^2(42+41\frac{5}{2})+\overline{41\frac{5}{6}}^2(42+83\frac{2}{3}+41\frac{5}{6})+\overline{41\frac{5}{6}}^2(41\frac{5}{6}+83\frac{2}{3}+41\frac{2}{3})+\right.$

$\left.\ldots\ldots+(9\frac{2}{3})^2(27\frac{1}{3}+13)\right)$: ó haciendo realmente todos los productos y sumas, tanto de Popa como de Proa, es para el Navío de 42 pies de manga, con 60 Cañones, $\frac{1}{12v}\int e^3c = 9\frac{1}{3}$ pies, que es la distancia desde el centro de volúmen al metacentro.

153 Para añadir ahora lo que corresponde por el grueso de la tablonería en ambos costados, que es de 15 pulgadas, respecto que la cantidad e^3 demuestra, que la altura del metacentro es como los cubos de las mangas, tendremos $(42)^3 : (43\frac{1}{3})^3 = 9\frac{1}{3} : 10\frac{1}{3}$, verdadera altura del metacentro sobre el centro de volúmen en el Navío de 60 Cañones.

154 A mas de esto se pudiera añadir lo que el mismo metacentro sube quando se inclina el Navío de cantidad considerable; porque como los costados, al paso que se levantan sobre el agua, tienen mas salida hacia afuera, particularmente en los extremos del Navío, aumenta la cantidad e^3 á medida que la inclinacion es mayor: puede ir en tal caso la altura del metacentro sobre el centro del volúmen hasta $11\frac{1}{2}$ pies.

155 Hallado el metacentro en un Navío, se puede con facilidad hallar en todos los Navíos que tengan la seccion de la superficie del agua enteramente semejante, pues en tal caso la cantidad $\frac{1}{12}\int e^3c$ es como los quadrados quadrados de las mangas. Esta cantidad es

en

en el Navío de 42 pies de manga $=$ 639819: con que para hallar la correspondiente en el Navío de 70, con 48 pies de manga, tendremos $(42)^4 : (48)^4 = 639819 : 1091502 = \frac{1}{12}\int e^3 c$ en el Navío de 70: luego será en él la distancia desde el centro de volúmen al metacentro $= \frac{1}{12v}\int e^3 c = \frac{1091502}{96500} =$ 11 pies $3\frac{1}{2}$ pulgadas: á que añadiendo 1 pie por razon de la tabla, y algo más por la de los redondos, será en el Navío de 70, $\frac{1}{12v}\int e^3 c = 13\frac{1}{2}$ pies.

156 Para la Fragata de 22 Cañones, con $31\frac{2}{3}$ pies de manga, tendremos $(42)^4 : (31\frac{2}{3})^4 = 639819 : 206761$: luego el metacentro estará sobre el centro de volúmen de $\frac{206761}{25170} =$ 8 pies $2\frac{1}{2}$ pulgadas; ó añadiendo $8\frac{1}{2}$ pulgadas por razon de la tabla, y 9 por la de los redondos, será $\frac{1}{12v}\int e^3 c = 9\frac{2}{3}$ pies.

157 Para el Navío de tres puentes, con 51 pies de manga, es $(42)^4 : (51)^4 = 639819 : 1391434$: luego el metacentro estará sobre el centro del volúmen $\frac{1391434}{133053} =$ 10 pies $5\frac{1}{2}$ pulgadas; ó añadiendo $13\frac{1}{2}$ pulgadas por razon de la tabla, y 15 por la de los redondos, será $\frac{1}{12v}\int e^3 c = 12\frac{4}{5}$. De la misma manera se procederá para hallar lo propio en los demas Navíos.

158 Hallado el metacentro por lo que toca á las inclinaciones laterales, resta hallarlo por lo que pertenece á las que puede tomar el Navío de Popa á Proa, ó sobre un exe horizontal, perpendicular á la Quilla, que pase por el centro de gravedad. Que sea Δ el ángulo de estas, supuestas infinitamente pequeñas, *y* el an-

ancho de una Quaderna en la superficie del fluido, y z la distancia horizontal de ésta al plano vertical perpendicular á la Quilla, que pasa por el centro del volúmen total sumergido: con esto, ydz será una diferencial del area ó seccion del Navío en la superficie del fluido, $yzdz sen.\Delta$ la del pequeño volúmen que se sumergirá en la inclinacion, y $yz^2dz sen.\Delta$ su momento: por lo que, $sen.\Delta \int yz^2 dz$ será el momento total de la nueva parte sumergida, $\frac{sen.\Delta}{v}\int yz^2 dz$ la distancia horizontal desde el centro de volúmen á la vertical que pasa por el metacentro, y $\frac{1}{v}\int yz^2 dz$ la del centro de volúmen al metacentro. Para hallar ahora el valor de $\int yz^2 dz$, supongamos que sea a el ancho de una Quaderna en la superficie del fluido, b el de otra inmediata menor, d la distancia de Quaderna á Quaderna, n la que hay desde la Quaderna a al plano vertical que pasa por el centro de volúmen, y x la que hay desde la Quaderna b á otra intermedia entre b y a: con esto, $\frac{ax+b(d-x)}{d} = y$ será el ancho de dicha Quaderna intermedia, y $z = n+d-x$; por lo que tendremos

$$yz^2 dz = -dx(n+d-x)^2\left(\frac{ax+b(d-x)}{d}\right) \text{ - - - - - - - - - }$$

$$= -\frac{dx}{d}\left(\begin{array}{l} bd(n+d)^2+(a-b)(n+d)^2x-2(a-b)(n+d)^2x+(a-b)x^3 \\ \qquad -2bd(n+d)x+bdx^2 \end{array}\right):$$

cuyo integral completo es - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} bd(n+d)^2+\frac{1}{2}d(a-b)(n+d)^2-\frac{2}{3}d^2(a-b)(n+d)+\frac{1}{4}d^3(a-b) \\ \qquad -bd^2(n+d) \qquad +\frac{1}{3}bd^3 \end{array}$$

$= \frac{1}{2}n^2d(a+b)+\frac{1}{3}nd^2(a+2b)+\frac{1}{12}d^3(a+3b)$. Será, pues, este el valor de $\int yz^2 dz$, correspondiente al volúmen comprehendido entre las Quadernas, cuyas anchuras son a y b. Que sea ahora A la anchura de la Quaderna

na maestra en la superficie del agua, B la de la III, C la de la VI, y asi en adelante: como tambien q la distancia desde el centro de volúmen á la Quaderna maestra. Substitúyase en la fórmula q por n, A por a, y B por b, y será el valor de $\int yz^2 dz$ correspondiente al volúmen comprehendido entre la o y la III $= \frac{1}{2}q^2 d(A+B)+\frac{1}{3}qd^2(A+2B)+\frac{1}{12}d^3(A+3B)$. La distancia desde el centro de volúmen á la Quaderna III, es $q+d$: con que substituyendo en la misma fórmula $q+d$ por n, B por a, y C por b, será el valor de $\int yz^2 dz$ correspondiente al volúmen comprehendido entre la Quaderna III y VI $= \frac{1}{2}q^2 d(B+C)+\frac{1}{3}qd^2(4B+5C)+\frac{1}{12}d^3(11B+17C)$. De la misma manera se hallarán los demas valores de $\int yz^2 dz$ correspondientes al volúmen comprehendido entre las otras Quadernas, hasta la ultima de Proa, y sumando, se hallará que el que corresponde al volúmen entre la Quaderna maestra, y la ultima de Proa es $=$ ----------------------

$$\left\{\begin{array}{l} q^2 d(\frac{1}{2}A+B+C+D+E+\&c) \\ qd^2(\frac{1}{3}A+2B+4C+6D+8E+\&c) \\ \frac{1}{12}d^3(A+8B+20C+32D+44E+\&c) \\ \frac{1}{2}d^3(0+B+5C+13D+25E+\&c) \end{array}\right\} \text{cuya orden}$$

de séries se ve claramente. Los coeficientes de las tres primeras aumentan en progresion Arithmética, y los de la quarta son la suma de los quadrados de los números que expresan el lugar que ocupan sus dos términos precedentes: v.g. el 13 es la suma de 9 y 4, quadrados de los números 3 y 2, que son los lugares que ocupan la C y la B: el 25 es la suma de 16 y 9, quadrados de los números 4 y 3, que son los lugares que ocupan la D y la C, y asi de los demas. A mas de esto, para hallar el valor de $\int yz^2 dz$, correspondiente al volúmen comprehendido entre la Quaderna maestra y el plano vertical, que pasa por el centro de volúmen, no tenemos sino substituir en la fórmula o por n,

n, q por d, A por b, y la anchura del Navío en el mismo plano vertical por a; pero respecto de que en aquel parage es cortísima ó ninguna la diferencia entre los anchos de las Quadernas, se puede substituir tambien A por a, y tendremos por dicho valor $\frac{1}{3}q^3A$. Ultimamente para hallar el valor de $\int yz^2dz$, correspondiente al volúmen comprehendido entre la ultima Quaderna de Proa y la Roda, supongamos que sea S el ancho de dicha última Quaderna, k la distancia de ella á la Roda, y r el número de Quadernas, excepto la maestra; lo que dará para el espacio comprehendido entre R y S, $n = q + r - 1$, y para el comprehendido entre S y la Roda, $n = q - r$. Substituidos estos valores en la fórmula, resultan los últimos términos en las series, $= \frac{1}{2}q^2(d+k)S + q(rd(d+k) - d^2 + k^2)S + \frac{1}{12}(6r^2d^2(d+k) - 4rd(d^2 - k^2) + d^3 + k^3)S$, por lo que la distancia desde el centro de volúmen al metacentro en las inclinaciones de Popa á Proa, será $=$

$$\frac{1}{v}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}q^3A \\ q^2d(\frac{1}{2}A + B + C + D + E + \&c) + \frac{1}{2}q^2(d+k)S \\ qd^2(\frac{1}{3}A + 2B + 4C + 6D + 8E + \&c) + q(rd(d+k) - d^2 + k^2)S \\ \frac{1}{12}d(A + 8B + 20C + 32D + 44E + \&c) + \frac{1}{12}(6r^2d^2(d+k) + d^3 + k)S \\ \frac{1}{2}d^3(0 + B + 5C + 13D + 25E + \&c) - \frac{1}{3}rd(d^2 - k^2)S \end{array}\right\}$$

Bien entendido, que esto es tanto para Proa, como para Popa, y que para esta es q negativo.

159 Si en esta fórmula substituimos las cantidades $A = 42$: $B = 41$: $C = 41, 10$: $D = 41, 8$: $E = 41, 6$: &c : $d = 7\frac{1}{6}$: $k = 4, 9$: $q = 5$: $r = 9$, que hallamos para la Proa en el exemplo del Navío de 60 Cañones con 42 pies de manga §.108, se tiene $\frac{1}{3}q^3A = 1750$: la primera serie $= 59912$: la segunda $= 702690$; y tercera y quarta juntas $= 2808127$: cuya suma es 3572469. Para la Popa es $A = 42$: $B = 41, 10$: $C = 41, 8$: $D = 41, 4$: $E = 40, 10$: &c : $d = 7\frac{1}{6}$: $k = 4$: $q = -5$: $r = 11$; y resulta

$\frac{1}{3}q^3A = -1750$: la primera serie $= 78125$: la segunda $= -1094671$; y la tercera y quarta juntas $= 5200707$: cuya suma es 4182411 , que junta con la 3572469 , hacen 7754880. Partiendo esta cantidad por $65850 = 68650 - 2800 = v$, volúmen que ocupó el Navío de 60 , menos 2800 , volúmen de la tablazon que no entró en el cálculo , resultan $117\frac{3}{4}$ por la altura del metacentro sobre el centro del volúmen en las inclinaciones de Popa á Proa.

160. Hallada esta altura en un Navío , es fácil hallarla en los demas , si antes se tienen calculadas las que corresponden á las inclinaciones laterales , y se suponen enteramente semejantes la secciones hechas por un plano coincidente con la supeificie del agua : pues como ambas alturas en uno y otro Navío son como los quadrados-quadrados de sus dimensiones lineares , tendrán estas entre sí la misma razon. En el Navío de 60 (§.152) se halló la altura del metacentro, sobre el centro de volúmen en las inclinaciones laterales , $= 9\frac{1}{3}$ pies : y en las de Popa á Proa acaba de hallarse $= 117\frac{3}{4}$. En el Navío de 70 se halló la primera (§. 155) $=$ 11 pies $3\frac{1}{2}$ pulgadas : luego serán $9\frac{1}{3} : 117\frac{3}{4} = 11\frac{7}{24} : 142$ pies 5 pulgadas , altura del metacentro sobre el centro de volúmen en el Navío de 70, en las inclinaciones de Popa á Proa. En la Fragata de 22 Cañones se halló la altura del metacentro , sobre el centro de volúmen en las inclinaciones laterales, $=$ 8 pies $2\frac{1}{2}$ pulgadas : luego será $9\frac{1}{3} : 117\frac{3}{4} = 8\frac{5}{24} : 103\frac{1}{2}$, igual á la altura del metacentro en las inclinaciones de Popa á Proa ; y en el Navío de tres puentes se halló la misma , en las inclinaciones laterales , $= 10\frac{11}{24}$ pies : luego será $9\frac{1}{3} : 117\frac{3}{4} = 10\frac{11}{24} : 131\frac{1}{2}$, igual á la altura en las inclinaciones de Popa á Proa. Si las secciones horizontales de los Navíos , hechas por la superficie del agua , no fueren semejantes , será preciso calcular , para cada uno separadamente , la altura del meta-

metacentro, segun se ha visto en el exemplo del Navío de 60 Cañones.

CAPITULO 4.

Del centro de gravedad.

161 Con las reglas ya tantas veces repetidas para hallar el centro de gravedad de un cuerpo, se ve el modo de calcular el de un Navío, de cuyo conocimiento depende el de la estabilidad y todas sus rotaciones. Si el peso de cada una de las piezas ó efectos que componen ó se encierran en la Nave, se multiplica por la distancia desde su centro de gravedad al plano horizontal, que coincida con la Quilla, y la suma de todos estos productos se parte por el peso total, el quociente será la distancia desde el plano al centro de gravedad del todo del Navío. Este cálculo se hace dilatado y penoso por el gran número de piezas y pesos de distintas figuras que se necesitan exâminar; pero se puede hacer por partes: esto es, hallar primero el centro de gravedad de cierto número de ellas, y procéder con estas como en cada una separada. En la Tabla siguiente se manifiesta este modo de proceder, y la resulta del centro de gravedad del Navío.

Tabla primera y cálculo para hallar el centro de gravedad del casco del Navío.

	Su peso.	Altura de su centro.	Productos.
Quadernas................	8850	$6\frac{1}{2}$	57528
Tablas de dentro y fuera.....	8100	7	56700
Primera cubierta...........	2640	20	52800
Segunda cubierta...........	2100	27	56700
Sollado..................	2570	13	43410
Alcazar y Castillo..........	860	34	29240
Toldilla..................	250	40	10000
Quilla, Contraquilla, Zapata, y Sobrequilla...........	455	—1	—455
Bulárcamas y Busardas.......	650	5	3250
Carlingas.................	50	2	100
Mamparos de ladrillo y tabla..	300	7	2100
Timon..................	100	12	1200
Taxamar................	160	18	2880
Obra de Popa.............	40	27	1080
Suma.......	27125		316988
			455
Suma.........			316533

Partidos los 316533 por 27125, vienen al quociente 11 $\frac{2}{3}$ pies, altura del centro de gravedad del casco del Navío sobre la cara alta de la Quilla.

Tabla segunda y cálculo para hallar el centro de gravedad del todo del Navío.

	Su peso.	Altura del centro.	Productos.
Artillería	2400	24	57600
Balas	800	5	4000
Polvora	280	7	1960
Arboladura	670	55	36850
Xarcia, Velámen y Motonería pendiente	670	60	40200
Cables, Xarcia, Velámen y Motonería de respeto	1000	15	15000
Anclas	320	34	10880
Viveres de tres meses	2850	13	37050
Aguada de dos meses	1600	7	11200
Lancha, Bote y Serení	300	32	9600
Gente con su ropa	800	27	21600
Lastre	4935	3	14805
Sumas	16625		260745
Sumas precedentes	27125		316988
Sumas totales	43750		577733

Partidos los 577733 por 43750, vienen al quociente 13 $\frac{5}{24}$ pies, altura del centro de gravedad del todo del Navío sobre la cara alta de la Quilla.

162 Este cálculo es difuso si se lleva con la debida proligidad. Para la práctica de los Constructores será aun mejor, hallar la situacion del centro, por el de otro Navío ya hallado; atendiendo despues á las diferencias ó alteraciones que hubiere practicado en el suyo. Los principios expuestos nos facilitan el modo de executarlo con la ayuda de una sola experiencia, que

que repetidas veces practican los Marineros, y llaman *dar pendoles*. Se reduce á inclinar el Navío, pasandole á un lado toda la Artillería, Balas que están sobre las Cubiertas, Caxas y Cófanos de la Tripulacion, y á poner Pipas llenas de agua colgadas á los extremos de las Vergas, y sobre estas alguna gente. Con esto, por el lado que el Navío se eleva, descubre 2 ó 3 pies del costado sumergido, y se limpia esta parte, así como el resto hasta la Quilla, con escobillones propios para el efecto. Es operacion facil, y mucho mas lo será, si solo se executa para la especulacion que vamos á explicar. Se conoce el peso de los Cañones, Cureñas y Balas; el de los Cófanos, Pipas y gente; se sabe tambien el parage de donde se quitaron, y aquel donde se pusieron, con que es facil calcular su momento. En la equacion $\int\pi(p+\Pi) = (HP + \frac{1}{12}m\int e^3c)\,sen.\Delta$ (*Cor.* 1. *Prop.* 76. *Lib.* 2. *Tom.* 1.), π expresa un peso que se transporte á la distancia horizontal $p+\Pi$: ó $\int\pi(p+\Pi)$ la suma de los productos de todos los pesos que se transporten, por las distancias horizontales que se hubieren removido. Supongamos, pues, que p exprese esta distancia, y será $\int p\pi = (HP + \frac{1}{12}m\int e^3c)\,sen.\Delta$, que da la distancia desde el centro de volúmen al de gravedad $H = \frac{1}{P\,sen.\Delta}\int p\pi - \frac{1}{12v}\int e^3c$. La cantidad $\frac{1}{12v}\int e^3c$ es (§.150) la distancia desde el centro de volúmen al metacentro: luego $\frac{1}{P\,sen.\Delta}\int p\pi$ será la distancia desde el metacentro al centro de gravedad.

163 Para hallar este no necesitamos ya sino medir en la experiencia con exâctitud el ángulo de la inclinacion Δ; ó lo que es lo mismo, medir exâctamente en

en la Quaderna maestra la parte de costado que salió fuera del agua, que supuesto sea esta g, y A la manga del Navío, será $\frac{g}{\frac{1}{2}A} = sen.\Delta$, ó $sen.\Delta = \frac{2g}{A}$. Medir tambien las distancias á que se transportaren los pesos π, pues con ello se tendrá facilmente el valor de $\frac{1}{P sen.\Delta} \int p\pi$.

164 En el Navío de 60 Cañones, que nos sirvió de exemplo, el peso de toda la Artillería baxa de un lado, con sus Cureñas y Balas es de 720 quintales, que multiplicado por 27, distancia que se transporta, hacen 19440 de momento. El de la segunda bateria es de 611, que multiplicado por 29, hacen 17719 de momento. El que corresponde á 3 Cañones del Alcazar es de 99, que multiplicado por 29, hacen 2871 de momento. El de los Cófanos y Caxas será de 300, que multiplicados por 18, hacen 5400 de momento. El de las Pipas en las Vergas, con la Xarcia que los suporte, es de 20, que multiplicado por 40, hacen 800 de momento; y el de 20 hombres puestos en cada Verga mayor es de 2440 de momento. Todas estas cantidades juntas suman el momento de $48670 = \int p\pi$. Si suponemos ahora $sen.\Delta = \frac{1}{8}$, ó lo que es lo mismo $g = 2\frac{11}{16}$ pies, siendo el peso total del Navío de 43750 quintales, será en él la distancia desde el metacentro al centro de gravedad $= \frac{1}{P.sen.\Delta} \int p\pi = \frac{8.48670}{43750} = 8\frac{11}{12}$ pies. El centro de gravedad estará en este caso de $sen.\Delta = \frac{1}{8}$, á $8\frac{11}{12} - 11\frac{1}{2} = 2\frac{7}{12}$ pies mas alto que el centro de volúmen.

165 Este centro se halló (§.144) $7\frac{1}{6}$ mas baxo que la superficie del agua, y esta dista de la Quilla (§§. 108. 144.) 18 pies: luego el centro de volúmen queda elevado sobre la Quilla $10\frac{5}{6}$ pies; y el de gravedad

10,

$10\frac{5}{6}+2\frac{7}{12}=13\frac{5}{12}$ pies: esto es, $2\frac{1}{2}$ pulgadas mas alto que lo que resultó por el cálculo. Si se supone *sen.*Δ menor, resultará el centro mas baxo: la experiencia es quien dará la verdadera medida.

166 Si con los datos antecedentes se quiere hallar la verdadera inclinacion que ha de tomar el Navío, respecto que el centro de volúmen queda elevado sobre la Quilla de $10\frac{5}{6}$, y el de gravedad (§.161) $13\frac{5}{24}$, distarán estos centros $2\frac{9}{24}$: lo que substraido de $11\frac{1}{2}$ pies, que (§.154) está elevado el metacentro sobre el de volúmen, quedan $9\frac{3}{24}$, altura del metacentro sobre el centro de gravedad: luego $\frac{1}{P sen.\Delta}\int p\pi=9\frac{3}{24}$, que da $sen.\Delta=\frac{\int p\pi}{P.9\frac{3}{24}}$, ó substituyendo $\int p\pi=48670$, y $P=43750$, será $sen.\Delta=\frac{48670}{43750.9\frac{3}{4}}=\frac{1219}{10000}$: donde se ve que esta inclinacion debe ser algo menor que el $\frac{1}{8}$ que antes se supuso.

167 Para hallar lo que la cantidad H, ú distancia entre los dos centros de gravedad y volúmen se altera, por aumentar el volúmen sumergido en el fluido, bien sea dando mas llenos á las Quadernas, ó sumergiendo mas el Navío: supongamos p el nuevo peso en lastre que se agregue, f la distancia desde el centro de volúmen del Navío al centro del nuevo volúmen que se agrega, y g la distancia desde este mismo centro al del lastre que se agrega, y tendrémos $P+p : p = f : \frac{pf}{P+p}$ distancia desde el primitivo al nuevo centro de volúmen: y por consiguiente $H+\frac{pf}{P+p}$ será la distancia desde el primitivo centro de gravedad al nuevo centro de volúmen. Asimismo serán $P+p : p = f+H+g : \frac{(f+H+g)p}{P+p}$, distancia desde el primitivo al nuevo centro

tro de grávedad: por consiguiente la dístancia entre los dos nuevos centros de gravedad y de volúmen será $H+\frac{pf}{P+p}-\frac{(f+H+g)p}{P+p}=\frac{PH-pg}{P+p}$: ó porque p se supone despreciable respecto de P, será dicha nueva dístancia entre los dos centros $=H-\frac{pg}{P}$: ó substituyendo en lugar de P y p los volúmenes v y w, será $=H-\frac{wg}{v}$. Siempre que estubiere mas baxo el centro de gravedad del lastre que se agrega, que el del volúmen que se añada, es g positivo, y al contrario: y p ó w positivo, si se aumentare peso ó volúmen; y negativo si se substragere. Si se le dieren mas llenos al Navío, cargandolo á mayor profundidad del correspondiente lastre al volúmen de aumento, será menor H, y por consiguiente mayor la distancia desde el centro de gravedad al metacentro, y menor la inclinacion Δ: lo mismo debe suceder quando se ponga mas lastre, aunque no se aumente otro algun volúmen mas que el que el Navío sumerja por causa del lastre añadido; pero si se aumentaren los llenos, y no se añadiere mas peso, serán dos los valores de wg, uno positivo por el volúmen aumentado, y otro negativo por el volúmen que salga fuera del agua: la suma de ambos será el producto del volúmen añadido w, por la distancia desde su centro al centro del volúmen que salga fuera del agua, producto negativo: con que siendo f esta distancia, será H mayor de $\frac{fw}{v}$. Al contrario debe suceder si se quitaren ú disminuyeren los llenos: y así, á volúmenes iguales con los valores $fe^{3}c$, tambien iguales, el Navío que menos llenos tenga, ó cale mas agua, tendrá menor H, y padecerá menor inclinacion Δ.

168 El Navío de 70 Cañones tiene 8 pulgadas de menos elevacion en el entrepuentes de la que le correspondia arreglandolo por el Navío de 60: y de estas mismas baxa la cubierta segunda, toda su baleria y las obras que están sobre ella. Del volúmen que el casco ocupó, respecto del que debia ocupar arreglado al Navío de 60, hay (§. 126) 5524 pies de diferencia, que equivalen á 3520 quintales de peso, que el casco tenia de menos. El peso total que el Navío debia tener, baxo la misma regla, es de 65306: con que rebaxando los 3520, quedan 61786 quintales por el peso que debia tener; pero por la experiencia se hallan solo 61499: luego tubo de menos en lastre la diferencia 287 quintales. El pedazo de costado de 8 pulgadas menos, pesa 280 quintales, que multiplicados por 30 pies, altura que tubiera sobre la cara alta de la Quilla, producen 8400 de momento: toda la cubierta segunda, con la bateria y obras superiores, pesan 6900 quintales, que multiplicados por $\frac{2}{3}$, ó las 8 pulgadas que baxa, producen 4600 de momento: y los 287 quintales menos de lastre, multiplicados por $3\frac{1}{2}$, producen el momento $1004\frac{1}{2}$. Supuesto ahora que los 3520 quintales de menos peso que tenia el casco, se hayan rebaxado proporcionalmente de todas las partes que los componen, el centro de gravedad de ellos concurrirá con el del mismo casco, que arreglado al del Navío de 60 (§. 161) debe estar elevado sobre la cara alta de la Quilla de $\frac{11\frac{2}{3}\cdot 49\frac{1}{2}}{43} = 13\frac{3}{7}$ pies: y por tanto, multiplicando por ellos los 3520, resultan 47269 de momento: de suerte que todos quatro juntos producen el momento $61273\frac{1}{2}$. El peso total del Navío ya diximos que debiera haber sido de 65306, y su centro de gravedad se havia de elevar sobre la Quilla, segun el Navío de 60, de $\frac{13\frac{5}{24}\cdot 49\frac{1}{2}}{43} = 15\frac{1}{4}$ pies:

con

con que su momento fuera $981933\frac{1}{2}$. Restando de estos los $61273\frac{1}{2}$, quedan 920660, momento verdadero del Navío, que dividido por su peso 61499 quintales, vienen al quociente 15 pies menos $\frac{1}{3}$ de pulgada, altura de su centro de gravedad sobre la cara alta de la Quilla: de suerte, que de esta altura, á la que procedió arreglando el Navío por el de 60, no hay sino $3\frac{1}{2}$ pulgadas de diferencia. Si despues de esto se quisiere que el Navío lleve la bateria baxa de 36, esta tendrá 550 quintales de mas peso, que multiplicados por 26, producen 14300 de momento. Añadidos estos á los 920660, hacen 934960, que divididos por $61499 + 550 = 62049$, resultan 15 pies y $\frac{4}{5}$ de pulgada, altura del centro de gravedad sobre la cara alta de la Quilla: de suerte, que la Artillería de á 36 no eleva el centro sino solo de $\frac{1}{3} + \frac{4}{5}$ de pulgada $= 1\frac{2}{15}$ pulgadas; cantidades todas verdaderamente despreciables,

169 La Fragata de 22 Cañones, ya se dixo (§.120) que tiene menos, respecto al Navío de 70, el Sollado, la Toldilla, 16 Quadernas, y 880 quintales en Artillería y sus utensilios: y (§.127) que llevaba 608 quintales de menos lastre, y 1920 quintales en el mayor grueso de maderas. El Sollado estubiera elevado sobre la Quilla $9\frac{3}{4}$ pies, y siendo su peso 1140 quintales, fuera su momento 11115. La Toldilla estubiera elevada de $30\frac{5}{21}$ pies, y siendo su peso 170 quintales, sería su momento 5140. Las 16 Quadernas tubieran su centro elevado 5 pies: luego su momento fuera 3700. La Artillería tubiera su centro elevado 20 pies: luego su momento sería 17600: y los 608 quintales de lastre tubieran su centro elevado $2\frac{1}{4}$ pies: luego fuera su momento 1368. El centro de gravedad del todo de la Fragata, proporcionada con el Navío, debiera elevarse sobre la Quilla $\frac{15 \cdot 31\frac{2}{3}}{48} = 9$ pies $10\frac{5}{4}$

pulgadas: y supuesto que el exceso de maderas tubiese el mismo centro, será su momento 19000. Los cinco primeros montan 38923, y substrayendo de ellos los 19000, quedan 19923. La Fragata, arreglada al Navío, debiera tener (§.120) 27708 pies cúbicos de volúmen sumergido en el fluido, ó 17658 quintales de peso, que multiplicados por 9 pies 10 $\frac{1}{4}$ pulgadas, producen el momento 174741: restando de este los 19923, quedan 154818, que partidos por el verdadero peso de la Fragata 16040 quintales, resultan 9 $\frac{2}{3}$, altura de su centro de gravedad sobre la cara alta de la Quilla: de suerte, que de la colocacion del centro, estando enteramente dispuesta como el Navío, á su legitima colocacion, no hay mas que 2 $\frac{1}{4}$ pulgadas de diferencia.

170 El Navío de 80 Cañones tendrá su centro de gravedad semejantemente dispuesto que el de 70: esto es, á la altura sobre la Quilla de 15 $\frac{11}{16}$ pies; ó por lo poco que baxó respectivamente á los Navíos de 60 y 70, á 15 $\frac{5}{6}$ pies; pero el volúmen que debe tener sumergido en el fluido es (§.117) de 111500 pies: luego su peso será de 71058 quintales, que multiplicados por los 15 $\frac{5}{6}$ pies, producen su momento = 1125095. El Navío de tres puentes tiene uno mas que el de 80 Cañones, y en él 4200 quintales entre maderas y herrages, que multiplicados por 43 $\frac{1}{2}$ pies que estará su centro elevado sobre la Quilla, producen 182700 de momento. La Artillería y sus pertrechos, que vá en el mismo puente, supuesta de 12, pesa 1200 quintales, que multiplicados por 41 $\frac{1}{2}$, altura de su centro, producen 49800 de momento. Toda la obra desde el tercer puente arriba pesa 2700 quintales, y multiplicados por 7 pies, que es lo que se eleva, producen 18900 de momento. Doscientos hombres mas de Tripulacion con sus cófanos, pesarán 400 quintales, y multiplicados por 40, á que ascenderá su centro, producen 16000

de

de momento. Tres meses de viveres para estos 200 hombres pesan 1125 quintales, que multiplicados por 14 pies, producen el momento 15750. Dos meses de aguada para los mismos pesan 750 quintales, y multiplicados por 8 producen 6000 de momento: y ultimamente 3000 quintales de lastre mas, multiplicados por 4, producen el momento 12000. Todos los siete juntos suman 301150, que agregados á los 1125095, hacen 1426245, y partiendo éstos por el peso del Navío 81733, vienen al quociente 17 pies $5\frac{2}{5}$ pulgadas, altura del centro de gravedad sobre la cara alta de la Quilla en el Navío de tres puentes: esto es, tendrá este su centro $1\frac{37}{60}$ pies mas alto que el Navío de 80 Cañones.

171 Para hallar lo que en estos Navíos se eleva el metacentro sobre el centro de gravedad, es preciso determinar primero la cantidad que tienen sumergida en el fluido: esto es, la altura de la superficie del agua sobre la Quilla, para deducir por esta la del centro de volúmen sobre la misma Quilla. En el §. 144 se halla esta expresion $\frac{v - \frac{m^3 V}{M^3}}{a}$, que denota la altura que ha de tener de menos ó mas calado el Navío de 60 para quedar en la misma disposicion que otro, expresando $m = 42$ la manga de aquel Navío, $v = 68650$ su volúmen, $a = 5500$ el area ó seccion de la superficie del fluido, y M la manga, y V el volúmen del otro, qualquiera que sea. Esta expresion se reduce pues á $\frac{68650 - \frac{74088 V}{M^3}}{5500}$. Para el Navío de 70 Cañones en que es $V = 96500$, y $M = 48$, quedará en $\frac{68650 - \frac{74088 . 96500}{110592}}{5500} = \frac{8}{11}$: y de esta suerte,

pa-

para que el Navío de 60 quede en la misma disposicion que el de 70, solo debe calar $18 - \frac{8}{11} = 17\frac{3}{11}$ pies: haciendo, pues, esta proporcion $42 : 48 = 17\frac{3}{11} : 20$, serán estos los pies de agua que calará el Navío de 70, ó lo que la superficie del agua se elevará sobre la Quilla. Substraiganse de estos los $7\frac{5}{6}$ pies que (§.146) el centro de volúmen está debaxo de la superficie del agua, y quedarán $12\frac{1}{6}$, altura de este centro sobre la Quilla; pero el centro de gravedad se eleva sobre esta (§.168) de 15 pies: luego distan los dos centros de volumen y gravedad $2\frac{5}{6}$ pies, que substraidos de $13\frac{1}{2}$ que (§.155) el metacentro se eleva sobre el primero, quedan $10\frac{2}{3}$, altura del metacentro sobre el centro de gravedad.

172 Para la Fragata de 22 Cañones, en que es $V = 25170$, y $M = 31\frac{2}{3}$, tendremos --------

$$\frac{68650 - \frac{74088 \cdot 25170}{31754}}{5500} = 1\frac{4}{5}:$$

con que para que quede el Navío de 60 en la misma disposicion que ella, solo debe calar $18 - 1\frac{4}{5} = 15\frac{1}{5}$, y por la proporcion $42 : 31\frac{2}{3} = 16\frac{1}{5} : 12\frac{3}{14}$, serán $12\frac{3}{14}$ pies los que calará la Fragata. Substrayendo de estos $4\frac{19}{24}$ que está (§.147) el centro de volúmen debaxo de la superficie del agua, quedarán $7\frac{9}{21}$, altura de este centro sobre la Quilla, que quitada de $9\frac{14}{21}$ que es (§.169) la del centro de gravedad, quedarán $2\frac{5}{21}$ por lo que se eleva este centro sobre el otro; ultimamente, quitando esta cantidad de $9\frac{14}{21}$ (§.156) altura del metacentro sobre el centro de volúmen, quedan $7\frac{3}{7}$, altura de aquel sobre el centro de gravedad.

173 Para el Navío de tres puentes, en que es (§.148) $V = 128293$, y $M = 51$, tendremos ----

$$\frac{68650 - \frac{77088 \cdot 128293}{132651}}{5500} = \frac{6}{11};$$

con que para que quede el

el Navío de 60 en la misma disposicion que este; debe calar 18 $\frac{6}{11}$ pies, y por la proporcion $42 : 51 = 18\frac{6}{11} : 22\frac{11}{21}$, serán 22 $\frac{11}{21}$ pies los que calará el Navio de tres puentes. Substrayendo de estos 9, que (§.148) está el centro de volúmen debaxo de la superficie del fluido, quedan 13 $\frac{11}{21}$, altura de este centro sobre la Quilla, que quitada de 17 $\frac{9}{20}$ que es (§.170) la del centro de gravedad, quedarán 3 $\frac{13}{14}$ por lo que se eleva este centro sobre el otro: ultimamente, quitando esta cantidad de 12 $\frac{4}{5}$ (§.157) altura del metacentro sobre el centro de volúmen, quedan 8 $\frac{6}{7}$, altura de aquel sobre el centro de gravedad.

174 Esta altura del metacentro sobre el centro de gravedad en el Navío de tres puentes es excesiva, respecto á la que nos describe *Mr. Bouguer* en su *Tratado del Navío* (pag.284), pues la limita á solo uno ú dos pies; por tanto no podemos eximirnos de decir, que es preciso padeciese alguna equivocacion. Para hacerlo mas patente volvamos á valernos de la expresion $\frac{r}{P sen.\Delta}\int p\pi$, que es la distancia desde el centro de gravedad al metacentro, y será, segun *Mr. Bouguer*, $\frac{1}{P sen.\Delta}\int p\pi = 2$. Supongamos ahora, que en el Navío solo se pase de un lado á otro la Artillería que basta; prescíndase de los Cófanos, Caxas, Pipas, Gente en las Vergas, &c. La Artillería con sus Cureñas pesa 2510 quintales, y la distancia media á que se muda es de 38 pies: luego $\int p\pi = 2510 . 38 = 95380$. P es igual (§.170) 81733 quintales; con que será $\frac{95380}{81733 sen.\Delta} = 2$, que da $sen.\Delta = \frac{95380}{163466}$, que es seno de 35°. 42': inclinacion tan espantosa como estraña para todo Marinero: con ella llegaría el Navío á poner debaxo

baxo del agua toda la segunda Batería. Segun nuestra resolucion, será $\frac{95380}{81733 sen.\Delta} = 8\frac{6}{7}$, que da $sen.\Delta = \frac{95380}{723921}$, ó con corta diferencia $sen.\Delta = \frac{10}{76}$: inclinacion regular, poco mayor que la hallada en el Navío de 60: con ella, solo se inclinará el costado $3\frac{1}{2}$ pies.

CAPITULO 5.

De las resistencias horizontales que padece la Nave.

175 AUnque las resistencias horizontales que padece la Nave pueden ser infinitas, segun la disposicion que dieren á sus Velas, podemos reducirlas á solo dos: una la perpendicular á la Quilla, que nos servirá no solo para calcular la verdadera estabilidad y momento en la rotacion que llaman *baláncе*, sino tambien para deducir en la marcha obliqua las efectivas fuerzas de que resulta: y otra, segun la direccion de la misma Quilla, que servirá para iguales efectos. Como el Navío no tiene figura de cuerpo regular, habremos de reducirnos á calcular por partes sus resistencias, ó á averiguar la que padecen todas las quadriculas, en que se divide la parte sumergida en el fluido con planos horizontales y verticales.

176 La fuerza que padece una de estas quadrículas en la parte que impele el fluido, se halló (*Corol.* 1. *Propos.* 43. *Lib.* 2. *Tom.* 1.) $= \frac{}{mc\left(Da + \frac{1}{6}u\,sen.\theta\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2 a\,sen.\theta^2\right)}$, y en la parte que es impelida por el fluido $= \frac{}{mc}$

$$mc\left(Da - \tfrac{1}{6}u\,sen.\Theta\left((D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \tfrac{1}{64}u^2 a\,sen.\Theta^2\right),$$

expresando *m* la densidad del fluido, *c* la distancia entre las dos paralelas á la direccion del movimiento, que pasan por los extremos de la quadrícula, *a* la altura de esta misma, D la altura desde el centro de la quadrícula á la superficie del fluido, θ y Θ los ángulos que forman la direccion horizontal del movimiento con la quadrícula, y *u* la velocidad. Para deducir la resistencia es preciso, como se hizo en el mismo Corolario, substraer la ultima fuerza de la primera, y resulta $\frac{1}{6}mcu(sen.\theta + sen.\Theta)\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}mcu^2(sen.\theta^2 - sen.\Theta^2)$, que es la resistencia procedente de la accion del fluido en las quadrículas correspondientes opuestas, ó que estan en la misma línea horizontal paralela á la direccion del movimiento, expresando θ el ángulo que forma esta direccion con una quadrícula, y Θ el que forma con la otra; y como los senos de estos ángulos varían en quantas distintas inclinaciones puede tomar el Navío: se sigue, que para otras tantas era preciso hacer separadamente el cálculo; pero podemos reducirnos al único de una inclinacion infinitamente pequeña, porque de ella se puede inferir casi el todo: y para los que quisieren mayor justificacion podrán calcular uno ó dos casos mas. Supondremos, pues, el Navío perfectamente derecho, y por consiguiente en las resistencias laterales serán $\theta = \Theta$: lo que reduce esta en las quadrículas de ambos lados á $\frac{1}{3}mcu\,sen.\theta\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}mcuD^{\frac{1}{2}}a\,sen.\theta\left(1 - \frac{a^2}{96D^2} - \frac{a^4}{2048D^4} - \&c\right)$; ó porque siendo *a* corta respecto de D, pueden despreciarse todos los terminos de la serie, excepto el primero, se

reducirá á $\frac{1}{2}mcuD^{\frac{1}{2}}a sen.\theta$. En las resistencias de Popa á Proa no podemos suponer precisamente $sen.\theta = sen.\Theta$, porque la parte de Proa no es enteramente semejante á la de Popa; pero resultando despreciable la cantidad $sen.\theta^2 - sen.\Theta^2$, podemos reducirlas á - - - - - $\frac{1}{6}mcu(sen.\theta + sen.\Theta)\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right)$: esto es, á $\frac{1}{2}mcuD^{\frac{1}{2}}a sen.\theta$ para la parte de Proa, y á $\frac{1}{2}mcuD^{\frac{1}{2}}a sen.\Theta$ para la de Popa. En el (*Cor.* 11. *Lem.* 1. *Lib.* 2. *Tom.* 1.) hallamos $sen.\theta = sen.\lambda sen.\eta$, expresando λ el ángulo que forma la direccion del movimiento con la base de la quadrícula, y η el ángulo que forma la misma quadrícula con el horizonte: luego tambien será la resistencia lateral, como las fuerzas en Proa y Popa, $=$ $\frac{1}{2}mcuD^{\frac{1}{2}}a sen.\lambda sen.\eta$ inclusos ambos lados.

177 Para hallar ahora los valores que incluye esta
Lam. 1. Fig. 32. fórmula sean en el plano horizontal del Navío AB, CD la representacion de dos quadernas, y AC, BD la de dos líneas de agua, ó secciones horizontales que encierran la quadrícula ABDC. Por el centro de ella E tírese otra seccion horizontal FEG: báxese la FH perpendicular á CD, y la HI á FEG: tírese KL perpendicular á esta: levántese sobre ella la perpendicular $LM = a$, altura ú distancia entre las dos líneas de agua: júntese la MK, y sobre ella báxese la perpendicular LN. Con esto, siendo en las resistencias laterales $FH = c$, y el seno de $BFG = HGI = sen.\lambda$, será $1 : sen.\lambda = c : FI$, que supondremos $= f, = c sen.\lambda$: y para las resistencias de Popa á Proa: siendo $HG = c$, y el seno de $HFG = LHG = sen.\lambda$, será $1 : sen.\lambda = c : IG = f = c sen.\lambda$. Para ambas resistencias, siendo MKL la inclinacion que la quadrícula tiene con el horizonte, será $MKL = MLN$ el ángulo η: con que será $1 : sen.\eta = a = ML : MN = a sen.\eta$, que llamaremos g. Substituyendo estos valores en la fórmula, será

será la resistencia lateral, asi como la fuerza en Proa ó Popa, $= \frac{1}{2} mfgD^{\frac{1}{2}}u$; con solo la diferencia que para la primera es $f = FI$, y para las segundas $f = IG$. Tirando, pues, igual disposicion de líneas en cada una de las quadrículas del plano horizontal del Navío, se hallarán los valores de f y g, y multiplicados entre sí, el de fg, asi como el de $fgD^{\frac{1}{2}}$: hecha despues la suma de todos, se multiplicará por $\frac{1}{2}mu$, y se tendrá la resistencia total, á excepcion de la que resulta de la desnivelacion del fluido.

178 Con este méthodo se ha dispuesto, para mejor orden, la Tabla siguiente, deducida del plano del Navío de 60 que nos sirve de exemplo, con la distincion de haber llamado F la cantidad que corresponde á la resistencia lateral. Cada una de las quadrículas de la Tabla corresponde á la del plano que denotan los dos títulos de la cabeza, y del lado izquierdo de la Tabla.

179 Hechos ahora todos los produćtos Fg, y fg, resultará la Tabla segunda: y la suma de sus colunas verticales, serán las sumas de las Fg, y fg comprehendidas entre las líneas de agua que expresa la cabeza de la misma Tabla.

180 Cada suma de estas se ha de multiplicar por su correspondiente $D^{\frac{1}{2}}$, que es la raiz de la distancia desde el centro de las Quadrículas á la superficie del agua: y respećto que la distancia entre las líneas de agua es $3\frac{1}{2}$ pies, tendremos para las quadrículas comprehendidas entre la primera y segunda $D^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3\frac{1}{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$: para la comprehendida entre segunda y tercera $D^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3 \cdot 3\frac{1}{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{23}{10}$: para entre la tercera y quarta $D^{\frac{1}{2}}$

Entre las líneas de agua.

	1ª y 2ª			2ª y 3ª		
Entre las Quadernas.	F	*f*	*g*	F	*f*	*g*
Roda y XXVII	1 7	3 3	3 0			
XXVII XXIV	4 9	5 9	2 11	5 0	6 2	2 8
XXIV XXI	5 11	3 0	3 1	5 8	3 7	2 8
XXI XVIII	6 5	1 2	3 2	6 4	1 6	2 9
XVIII XV	7 1	0 6	3 3	6 10	0 8	2 11
XV XII	7 1	0 3	3 3	6 11	0 5	3 0
XII IX	7 2	0 2	3 4	7 0	0 3	3 1
IX VI	7 2	0 1	3 4	7 1	0 2	3 1
VI III	7 2	0 0	3 4	7 2	0 1	3 2
III 0	7 2	0 0	3 4	7 2	0 0	3 2
0 3	6 2	0 0	2 10	6 2	0 0	2 9
3 6	7 2	0 0	3 4	7 2	0 1	3 2
6 9	7 2	0 0	3 4	7 1	0 2	3 1
9 12	7 2	0 0	3 4	7 0	0 3	3 0
12 15	7 1	0 1	3 3	7 0	0 3	3 0
15 18	7 1	0 1	3 3	6 11	0 4	3 0
18 21	7 0	0 2	3 3	6 10	0 6	3 0
21 24	7 0	0 4	3 2	6 8	0 9	2 11
24 27	6 11	0 8	3 2	6 6	1 2	2 11
27 30	6 7	1 4	2 7	6 2	2 0	2 6
30 33	5 10	3 0	2 5	6 0	2 8	2 5
33 y Codaste.	2 6	5 2	2 10	3 2	1 10	3 0

Entre las líneas de agua.

3ª y 4ª			4ª y 5ª			5ª y Quilla.		
F	*f*	*g*	F	*f*	*g*	F	*f*	*g*
3 3	2 3	2 10						
5 10	2 10	3 0	7 1	2 3	2 6	4 10	0 6	3 2
6 1	2 2	2 4	6 2	1 8	2 0	6 10	0 6	2 6
6 9	1 0	2 6	6 8	1 2	1 9	7 0	0 6	1 6
6 10	0 6	2 8	6 10	0 9	1 9	7 0	0 6	1 1
6 11	0 2	2 9	7 0	0 6	2 0	7 1	0 5	1 1
7 0	0 1	2 10	7 1	0 3	2 2	7 2	0 3	1 1
7 1	0 0	2 10	7 2	0 1	2 3	7 2	0 1	1 0
7 2	0 0	2 11	7 2	0 0	2 4	7 2	0 0	1 0
6 2	0 0	2 6	6 2	0 0	2 0	6 2	0 0	0 10
7 2	0 0	2 10	7 2	0 1	2 4	7 2	0 1	1 0
7 1	0 1	2 10	7 1	0 3	2 3	7 2	0 1	1 1
7 0	0 2	2 9	7 1	0 4	2 3	7 1	0 2	1 2
6 11	0 3	2 8	7 0	0 6	2 2	7 1	0 2	1 3
6 10	0 6	2 7	6 10	0 8	1 9	7 0	0 3	1 5
6 9	0 10	2 5	6 8	1 0	1 6	7 1	0 3	1 7
6 8	1 2	2 4	6 10	0 10	2 0	7 2	0 2	1 10
6 7	1 2	2 4	6 10	0 8	2 6	7 2	0 2	2 7
6 7	1 2	2 7	6 10	0 6	2 10	7 2	0 1	3 0
6 10	1 2	2 11	7 1	0 4	3 2	7 2	0 0	3 4
3 4	0 6	3 3	2 8	0 1	3 5	2 8	0 0	3 5

Entre las líneas de agua.

		1ª y 2ª				2ª y 3ª			
		Fg		fg		Fg		fg	
	Roda y XXVII	4	9	5	2				
	XXVII XXIV	13	10	16	9	13	4	16	5
	XXIV XXI	18	3	9	3	15	1	9	7
	XXI XVIII	20	4	3	8	17	5	4	2
	XVIII XV	23	0	1	7	19	3	2	0
	XV XII	23	0	0	10	20	9	1	3
	XII IX	23	11	0	7	21	7	0	9
	IX VI	23	11	0	3	22	6	0	6
Entre las Quadernas.	VI III	23	11	0	0	22	8	0	3
	III 0	23	11	0	0	22	8	0	0
	0 3	17	6	0	0	16	11	0	0
	3 6	23	11	0	0	22	8	0	0
	6 9	23	11	0	0	22	6	0	6
	9 12	23	4	0	0	21	0	0	9
	12 15	23	0	0	3	21	0	0	9
	15 18	23	0	0	3	20	9	1	0
	18 21	22	9	0	6	20	6	1	6
	21 24	22	2	1	1	19	5	2	2
	24 27	21	11	2	1	19	0	3	4
	27 30	17	0	3	4	15	5	5	0
	30 33	14	1	7	3	14	6	6	5
	33 y Codaste.	7	1	14	7	9	6	5	6
	Sumas.	433	6	67	6	400	5	61	10

productos Fg, y fg.

Entre las líneas de agua.

3ª y 4ª		4ª y 5ª		5ª y Quilla.	
Fg	fg	Fg	fg	Fg	fg
9 2	6 4				
17 6	8 6	17 8	5 7	15 4	1 7
14 2	5 1	12 4	3 4	17 1	1 3
16 10	2 6	11 8	2 1	10 6	0 9
18 3	1 3	12 0	1 4	7 7	0 7
19 0	0 6	14 0	1 0	7 7	0 5
19 10	0 3	15 4	0 7	7 4	0 3
20 1	0 0	16 2	0 2	7 2	0 1
20 11	0 0	16 9	0 0	7 2	0 0
15 5	0 0	12 4	0 0	5 2	0 0
20 4	0 0	16 9	0 2	7 2	0 1
20 1	0 3	15 11	0 7	7 9	0 1
19 3	0 6	15 11	0 9	8 3	0 2
18 5	0 8	15 2	1 1	8 10	0 3
17 8	1 4	12 0	1 2	9 11	0 4
16 4	2 0	10 0	1 6	11 3	0 4
15 7	2 9	13 8	1 8	12 10	0 4
15 4	2 9	17 1	1 8	18 6	0 5
17 0	3 0	19 4	1 5	21 6	0 3
19 11	3 4	22 5	1 1	23 11	0 0
10 10	1 8	9 1	0 3	9 1	0 0
361 11	42 8	295 8	25 5	223 11	7 2

$D^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{5 \cdot 3\frac{1}{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{71}{24}$: para entre la quarta y quinta

$D^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{7 \cdot 3\frac{1}{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{7}{2}$: y para entre la quinta y la Quilla

$D^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{9 \cdot 3\frac{1}{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{127}{32}$; serán pues

$433\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = 578$	$67\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = 90$
$400\frac{5}{12} \cdot \frac{23}{10} = 921$	$61\frac{5}{6} \cdot \frac{23}{10} = 142$
$361\frac{11}{12} \cdot \frac{71}{24} = 1071$	$42\frac{2}{3} \cdot \frac{71}{24} = 126$
$295\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{2} = 1035$	$25\frac{5}{12} \cdot \frac{7}{2} = 89$
$223\frac{11}{12} \cdot \frac{127}{32} = 889$	$7\frac{1}{6} \cdot \frac{127}{32} = 29$
Suma. . . . 4494	Suma. . . . 476

La suma 4494 es el valor de $\int FgD^{\frac{1}{2}}$, y la 476 el de $\int fgD^{\frac{1}{2}}$: con que la resistencia lateral será $\frac{1}{2}mu\int FgD^{\frac{1}{2}} = 2247mu$, y la resistencia por la Proa $\frac{1}{2}mu\int fgD^{\frac{1}{2}} = 238mu$.

281 A estas resistencias es preciso añadir las que causan la tablazon, la Quilla, Codaste, Roda, Taxamar y Timon, que no incluimos en el cálculo. La tablazon aumenta la manga del Navío del grueso de las tablas, conservando el costado con las mismas inclinaciones respecto de las Quadernas: luego en la fórmula de la resistencia de Proa $\frac{1}{2}mcuD^{\frac{1}{2}}a\,sen.\theta$, aumenta la c en la misma proporcion que aumenta la manga, y por consiguiente, en la misma debe aumentar el todo de la resistencia $238mu$: la manga en el Navío de nuestro exemplo es de 42 pies, y por el aumento podemos poner 1 pie, respecto que las mas gruesas tablas son de 8 pulgadas, y las mas delgadas de 4, cuyo me-

medio es 6, y por ambos costados 12: luego será el aumento de la resistencia de Proa de $\frac{1}{42}$ ó $5\frac{2}{3}$. También aumenta $D^{\frac{1}{2}}a$, porque las tablas próxîmas á la Quilla, que son de 4 pulgadas, aumentan la profundidad del Navio de esta cantidad: la primera era de $5.3\frac{1}{2} = 17\frac{1}{2} = \frac{35}{2}$, luego en lugar de $\frac{35}{2}$, que antes teniamos, será con la tabla $\frac{35}{2} + \frac{1}{3}$, y $D^{\frac{1}{2}}a$ variará en la razon de $\left(\frac{35}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$ á $\left(\frac{35}{2} + \frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, ó en la de $\left(\frac{35}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$ á $\left(\frac{35}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\left(\frac{35}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3}$: esto es, de 35 á 36, por lo que el aumento es de $\frac{1}{35}$, ú de $6\frac{4}{5}$. La Quilla, Codaste y Roda, no dan aumento á la resistencia de Proa. El canto de Popa del Timon podemos considerarle como un rectángulo vertical, cuyo ancho sea su grueso medio, un pie, y su altura los 21 pies que está sumergido debaxo del agua, y considerando igual cantidad á Proa por el Taxamar, será la resistencia que producirán (*Cor.* 3. *Prop.* 36. *Lib.* 2. *Tom.* 1.) $= \frac{1}{3}mba^{\frac{3}{2}}u$, suponiendo b el ancho, y a la profundidad: esto es, $\frac{1}{3}mu \cdot (21)^{\frac{3}{2}} = 32mu$ con corta diferencia. Las tres nuevas resistencias hacen proxîmamente $44mu$: luego agregandolas á la $238\,mu$, será el todo de la resistencia de Proa $282\,mu$.

182 La tablazon no aumenta sensiblemente el valor de la c en la fórmula $\frac{1}{2}mcuD^{\frac{1}{2}}a\,sen.\theta$ por lo que toca á la resistencia lateral; antes puede asegurarse que disminuye θ, á causa del mayor grueso que tienen las tablas altas que las baxas; pero ambas alteraciones son despreciables. La cantidad $D^{\frac{1}{2}}a$ aumenta en la misma razon que antes diximos de $\frac{1}{35}$: luego será de $\frac{2247}{35} = 64\frac{1}{5}$. La Quilla, Contraquilla y Zapata, se pueden considerar como un rectángulo vertical igualmente distante de la superficie del agua: su altura de 2 pies:

su longitud de 130, y la distancia desde su centro á la superficie del agua $18\frac{1}{2} = \frac{37}{2}$: su resistencia será pues $\frac{1}{2}mubaD^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}mu \cdot 130 \cdot 2\left(\frac{37}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 560\frac{1}{6}mu$. El

Fig.33. Codaste y Timon juntos pueden suponerse un trapecio vertical, como ACEB: suponiendo $AC = BF = a$, $AB = CF = e$, $FE = f$, y $AG = x$, será $GH = e + \frac{fx}{a}$: substituyendo esta cantidad por c, x por D, y dx por a en la fórmula $\frac{1}{2}mucD^{\frac{1}{2}}a$, será la resistencia que padecerá una diferencial del trapecio $= \frac{1}{2}mu\left(e + \frac{fx}{a}\right)x^{\frac{1}{2}}dx$, cuyo integral $\frac{1}{2}mu\left(\frac{2}{3}ex^{\frac{3}{2}} + \frac{2fx^{\frac{5}{2}}}{5a}\right)$, ó poniendo $x = a$, $\frac{1}{2}mua^{\frac{3}{2}}(\frac{2}{3}e + \frac{2}{5}f)$ será la resistencia total. Pongamos ahora $e = 3$, y $f = 5$, que son los anchos que pueden tener estas cantidades en el Navío que nos sirve de exemplo, y será la resistencia lateral que padecen Codaste y Timon $= 2mua^{\frac{3}{2}}$, ó poniendo $a = 21 = 194mu$. El Taxamar y Roda juntos pueden considerarse como otro trapecio, cuyo ancho en la línea de agua sea de 6 pies, y abaxo de 4: por lo que será $e = 6$, y $f = -2$, cantidad negativa: y siendo la profundidad de 19 pies, substituyendo estas cantidades, será la resistencia lateral de Taxamar y Roda, $= \frac{1}{2}mu\left(\frac{2.6}{3} - \frac{2.2}{5}\right)(19)^{\frac{3}{2}} = 132\frac{5}{6}mu$. Las quatro nuevas resistencias hacen $951\frac{1}{5}$, ó 951: luego agregandolas á $2247mu$, será el todo de las resistencias laterales $= 3198mu$.

183 Estas son las que padece el Navío siendo la velocidad u corta; pero ya no es lo propio siempre que sea algo considerable, pues en tal caso, lo es tambien la resistencia que resulta de la desnivelacion del fluido, como diximos (*Cap.*5. *Lib.* 2. *Tom.* 1.). Esta, en una quadricula, es (*Cor.*6. *Prop.*43. *Lib.*1. *Tom.*1.)

mu

$= \frac{mu^4 c sen.\theta^4}{6.(64)^2} =$ (*Cor.* 11. *Lem.* 1. *Lib.* 2. *Tom.* 1.)
$\frac{mu^4 c sen.\lambda^4 sen.\eta^4}{6.(64)^2}$: y en el todo de ellas $=$ - - - - -
$\frac{mu^4}{6.(64)^2} \int c sen.\lambda^4 sen.\eta^4$: con que para calcularla no tenemos sino hallar la suma de todas las $c sen.\lambda^4 sen.\eta^4$. Para esto es preciso advertir, que las quadrículas á donde alcanza la desnivelacion en la Proa estan sobre la superficie del agua, y á la altura de uno, dos, ó quando mas tres pies; y en la Popa debaxo de la misma superficie donde se forma la cavidad ú oquedad. Esto supuesto, tírese en el plano horizontal del Navío una línea de agua elevada en Proa de un pie sobre la superficie del agua, y en Popa mas baxa de la misma cantidad: y supóngase que esta línea pase por el centro de las quadrículas chocadas; lo que, aunque en realidad no sea, no conduce á error, respecto que esta suposicion solo la necesitamos para calcular los valores de λ y η, y estos no varian sensiblemente porque se suponga de un pie mas ó menos la altura de dicha línea de agua. Que sea DB esta línea, AB, HD dos Quadernas, y AC la primera línea de agua. Tírese BH paralela á la Quilla, y báxense las perpendiculares HF, FG, GI, IK, FL, LM, y MN: con esto, siendo por lo que toca á la resistencia de Proa HD $= c$, y el ángulo HBD $=$ FHD $= \lambda$, será FD $= c sen.\lambda$: y por la misma razon GD $= c sen.\lambda^2$, ID $= c sen.\lambda^3$, y KD $= c sen.\lambda^4$ que llamaremos f: de la misma suerte, siendo, por lo que toca á la resistencia lateral, BH $= c$, y el ángulo BDH $=$ BHF $= \lambda$, será FB $= c sen.\lambda$, BL $= c sen.\lambda^2$, BM $= c sen.\lambda^3$, y BN $= c sen.\lambda^4$, que llamaremos F. Del punto E, que divide la BD en dos partes iguales, levántese la perpendicular ET, hágase EO $=$ 1 pie, tírese OT, y báxense las perpendiculares EP, PQ, QR, y RS: con esto, siendo el ángulo Fig. 54.

Q2 OTE

$OTE = OPE = n$, será $OP = fen.n$, $OQ = fen.n^2$, $OR = fen.n^3$, y $OS = fen.n^4$, que llamaremos g: con lo qual la fórmula $\frac{mu^4 c fen.\lambda^4 fen.n^4}{6.(64)^2}$ se reduce á $\frac{mu^4 fg}{6.(64)^2}$ por lo que toca á la resistencia de Proa, y á $\frac{mu^4 Fg}{6.(64)^2}$ por la que corresponde á la lateral. Tirando, pues, igual disposicion de líneas en cada una de las quadrículas en que se supone la desnivelacion, se hallarán todos los valores de f, F y g, asi como los produćtos fg, Fg, cuya suma será $= \int fg = \int c fen.\lambda^4 fen.n^4$, y $\int Fg = \int c fen.\lambda^4 fen.n^4$ que multiplicada por $\frac{mu^4}{6.(64)^2}$, dará las resistencias que resultan de la desnivelacion.

184 La Tabla siguiente expone los mismos valores correspondientes al Navío de 60 Cañones, con 42 pies de Manga, que nos sirve de exemplo.

Entre las Quadernas.	Valores de						Produćtos de	
	F		f		g		Fg	fg
	P.	P.	P.	P.	P.	P.		
Roda y XXVII	0	02	4	03	0	10	$\frac{5}{36}$	$\frac{85}{24}$
XXVII XXIV	1	08	1	0	0	08	$\frac{10}{9}$	$\frac{2}{3}$
XXIV XXI	4	08	0	08	0	09	$\frac{42}{12}$	$\frac{1}{2}$
XXI XVIII	6	02	0	01	0	10	$\frac{188}{36}$	$\frac{5}{12}$
XVIII XV	7	0	0	0	1	0	$\frac{72}{12}$	0
21 24	7	0	0	01	1	0	$\frac{7}{1}$	$\frac{1}{12}$
24 27	6	02	0	03	0	11	$\frac{407}{144}$	$\frac{11}{48}$
27 30	5	02	0	05	0	07	$\frac{217}{72}$	$\frac{35}{144}$
30 33	2	06	0	07	0	05	$\frac{25}{24}$	$\frac{35}{144}$
33 y Codaste.	0	06	2	10	0	11	$\frac{11}{24}$	$\frac{187}{72}$
	Sumas.						$31\frac{1}{3}$	$8\frac{1}{6}$

Es-

Estas no pertenecen sino á un solo lado del Navío: con que para ambos serán $62\frac{2}{3}$, y $16\frac{1}{3}$, y son las que corresponden á las quadrículas que expresa la Tabla. Las que se encierran desde la Quaderna XV de Proa, hasta la 21 de Popa, dan todos los productos $fg = 0$, y los $Fg = 7\frac{1}{6}$, á excepcion de uno junto á la Quaderna maestra, que es de $6\frac{1}{6}$: el todo de ellos es 170, con que sumados con los $62\frac{2}{3}$, será la suma completa de los productos $Fg = 232\frac{2}{3}$: la resistencia lateral $= \frac{mu^4}{6.(64)^2} \cdot 232\frac{2}{3} = 38\frac{7}{9}\frac{(mu^4)}{(64)^2}$: y la de Proa á Popa $= \frac{mu^4}{6.(64)^2} \cdot 16\frac{1}{3} = 2\frac{13}{18}\frac{mu^4}{(64)^2}$. A estas es preciso agregar las que resultan del Timon, Codaste, Roda, y Taxamar, que dan, para la accion lateral, $Fg = 11\frac{1}{3}$, y para la directa $fg = 1\frac{2}{3}$: por lo que tendremos las resistencias laterales que proceden de la desnivelacion $= \frac{mu^4}{6.(64)^2} \cdot 245 = 40\frac{5}{6}\frac{mu^4}{(64)^2}$, ó $= \frac{41mu^4}{(64)^2}$, y las directas $= \frac{mu^4}{6.(64)^2} \cdot 18 = \frac{3mu^4}{(64)^2}$.

185 Juntas estas con las otras que hallamos antes, serán las resistencias laterales que padece el Navío $= \frac{41mu^4}{(64)^2} + 3198mu$, y las directas $= \frac{3mu^4}{(64)^2} + 282mu$.

186 Halladas las resistencias para una disposicion del Navío, se pueden hallar para otra en que este algo mas ó menos sumergido en el fluido. En la fórmula $\frac{1}{2}mcuD^{\frac{1}{2}}a\,sen.\lambda\,sen.n$ de la resistencia que padecen las quadrículas, solo aumenta ó disminuye en este caso el producto $D^{\frac{1}{2}}a$, quedando las cantidades $c\,sen.\lambda$ y $sen.n$ con el mismo valor; y siendo a como D, se hará el aumento ú disminucion en la misma razon de $D^{\frac{3}{2}}$: y co-

como esta ley es general para todas las quadrículas, se sigue, que el todo de las resistencias será igualmente como $D^{\frac{3}{2}}$. Lo mismo se debe entender de la que resulta del Codaste, Taxamar y Timon; pero como en la Quilla no aumenta su altura, representada por *a*, el aumento ó disminucion de su resistencia, solo será como $D^{\frac{1}{2}}$. En la fórmula $\frac{mu^4 cfen.\lambda^4 fen.^4}{6.(64)^2}$ de las resistencias que proceden de la desnivelacion, todas las cantidades quedan sensiblemente constantes, y por consiguiente no se alteran por motivo de que aumente ú disminuya de corta cantidad lo que el Navío esté sumergido en el fluido. De esta suerte no aumentan ú disminuyen sino los valores $3198mu$, y $282mu$: esto es, $2638mu$, y $273\frac{1}{2}mu$ en la razon de $D^{\frac{3}{2}}$, y $560mu$, y $8\frac{1}{2}mu$, que corresponden á la resistencia de la Quilla, solo en la razon de $D^{\frac{1}{2}}$.

187 En el Navío que nos sirve de exemplo hallamos (§.181) $D = \frac{35}{2} + \frac{1}{3} = \frac{107}{6}$: con que supuesto que sea n la cantidad que haya de quedar mas ó menos sumergido en el fluido, se harán los aumentos ú disminuciones de las resistencias en la razon de $\left(\frac{107}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$ á $\left(\frac{107}{6} \pm n\right)^{\frac{3}{2}}$, y en la de $\left(\frac{107}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$ á $\left(\frac{107}{6} \pm n\right)^{\frac{1}{2}}$: ó serán los efectivos aumentos ú disminuciones $\frac{1}{12}n(2638)mu$, $\frac{1}{12}n(273\frac{1}{2})mu$, $\frac{1}{36}n(560)mu$, y $\frac{1}{36}n(8\frac{1}{2})mu$. Supuesto, pues, como en el (§.141) que el Navío se profundice de 6 pulgadas mas, ó que sea $n = \frac{1}{2}$: será el primer momento $110mu$: el segundo $11\frac{1}{2}mu$: el tercero $7\frac{7}{9}mu$; y el quarto $\frac{17}{144}mu$: esto es,

el

el aumento de la resistencia lateral será de $117\frac{7}{9}mu$, y el de la Proa de $11\frac{89}{144}mu$: luego la resistencia lateral del Navío calado 6 pulgadas mas, ó en los términos que navegó, será de $\frac{41mu^4}{(64)^2}+3316mu$, y la de la Proa de $\frac{3mu^4}{(64)^2}+294mu$.

188 Halladas las resistencias que padece un Navío, con facilidad se hallan las que padece otro, quando en los fondos son semejantes. En la fórmula $\frac{1}{2}mcuD^{\frac{1}{2}}a sen.\lambda sen.\eta$ de las resistencias horizontales que padecen las quadrículas, no varían los ángulos λ y η, puesto que se suponen semejantes los fondos de los Navíos, y solo sí las cantidades c, a y D, que son como las disminuciones lineares de los Buques, ó como las mangas: los produćtos $caD^{\frac{1}{2}}$ serán, pues, como las quintas potestades de las raices quadradas de las mangas: si llamamos m la del Navío cuya resistencia se conoce, M la de aquel en que se desea conocer, y r la resistencia hallada que padece el primero, será $\frac{M^{\frac{5}{2}}}{m^{\frac{5}{2}}}r$ la que padece el segundo: esto es, la que no depende de la desnivelacion. Para esta es la fórmula $\frac{mn^4 c sen.\lambda^4 sen.\eta^4}{6.(64)^2}$, en que no varia sino el valor de c, que es como la manga: luego esta resistencia será $=\frac{M}{m}r$: suponiendo ahora r la resistencia del primer Navío que procede de la desnivelacion.

189 A estas dos solas operaciones habia de reducirse el cálculo si ambos Navíos hubieran de navegar proporcionalmente calados ó sumergidos en el fluido; pero pueden variar en esto de algunas pulgadas, por

las razones que ya expusimos en el (§.144). La resulta de esta variacion podrá calcularse, como hicimos antes quando supusimos que el Navío de 60 hubiese de navegar 6 pulgadas mas calado. Pero respecto que ya se tienen calculados los aumentos ó disminuciones $\frac{1}{12}nmu(2638)$, $\frac{1}{12}nmu(273\frac{1}{2})$, $\frac{1}{36}nmu(560)$, y --- $\frac{1}{36}nmu(8\frac{1}{2})$, que resultan en las resistencias que padece este Navío, por estar mas ó menos calado de la cantidad n, será mejor hallar primero la resistencia que padecerá este propio, calado en la proporcion que debe estar el otro, y llamando esta nueva resistencia r, será la del segundo Navío $\frac{M^{\frac{5}{2}}r}{m^{\frac{5}{2}}}$ y $\frac{Mr}{m}$. Las dos cantidades $\frac{1}{12}nmu(2648)$, y $\frac{1}{36}nmu(560)$, que pertenecen á la resistencia lateral, se pueden unir para facilitar el cálculo, y será la suma $\frac{1}{18}nmu(4237)$: así como las otras dos $\frac{1}{12}nmu(273\frac{1}{2})$, y $\frac{1}{36}nmu(8\frac{1}{2})$, que pertenecen á la resistencia de Proa, cuya suma es $\frac{1}{36}nmu(829)$. La resistencia que resulta de la desnivelacion queda sin alteracion, como ya diximos.

190 En el (§.145) hallamos que siendo m la manga, v el volúmen sumergido, y a el area ó seccion de la superficie del fluido del primer Navío, y M la manga, y V el volúmen del segundo, es $\frac{v-\frac{m^3}{M^3}V}{a}$ la altura que ha de tener el primero de mas ó menos calado, para que quede en la misma disposicion que el segundo, cantidad que ahora hemos expresado por n: substi-

tituyendola en los aumentos ú disminuciones de las resistencias, serán estas $\frac{1}{18}mu(4237)\left(\frac{v-\frac{m^3}{M^3}V}{a}\right)$, y $\frac{1}{36}mu(829)\left(\frac{v-\frac{m^3}{M^3}V}{a}\right)$: por consiguiente la resistencia lateral en el Navío de 60, que no procede de la desnivelacion, quedando en la disposicion que el otro, será $3316mu-\frac{1}{18}mu(4237)\left(\frac{v-\frac{m^3}{M^3}V}{a}\right)$, y la de Proa $294mu-\frac{1}{36}mu(829)\left(\frac{v-\frac{m^3}{M^3}V}{a}\right)$: por lo que toda la resistencia lateral que padeciera en esta disposicion, sería $=\frac{41mu^4}{(64)^2}+3316mu-$ - - - - $\frac{1}{18}mu(4237)\left(\frac{v-\frac{m^3}{M^3}V}{a}\right)$, y la de Proa $=\frac{3mu}{(64)^2}+294mu-\frac{1}{36}mu(829)\left(\frac{v-\frac{m^3}{M^3}V}{a}\right)$: de donde resulta, que las resistencias que padecerá el segundo Navío, serán $\frac{41mu^4M}{(64)^2m}+\frac{3316muM^{\frac{5}{2}}}{m^{\frac{5}{2}}}-\frac{muM^{\frac{5}{2}}}{18m^{\frac{5}{2}}}(4237)\left(\frac{v-\frac{m^3}{M^3}V}{a}\right)$, y $\frac{3mu^4M}{(64)^2m}+\frac{294muM^{\frac{5}{2}}}{m^{\frac{5}{2}}}-\frac{muM^{\frac{5}{2}}}{36m^{\frac{5}{2}}}(829)\left(\frac{v-\frac{m^3}{M^3}V}{a}\right)$: ó porque en el Navío de 60 es $m=42$, $v=68650$, y $a=5500$, será la resistencia lateral $=\frac{41mu^4M}{(64)^2 42}+$

$$\frac{3316muM^{\frac{5}{2}}}{(42)^{\frac{5}{2}}} - \frac{muM^{\frac{5}{2}}}{18(42)^{\frac{5}{2}}}(4237)\left(\frac{68650 - \frac{(42)^3}{M^3}V}{5500}\right)$$, y la

de Proa $= \frac{3mu^4M}{(64)^2 \cdot 42} + \frac{294muM^{\frac{5}{2}}}{(42)^{\frac{5}{2}}} - \frac{muM^{\frac{5}{2}}}{36(42)^{\frac{5}{2}}}(829)\left(\frac{68650 - \frac{(42)^3}{M^3}V}{5500}\right)$.

191 En el Navío de 70 Cañones tenemos $M = 48$, y $V = 96500$: con que substituyendo estos valores en las expresiones determinadas ultimamente, serán las resistencias laterales que padecerá este Navío = $\frac{47mu^4}{(64)^2} + 4631mu - 240mu = \frac{47mu^4}{(64)^2} + 4391mu$, y las de Proa $= \frac{24}{7} \cdot \frac{mu^4}{(64)^2} + 410mu - 23mu = \frac{24}{7} \cdot \frac{mu^4}{(64)^2} + 387mu$.

192 Para la Fragata de 22 Cañones es $M = 32$, y $V = 25170$: con que la resistencia lateral será $= \frac{31\frac{5}{21}mu^4}{(64)^2} + 1680mu - 254mu = \frac{31\frac{5}{21}mu^4}{(64)^2} + 1426mu$, y la de Proa $= \frac{2\frac{2}{7}mu^4}{(64)^2} + 149mu - 25mu = \frac{2\frac{2}{7}mu^4}{(64)^2} + 124mu$.

193 Para el Navío de tres puentes es $M = 51$, y $V = 128293$: con que será la resistencia lateral $= \frac{49\frac{11}{14}mu^4}{(64)^2} + 5388mu + 209mu = \frac{49\frac{11}{14}mu^4}{(64)^2} + 5597mu$, y las de Proa $= \frac{3\frac{9}{14}mu^4}{(64)^2} + 478mu + 20\frac{1}{2}mu = \frac{3\frac{9}{14}mu^4}{(64)^2} + 498\frac{1}{2}mu$.

194 Estas determinaciones pueden aun facilitarse mucho, atendiendo á que la resistencia que nace de la desnivelacion se hace despreciable siendo corta la velocidad u, particularmente en las Embarcaciones grandes, donde no llega á tener valor digno de atencion, sino en velocidades tan grandes que no se ven en la práctica. Estando las Embarcaciones caladas en el flui-

do

do proporcionalmente á sus dimensiones lineares, es su resistencia de Proa $= \frac{3mu^4M}{(64)^2 42} + \frac{293muM^{\frac{5}{2}}}{(42)^{\frac{5}{2}}} = ---$ $\frac{3muM}{42}\left(\frac{u^3}{(16)^3} + \frac{98M^{\frac{3}{2}}}{(42)^{\frac{3}{2}}}\right)$, pues la otra cantidad de la fórmula se desvanece: y en esta expresion la cantidad $\frac{u^3}{16^3}$ que nace de la desnivelacion, se hace despreciable respecto de $\frac{98M^{\frac{3}{2}}}{(42)^{\frac{3}{2}}}$, mayormente siendo M grande, y u pequeña. En el Navío de 60 Cañones es $M = 42$: y si es $u = 16$, será la primera cantidad 1, y la segunda 98: y siendo 16 de las mayores velocidades que puede tomar el Navío, se ve que aun en estas se hace despreciable la cantidad que resulta de la desnivelacion. En la Fragata de 22 Cañones es $M = 32$, y da, con corta diferencia, $\frac{98M^{\frac{3}{2}}}{(42)^{\frac{3}{2}}} = 66$: con que tambien se hace despreciable la cantidad $\frac{u^3}{(16)^3}$, siendo $u = 16$. En un Pacabote de 21 pies de manga es $\frac{98M^{\frac{3}{2}}}{(42)^{\frac{3}{2}}} = 28$, con corta diferencia: de suerte que, como se verá, aun se puede despreciar la desnivelacion enteramente en los cálculos en que se inquiera la velocidad u, pero ya no es lo propio en un Bote ó Barco chico: pues si suponemos uno de estos de 7 pies de manga, ó $\frac{M}{42} = \frac{1}{6}$, será $\frac{98M^{\frac{3}{2}}}{(42)^{\frac{3}{2}}} = 6\frac{1}{2}$, cuya cantidad ya no es excesiva respecto de la unidad.

 Si

195 Si la desnivelacion se hace despreciable en las resistencias por la Proa, mucho mas lo es en las laterales; en quien u es mucho menor: y por consiguiente deben reducirse á las que solo estan afectas de la simple velocidad u; á menos que no sea en Barcos chicos, y con velocidades considerables.

CAPITULO 6.

De los momentos que padece el Navío en su movimiento horizontal, con respeto de un exe asimismo horizontal, que llaman los Marineros aguante de Vela.

196 LOs momentos que padece la Nave, así como las resistencias horizontales, pueden ser en varias direcciones, segun la disposicion que se diere á las Velas, y segun el exe sobre que se suponga la rotacion; pero podemos igualmente reducirlos á dos: unos, segun el exe horizontal tirado de Popa á Proa, que pasa por el centro de gravedad, y es lo que legitimamente llaman los Marineros *aguante de Vela*; y otros, segun otro exe, asimismo horizontal, perpendicular al primero: aquellos procederán de la resistencia lateral; y estos de la resistencia por la Proa: unos y otros resultan de la suma de los que padecen las varias quadrículas en que dividimos el cuerpo, por ser, en este tan irregular, el unico modo que cabe.

197 Los momentos que padece un cuerpo qualquiera; estando en movimiento horizontal, los hallamos (*Cor. 3. Pr. 67. Lib. 2. To. 1*) $= \left(PH + \frac{1}{12} m \int e^3 \epsilon\right) sen.\Delta + \frac{1}{2} mu \int c x^{\frac{1}{2}} y dy\, sen.\theta + \frac{1}{2} mu \int c(k - x) x^{\frac{1}{2}} dx\, sen.\theta$, ó substitu-

yen-

yendo por $sen.\theta$ su igual $sen.\lambda sen.n$ (*Cor.* 11. *Lem.* 1. *Lib.* 2. *To.* 1), serán $(PH + \frac{1}{12} m \int e^3 c) sen.\Delta + \frac{1}{2} mu \int cx^{\frac{1}{2}} y dy sen.\lambda sen.n + \frac{1}{2} mu \int cx^{\frac{1}{2}} dx (k - x) sen.\lambda sen.n$, expresando Δ el ángulo de la inclinacion del Navío. El valor de $(H + \frac{m}{12P} \int e^3 c) sen.\Delta$, ya se halló (§.150) por la distancia desde el centro de gravedad al nuevo centro de volúmen: con que partida por $sen.\Delta$, será $(H + \frac{m}{12P} \int e^3 c) = (H + \frac{1}{12v} \int e^3 c)$, distancia desde el centro de gravedad al metacentro: llamando esta K, será $(HP + \frac{1}{12} m \int e^3 c) sen.\Delta = KP sen.\Delta = mKv sen.\Delta$, siendo v el volúmen que ocupa el Navío dentro del fluido. Para reducir la segunda cantidad $\frac{1}{2} mu \int cx^{\frac{1}{2}} y dy sen.\lambda sen.n$, tenemos $CD = dy$, y el ángulo $BFG = FGH = \lambda$; y son $1 : sen.\lambda = dy : KL = dy sen.\lambda$; y asimismo $1 : sen.n$, seno de NKL, $= KL = dy sen.\lambda : NL = dy sen.\lambda sen.n$, que llamaremos b: cuyo valor substituido en la expresion, quedará en $\frac{1}{2} mu \int cbx^{\frac{1}{2}} y$. La tercera es (§.177.) $= \frac{1}{2} mu \int fgx^{\frac{1}{2}} (k - x)$, siendo $f = FI$ para las resistencias laterales, $= IG$ para las de Proa, y $g = NM$. Los momentos se reduciran, pues, á $mKv sen.\Delta + \frac{1}{2} mu \int cbx^{\frac{1}{2}} y + \frac{1}{2} mu \int fgx^{\frac{1}{2}} (k - x)$; pero esta ultima cantidad admite aun la expresion $\frac{1}{2} muk \int fgx^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} mu \int fgx^{\frac{3}{2}}$, que facilita el cálculo, pues siendo (§.180.) $\frac{1}{2} mu \int fgx^{\frac{1}{2}}$ toda la resistencia horizontal que padece el Navío, que ya tenemos hallada, será $\frac{1}{2} muk \int fgx^{\frac{1}{2}}$ el producto de la misma, por la distancia k des-

Fig. 32. Lam. 1.

desde el centro de gravedad á la superficie del fluido. Si suponemos, pues, $\frac{1}{2}mu\int fgx^{\frac{1}{2}} = mur$, serán los momentos $= mKv\,sen.\Delta + \frac{1}{2}mu\int chx^{\frac{1}{2}}y + mukr - \frac{1}{2}mu\int fgx^{\frac{3}{2}}$ siendo $\frac{1}{2}muchx^{\frac{1}{2}}y$ el momento vertical que padecen cada dos quadrículas correspondientes con respeto al plano vertical coincidente con la Quilla, y $\frac{1}{2}mufgx^{\frac{3}{2}}$ el horizontal que padecen con respeto á sus distancias de la superficie del fluido. Todo el trabajo se reduce, pues, á hallar los momentos $\frac{1}{2}mu\int chx^{\frac{1}{2}}y - \frac{1}{2}mu\int fgx^{\frac{3}{2}}$, puesto que las cantidades $mKv\,sen.\Delta + mukr$ son conocidas. $fgx^{\frac{3}{2}}$ es el producto de $fgx^{\frac{1}{2}}$ que ya tenemos hallado (§. 180.), por x, distancia desde el centro de las resistencias de las quadrículas, que está á los $\frac{3}{5}$ de su altura hasta la superficie del fluido: y siendo en el Navío de 60 la distancia entre las líneas de agua $= 3\frac{1}{2}$ pies, serán los $\frac{3}{5}$ de ella $= \frac{21}{10}$: luego para entre la 1.ª y 2.ª línea de agua $x = \frac{21}{10}$: para entre la 2.ª y 3.ª, $x = \frac{56}{10}$: para entre 3.ª y 4.ª, $x = \frac{91}{10}$: para entre 4.ª y 5.ª, $x = \frac{126}{10}$, y para entre 5.ª y Quilla, $x = \frac{161}{10}$: con que serán (§. 180.): :-

Para los momentos laterales		Para los momentos de Proa	
$Fgx^{\frac{1}{2}}.x = 578.\frac{21}{10} =$	1213, 8	$fgx^{\frac{1}{2}}.x = 90.\frac{21}{10} =$	189, 0
$921.\frac{56}{10} =$	5157, 6	$142.\frac{56}{10} =$	795, 2
$1071.\frac{91}{10} =$	9746, 1	$126.\frac{91}{10} =$	1146, 6
$1035.\frac{126}{10} =$	13041, 0	$89.\frac{126}{10} =$	1121, 4
$889.\frac{161}{10} =$	14312, 9	$29.\frac{161}{10} =$	466, 9
$\int Fgx^{\frac{3}{2}} =$ ------	43471 . 4	$\int fgx^{\frac{3}{2}} =$ --------	3719, 1

luego $\frac{1}{2}mu\int Fgx^{\frac{3}{2}} = 21736mu$, y $\frac{1}{2}mu\int fgx^{\frac{3}{2}} = 1860mu$.

A'

198 A estos valores es preciso añadir el aumento que resulta por el grueso de las tablas, como diximos §.181. En $\int fgx^{\frac{3}{2}}$ son dos cantidades: una que procede de la c, ú de la f, y es, por el mismo §. citado, de $\frac{1}{42}$ de 1860 = 44: y otra que procede de $x^{\frac{3}{2}}dx$, ú de $x^{\frac{5}{2}}$, que aumenta en la razon de $\left(\frac{35}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$ á $\left(\frac{35}{2}+\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{2}}$ ú de 35 á 35 + $\frac{1}{3}$, que da el aumento de $\frac{1}{21}$ de 1860 = 89. Ambas cantidades juntas son 133: luego con el aumento que resulta por el grueso de la tabla es - - - - $\frac{1}{2}mu\int fgx^{\frac{3}{2}} = 1993mu$. La $\int Fgx^{\frac{3}{2}}$ solo aumenta por razon de $x^{\frac{5}{2}}$: luego es de $\frac{1}{21}$ de 21736 = 1035: por consiguiente, con el aumento que resulta por el grueso de la tabla, es $\frac{1}{2}mu\int Fgx^{\frac{3}{2}} = 22771mu$.

199 Se han de añadir tambien los momentos que padecen Quilla, Codaste, Timon, Roda, y Taxamar. Suponiendo el canto de Popa del Timon como un rectángulo vertical, con su correspondiente en el Taxamar, segun hicimos §. 181, será su momento de Proa á Popa $\frac{1}{5}mbux^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{5}mu(21)^{\frac{5}{2}} = 404$, siendo $b = 1$ ancho del rectángulo, y $x = 21$ su alto: por lo que incluyendo esta atencion será $\frac{1}{2}mu\int fgx^{\frac{3}{2}} = 2397mu$. La Quilla, Contraquilla, y Zapata, las supusimos en el mismo §. como un rectángulo vertical de 2 pies de alto, y 130 de largo, colocado á 18 $\frac{1}{2}$ de profundidad, que ahora será á 19, por estar mas baxo el centro de las resistencias que el de gravedad: y habiendo hallado aquellas de 560 $\frac{1}{6}mu$, será el momento lateral que padecerá la Quilla = 560 $\frac{1}{6}$. $19mu$ = $10643mu$. El

Co-

Codaste y Timon juntos, se supusieron un trapecio vertical, y su diferencial de resistencia se halló $= \frac{1}{2}mu\left(e+\frac{fx}{a}\right)x^{\frac{1}{2}}dx$, por lo que la de momento será $= \frac{1}{2}mu\left(e+\frac{fx}{a}\right)x^{\frac{3}{2}}dx$, cuyo integral, substituyendo a por x, es $\frac{1}{2}mu(\frac{2}{5}e+\frac{2}{7}f)a^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}mu(\frac{6}{5}+\frac{10}{7})(21)^{\frac{5}{2}} = 2656mu$, poniendo $e=3$, $f=5$, y $a=21$. Del mismo modo el Taxamar y Roda se supuso otro trapecio de igual fórmula, con sola la diferencia de ser $e=6$, y $f=-2$, lo que da $\frac{1}{2}mu(\frac{2}{5}e+\frac{2}{7}f)a^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}mu(\frac{12}{5}-\frac{4}{7})(21)^{\frac{5}{2}} = 1848mu$ Estos tres momentos laterales juntos suman $15147mu$, que agregados á los $22771mu$, que resultaron del cuerpo del Navío, serán los totales en el Navío de 60 Cañones pertenecientes á $\frac{1}{2}mu\int Fgx^{\frac{3}{2}} = 37918mu$.

200 Si se quisiere, á mas de esto, el Navío 6 pulgadas mas calado, segun lo supusimos en los exemplos precedentes, respecto que el aumento que corresponde á $\frac{1}{2}mu\int fgx^{\frac{3}{2}}$ es como $x^{\frac{5}{2}}$, á causa de ser g como dx, será como $\frac{5}{2}n : \frac{107}{6} = \frac{1}{7}n$: esto es, $\frac{1}{7}n(2397)mu$: y en $\frac{1}{2}mu\int Fgx^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{7}n(37918)mu = 2708mu$: con que serán, estando el Navío calado 6 pulgadas mas, $\frac{1}{2}mu\int fgx^{\frac{3}{2}} = 2568mu$, y $\frac{1}{2}mu\int Fgx^{\frac{3}{2}} = 40626mu$.

201 Para hallar $\int chx^{\frac{1}{2}}y$, se tomarán en la figura dispuesta para cada quadrícula el valor de $h=$ NL, y se multiplicará por y, distancia desde su centro de resistencias al plano vertical que coincide con la Quilla: cada producto se multiplicará por c, distancia de Quaderna á Quaderna, ó si es en las extremas, por la dis-

distancia desde la ultima á la Roda ó Codaste: hecha despues la suma de todos los productos correspondientes entre las dos líneas de agua, se multiplicará cada uno por $x^{\frac{1}{2}}$, que son (§. 197), $\left(\frac{21}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{56}{10}\right)^{\frac{1}{4}}$, $\left(\frac{91}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{126}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$ y $\left(\frac{161}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$, y congregado el todo será el valor de $\int cbx^{\frac{1}{2}}y$ en los momentos laterales: y para los de Proa se multiplicará la b por y, distancia desde el centro de las resistencias de la quadrícula, hasta el plano vertical perpendicular á la Quilla, que pasa por el centro de gravedad, y despues por c, diferencia entre las amplitudes de los dos puntos F y G. Los valores de b, de c, y de y, con sus productos, se hallan en el Navío de 60, como expresan las Tablas siguientes. Multiplicando ahora $3320\frac{1}{2}$ por $\left(\frac{21}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$ producen 4812: $4060\frac{4}{5}$ por $\left(\frac{56}{10}\right)^{\frac{1}{2}} = 9620$: $4104\frac{1}{4}$ por $\left(\frac{91}{10}\right)^{\frac{1}{2}} = 12381$: $3784\frac{11}{12}$ por $\left(\frac{126}{10}\right)^{\frac{1}{2}} = 13435$: y $1520\frac{5}{6}$ por $\left(\frac{161}{10}\right)^{\frac{1}{2}} = 6100$: cuya suma de productos es el momento lateral $= \int cbx^{\frac{1}{2}}y = 46338$. Del mismo modo, multiplicando $4410\frac{1}{6}$ por $\left(\frac{21}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$ producen 6391: $4851\frac{5}{6}$ por $\left(\frac{56}{10}\right)^{\frac{1}{2}} = 11480$: $3946\frac{5}{12}$ por $\left(\frac{91}{10}\right)^{\frac{1}{2}} = 11905$: $3593\frac{1}{4}$ por $\left(\frac{126}{10}\right)^{\frac{1}{2}} = 12755$; y $1335\frac{5}{12}$ por $\left(\frac{161}{10}\right)^{\frac{1}{2}} = 5358$, cuya suma de productos es el momento de Popa á Proa $= \int cbx^{\frac{1}{2}}y = 47889$.

202 Lo que debe agregarse á los momentos laterales, por razon de la Quilla, Roda, Taxamar, Codas-

Tabla de los valores de b, c, y,

Entre las líneas de agua.

Entre las Quadernas,

	1ª y 2ª			2ª y 3ª		
	b	*c*	*y*	*b*	*c*	*y*
Roda y XXVII	1 9	2 9	1 0			
XXVII XXIV	1 11	7 2	7 0	2 3	7 2	3 9
XXIV XXI	1 8	7 2	13 8	2 2	7 2	10 2
XXI XVIII	1 5	7 2	17 5	2 1	7 2	15 1
XVIII XV	1 3	7 2	19 4	1 11	7 2	17 8
XV XII	1 2	7 2	20 4	1 9	7 2	18 11
XII IX	1 1	7 2	20 8	1 8	7 2	19 7
IX VI	1 1	7 2	20 9	1 8	7 2	20 0
VI III	1 1	7 2	20 10	1 7	7 2	20 1
III 0	1 1	7 2	20 1	1 7	7 2	20 2
0 3	1 1	6 2	20 11	1 7	6 2	20 2
3 6	1 1	7 2	20 10	1 7	7 2	20 1
6 9	1 1	7 2	20 8	1 8	7 2	19 11
9 12	1 1	7 2	20 4	1 8	7 2	19 6
12 15	1 2	7 2	19 11	1 9	7 2	19 0
15 18	1 3	7 2	19 5	1 9	7 2	18 4
18 21	1 4	7 2	18 11	1 9	7 2	17 5
21 24	1 5	7 2	17 9	1 10	7 2	15 10
24 27	1 7	7 2	16 2	1 11	7 2	13 3
27 30	2 4	7 2	13 5	2 5	7 2	9 6
30 33	2 6	7 2	9 5	2 6	7 2	5 5
33 y Codaste.	2 0	4 1	3 4	1 9	3 7	1 10

Entre las líneas de agua.

3 y 4.			4.ª y 5.ª			5.ª y Quilla.		
b	*c*	*y*	*b*	*c*	*y*	*b*	*c*	*y*
1 11	4 4	1 8						
1 9	7 2	6 0	2 5	7 2	2 3	1 4	2 8	0 6
2 7	7 2	11 4	2 10	7 2	5 9	2 5	7 2	1 5
2 5	7 2	14 9	2 11	7 2	9 2	3 2	7 2	2 6
2 3	7 2	16 6	2 11	7 2	11 3	3 4	7 2	3 6
2 1	7 2	17 5	2 10	7 2	13 6	3 4	7 2	4 7
2 0	7 2	18 1	2 9	7 2	14 9	3 4	7 2	5 3
2 0	7 2	18 6	2 8	7 2	15 8	3 4	7 2	5 9
1 11	7 2	18 9	2 7	7 2	16 1	3 4	7 2	5 11
1 11	6 2	18 9	2 7	6 2	16 2	3 4	6 2	6 0
1 11	7 2	18 8	2 7	7 2	15 10	3 4	7 2	5 9
1 11	7 2	18 3	2 8	7 2	15 3	3 4	7 2	5 7
2 0	7 2	17 8	2 8	7 2	14 5	3 3	7 2	5 2
2 2	7 2	17 0	2 9	7 2	13 3	3 3	7 2	4 7
2 4	7 2	15 11	2 11	7 2	11 2	3 2	7 2	3 7
2 6	7 2	14 2	3 2	7 2	8 10	3 1	7 2	2 8
2 6	7 2	11 8	2 10	7 2	6 7	3 0	7 2	1 10
2 5	7 2	8 9	2 5	7 2	4 7	2 5	7 2	1 4
2 4	7 2	5 8	1 11	7 2	2 10	1 9	7 2	0 9
1 11	7 2	2 9	1 4	7 2	1 3	1 3	7 2	0 4
1 3	3 0	1 0	1 1	2 6	0 4	1 1	2 1	0 4

Tabla de los valores de b , c , y ,

Entre las líneas de agua.

Entre las Quadernas.	1ª. y 2ª.			2ª. y 3ª.		
	b	*c*	*y*	*b*	*c*	*y*
Roda y XXVII	1 9	3 0	71 0			
XXVII XXIV	1 11	7 9	66 1	2 3	7 0	66 1
XXIV XXI	1 8	4 6	58 11	2 2	6 0	58 11
XXI XVIII	1 5	2 3	51 9	2 1	3 6	51 9
XVIII XV	1 3	1 1	44 7	1 11	1 9	44 7
XV XII	1 2	0 6	37 5	1 9	0 11	37 5
XII IX	1 1	0 2	30 3	1 8	0 6	30 3
IX VI	1 1	0 1	23 1	1 8	0 3	23 1
VI III	1 1	0 0	15 11	1 7	0 1	15 11
III 0	1 1	0 0	8 9	1 7	0 0	8 9
0 3	1 1	0 0	2 7	1 7	0 0	2 7
3 6	1 1	0 1	4 9	1 7	0 1	4 9
6 9	1 1	0 2	11 11	1 8	0 5	11 11
9 12	1 1	0 4	19 1	1 8	0 8	19 1
12 15	1 2	0 5	26 3	1 9	0 9	26 3
15 18	1 3	0 6	33 5	1 9	0 10	33 5
18 21	1 4	0 7	40 7	1 9	1 5	40 7
21 24	1 5	1 1	47 9	1 10	2 1	47 9
24 27	1 7	1 9	54 11	1 11	3 2	54 11
27 30	2 4	2 7	62 1	2 5	4 0	62 1
30 33	2 6	4 11	69 3	2 6	4 4	69 3
33 y Codaste.	2 0	6 0	71 3	1 9	2 10	70 0

Entre las líneas de agua.

3.ª y 4.ª			4.ª y 5.ª			5.ª y Quilla.		
b	*c*	*y*	*b*	*c*	*y*	*b*	*c*	*y*
1 11	3 3	65 5						
1 9	5 6	58 11	2 5	4 0	58 11	1 4	0 10	57 10
2 7	4 3	51 9	2 10	3 6	51 9	2 5	1 1	51 9
2 5	2 7	44 7	2 11	2 10	44 7	3 2	1 2	44 7
2 3	1 4	37 5	2 11	2 2	37 5	3 4	1 1	37 5
2 1	0 10	30 3	2 10	1 9	30 3	3 4	0 11	30 3
2 0	0 8	23 1	2 9	1 2	23 1	3 4	0 9	23 1
2 0	0 4	15 11	2 8	0 8	15 11	3 4	0 4	15 11
1 11	0 1	8 9	2 7	0 1	8 9	3 4	0 1	8 9
1 11	0 1	2 7	2 7	0 1	2 7	3 4	0 1	2 7
1 11	0 2	4 9	2 7	0 4	4 9	3 4	0 2	4 9
1 11	0 7	11 11	2 8	0 9	11 11	3 4	0 6	11 11
2 0	0 9	19 1	2 8	1 3	19 1	3 3	0 8	19 1
2 2	1 0	26 3	2 9	1 6	26 3	3 3	0 10	26 3
2 4	1 4	33 5	2 11	2 3	33 5	3 2	1 2	33 5
2 6	2 3	40 7	3 2	2 5	40 7	3 1	0 11	40 7
2 6	2 9	47 9	2 10	2 2	47 9	3 0	0 8	47 9
2 5	3 0	54 11	2 5	1 10	54 11	2 5	0 7	54 11
2 4	3 1	62 1	1 11	1 8	62 1	1 9	0 6	62 1
1 11	1 7	69 3	1 4	1 6	69 3	1 3	0 5	59 3
1 3	1 2	69 10	1 1	0 4	69 8	1 1	0 4	69 6

Tabla de los productos b, c, y, en los momentos laterales.

Entre las líneas de agua.

Entre las Quadernas.	1ª y 2ª		2ª y 3ª		3ª y 4ª		4ª y 5ª		5ª y Quil.	
Roda y XXVII	4	4								
XXVII XXIV	96	1	59	1	11	2				
XXIV XXI	150	0	157	8	75	2	38	2	1	9
XXI XVIII	175	6	225	1	208	5	112	6	24	6
XVIII XV	172	7	238	7	253	2	190	5	56	9
XV XII	169	6	232	7	265	2	233	5	83	7
XII IX	160	0	231	4	259	9	261	0	109	5
IX VI	160	7	238	10	259	2	287	0	125	7
VI III	161	2	227	5	265	2	296	2	137	4
III 0	161	9	228	0	254	0	297	5	141	4
0 3	139	2	196	2	217	8	256	10	123	0
3 6	161	2	227	5	252	10	289	9	137	4
6 9	160	0	233	9	248	11	291	4	133	4
9 12	157	8	230	6	267	6	275	3	120	0
12 15	165	5	238	3	263	10	258	0	106	11
15 18	173	2	228	0	263	10	233	6	81	2
18 21	178	7	216	2	253	2	200	8	59	9
21 24	177	10	203	4	206	6	133	9	39	5
24 27	182	8	181	4	149	2	79	5	23	3
27 30	223	4	162	11	93	2	37	7	9	7
30 33	167	2	95	6	32	9	11	11	3	0
33 y Codaste.	27	2	8	11	3	9	0	10	0	8
Sumas.....	3320	6	4060	10	4104	3	3784	11	1520	10

Tabla de los produćtos b , c , y , en los momentos de Popa á Proa.

Entre las líneas de agua.

		1ª y 2ª		2ª y 3ª		3ª y 4ª		4ª y 5ª		5ª y Quil.	
Entre las Quadernas.	Roda y XXVII	372	9								
	XXVII XXIV	981	3	1040	10	407	5				
	XXIV XXI	441	10	766	1	567	1	608	10	64	3
	XXI XVIII	163	10	371	4	568	2	513	2	135	5
	XVIII XV	60	4	149	6	278	4	368	7	162	11
	XV XII	28	1	60	0	112	3	236	2	135	1
	XII IX	5	6	25	3	52	6	150	0	92	5
	IX VI	2	1	9	7	30	9	74	1	57	8
	VI III	0	0	2	2	10	7	28	4	16	9
	III 0	0	0	0	0	1	5	1	11	2	8
	0 3	0	0	0	0	0	5	0	7	0	9
	3 6	0	5	0	7	1	6	4	1	2	8
	6 9	2	2	8	3	13	4	23	10	19	10
	9 12	6	10	21	2	28	7	63	7	41	4
	12 15	12	9	34	5	56	10	108	3	71	1
	15 18	20	11	49	2	104	0	202	10	129	6
	18 21	31	7	100	6	228	3	310	7	114	9
	21 24	49	7	182	2	328	3	293	1	95	6
	24 27	125	2	333	8	398	2	243	4	77	4
	27 30	374	3	600	2	446	8	198	4	54	4
	30 33	875	10	750	3	210	2	138	6	36	1
	33 y Codaste.	855	0	347	2	101	9	25	2	25	1
	Sumas.	4410	2	4851	10	3946	5	3593	3	1335	5

te y Timon, es o, porque en ellos es $b = o$. En la tablazon aumenta el momento, por aumentar la y, la $x^{\frac{1}{2}}$, y la b, que es como la distancia entre las líneas de agua, y esta como la x. Por razon de la y, es el aumento (§.181) de $\frac{1}{42}$ de $46338 = 1103$: y por razon de la $x^{\frac{3}{2}}$, es el aumento (§.181) de $\frac{1}{35}$ de $46338 = 1324$: luego, agregadas ambas cantidades, será, en los momentos laterales, $\int cbx^{\frac{1}{2}}y = 48765$, y $\frac{1}{2}mu\int cbx^{\frac{1}{2}}y = 24382mu$.

203 Los momentos de Popa á Proa tampoco aumentan por lo que pertenece á Quilla, Codaste y Timon, por ser en ellos $b = o$. Los de la Roda ó Taxamar son $cbx^{\frac{1}{2}}y$, en que es $c = 1$, $b = 6$, $x^{\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{2}$, y $y = 66$: por lo que $cbx^{\frac{1}{2}}y = 1386$. Con la tablazon aumentan la c la b, y la $x^{\frac{1}{2}}$: por aquella es el aumento de $\frac{1}{42}$ de $47889 = 1140$, y por esta de $\frac{1}{35}$ de $47889 = 1368$: luego, agregadas las tres cantidades, será en los momentos de Popa á Proa, $\int cbx^{\frac{1}{2}}y = 51783$, y $\frac{1}{2}mu\int cbx^{\frac{1}{2}}y = 25891mu$.

204 Si se quisiere el Navío en otra línea de agua que aquella sobre que se fundó el cálculo, como por exemplo en nuestro Navío de 60 Cañones, 6 pulgadas mas calado, respecto que los dos momentos variarán como $bx^{\frac{1}{2}}$, ó como $x^{\frac{3}{2}}$: esto es de $\frac{1}{12}n = \frac{1}{24}$, será, para los momentos laterales, $\frac{1}{2}mu\int cbx^{\frac{1}{2}}y = 25398mu$, y para los de Popa á Proa $\frac{1}{2}mu\int cbx^{\frac{1}{2}}y = 26970mu$.

205 De esta suerte, la fórmula de los momentos totales $mKv\,sen.\Delta + m\mathfrak{k}ru + \frac{1}{2}mu\int cbx^{\frac{1}{2}}y - \frac{1}{2}mu\int fgx^{\frac{3}{2}}$, se

re-

reducirá, en los laterales del Navío de 60, á $9\frac{1}{8}.68650m\,sen.\Delta + 4\frac{19}{24}.3316mu + 25398mu - 40626mu$, por haberse hallado (§.166) $K = 9\frac{1}{8}$, (§.112) $v = 68650$, (§§. 141. y 166) $k = 7\frac{1}{6} - 2\frac{9}{24} = 4\frac{19}{24}$, y (§.187) $r = 3316$: esto es, serán $626431m\,sen.\Delta + 15889mu + 25398mu - 40626mu = 626431mu\,sen.\Delta + 661mu$.

206 Los de Popa á Proa serán $68650mK\,sen.\Delta + 4\frac{19}{24}mru + 26970mu - 2568mu$, ó por haberse hallado (§§.159. y 166) $k = 117\frac{1}{4} - 2\frac{9}{24} = 114\frac{9}{24}$, y (§.187) $r = 294$, serán $7851843m\,sen.\Delta + 1409mu + 26970mu - 2568mu = 7851843m\,sen.\Delta + 25811mu$: bien entendido, que en los momentos laterales la u expresa la velocidad lateral que tome el Navío, y en los de Popa á Proa, la que tome por la Proa.

207 Hallados los momentos que padece un Navío, como por exemplo el de 60, con falidad se pueden hallar los que padece otro qualquiera, que le sea semejante en sus fondos, porque por lo dicho se pueden hallar los que padece el mismo Navío de 60, calado mas ó menos, y en disposicion enteramente semejante á aquella en que esté el otro Navío. Despues de esto, las cantidades K, v, k y r estan conocidas, ó pueden conocerse, segun se dixo en los Capitulos precedentes: y por consiguiente se tendrán los valores de $mKv\,sen.\Delta$, y $mukr$. Para deducir los de $\frac{1}{2}mu\int chx^{\frac{1}{2}}y$, y $\frac{1}{2}mu\int fgx^{\frac{3}{2}}$, se ve que ambas cantidades son como las raices quadradas de las septimas potestades de las dimensiones lineares de los Navíos: con que se hallarán con solo una simple regla de tres. En el §. 145 diximos, que puestos dos Navíos n y N, y que sean,

m la Manga, v el volúmen sumergido, a el area ó seccion de la superficie del fluido, } en el primer Navío:

M la Manga, V el volúmen sumergido, } en el segundo;

es $\frac{v-\frac{m^3}{M^3}V}{a}$ la altura que hubiera de tener de menos ó mas calado el Navío n para quedar en la misma disposicion que el N. Exprese b lo que estubiere calado el Navío n, y será $b-\frac{v-\frac{m^3}{M^3}V}{a}$ lo que habrá de estar para quedar como el Navío N: y respecto que los momentos $\int chx^{\frac{1}{2}}y$ varian como $x^{\frac{3}{2}}$, ó como $b^{\frac{3}{2}}$ á $\left(b-\frac{v-\frac{m^3}{M^3}V}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$; y los $\int fgx^{\frac{3}{2}}$, como $x^{\frac{5}{2}}$, ó como $b^{\frac{5}{2}}$ á $\left(b-\frac{v-\frac{m^3}{M^3}V}{a}\right)^{\frac{5}{2}}$: esto es, los primeros, como 1 á $1-\frac{3}{2ba}\left(v-\frac{m^3}{M^3}V\right)$, y los segundos, como 1 á $1-\frac{5}{2ba}\left(v-\frac{m^3}{M^3}V\right)$: serán los primeros, para la nueva disposicion del Navío n, $=\int chx^{\frac{1}{2}}y-\frac{3\int chx^{\frac{1}{2}}y}{2ba}\left(v-\frac{m^3}{M^3}V\right)$, y los segundos $\int fgx^{\frac{3}{2}}-\frac{5}{2}\int\frac{fgx^{\frac{3}{2}}}{ba}\left(v-\frac{m^3}{M^3}V\right)$: estos son á los que padece el Navío N, como $m^{\frac{7}{2}}$ á $M^{\frac{7}{2}}$: luego se-

serán los que padece este Navío $\frac{M^{\frac{7}{2}}}{m^{\frac{7}{2}}}\int chx^{\frac{1}{2}}y\left(1-\frac{3}{2ba}\left(v-\frac{m^3}{M^3}V\right)\right)$ y $\frac{M^{\frac{7}{2}}}{m^{\frac{7}{2}}}\int fgx^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{5}{2ba}\left(v-\frac{m^3}{M^3}V\right)\right)$, expresando $\int chx^{\frac{1}{2}}$, y $\int fgx^{\frac{3}{2}}$ los momentos ya hallados que corresponden al Navío *n*. En el de 60 Cañones tenemos

$m = 42$

$v = 68650$

$a = 5312$

$b = 5 \cdot 3\frac{1}{2} = \frac{35}{2}$

$\left.\begin{array}{l}\int chx^{\frac{1}{2}}y = 50796 \\ \int fgx^{\frac{3}{2}} = 81252\end{array}\right\}$ en los momentos laterales,

$\left.\begin{array}{l}\int chx^{\frac{1}{2}}y = 53940 \\ \int fgx^{\frac{3}{2}} = 5136\end{array}\right\}$ en los momentos de Popa á Proa:

luego las expresiones se reducirán, en los momentos laterales, á $\frac{M^{\frac{7}{2}}.50796}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1-\frac{3\left(68650-\frac{(42)^3}{M^3}V\right)}{35 \cdot 5312}\right)$, y $\frac{M^{\frac{7}{2}}\,81252}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1-\frac{5\left(68650-\frac{(42)^3}{M^3}V\right)}{35 \cdot 5312}\right)$: y en los de Popa á Proa á $\frac{M^{\frac{7}{2}}\,53940}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1-\frac{3\left(68650-\frac{(42)^3}{M^3}V\right)}{35 \cdot 5312}\right)$, y $\frac{M^{\frac{7}{2}}\,5136}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1-\frac{5\left(68650-\frac{(42)^3}{M^3}V\right)}{35 \cdot 5312}\right)$.

208 Para hallar con esto los momentos laterales que padece el Navío de 70 Cañones, tenemos (§. 171.) $K = 10\frac{2}{3}$, V (§.112) $= 96500$, k (§§.146 y 171) $= 7\frac{5}{6} - 2\frac{5}{6} = 5$, r (§.191) $= 4391$, y M (§.117) $= 48$: luego $mKV sen.\Delta = 10\frac{2}{3} . 96500 . m sen.\Delta = 1029333 m sen.\Delta$: $mukr = 5 . 4391 . mu = 21955$:

$$\frac{M^{\frac{7}{2}}.50796}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{3(68650 - \frac{(42)^3}{M^3}V)}{35 . 5312}\right) = \frac{8^{\frac{7}{2}}.50796}{7^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{5(68650 - (\frac{7}{8})^3 . 96500)}{35 . 5312}\right)$$

$$= 75822 : \text{ y } \frac{M^{\frac{7}{2}}.81252}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{5(68650 - \frac{(42)^3}{M^3}V)}{35 . 5312}\right) =$$

$$\frac{8^{\frac{7}{2}}.81252}{7^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{5(68650 - (\frac{7}{8})^3 96500)}{35 . 5312}\right) = 115695 : \text{ por}$$

lo que serán los momentos laterales en el Navío de 70 Cañones $= 1029333 m sen.\Delta + 21955 mu + \frac{1}{2} mu . 75822 - . \frac{1}{2} mu . 115695 = 1029333 m sen.\Delta + 2019 mu$.

209 Para los momentos de Popa á Proa es K (§§. 160 y 171) $= 142\frac{5}{12} - 2\frac{5}{6} = 139\frac{7}{12}$, y r (§.191) $= 387$: luego $mKV sen.\Delta = 139\frac{7}{12} . 96500 . m sen.\Delta = 13469951 m sen.\Delta$: $mukr = 5 . 387 . mu = 1935 mu$:

$$\frac{M^{\frac{7}{2}}53940}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{3(68650 - \frac{(42)^3}{M^3}V)}{35 . 5312}\right) = \frac{8^{\frac{7}{2}}53940}{7^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{3(68650 - (\frac{7}{8})^3 96500)}{35 . 5312}\right)$$

$$= 83414 : \text{ y } \frac{M^{\frac{7}{2}}5136}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{5(68650 - (\frac{42}{M})^3 V)}{35 . 5312}\right) =$$

$$\frac{8^{\frac{7}{2}}5136}{7^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{5(68650 - (\frac{7}{8})^3 96500)}{35 . 5312}\right) = 7166 : \text{ por lo}$$

que serán los momentos de Popa á Proa que padecerá el Navío de 70 Cañones $= 13469951 m sen.\Delta + 1935 mu + \frac{1}{2} mu . 83414 - \frac{1}{2} mu . 7166 = 13469951 m sen.\Delta + 40059 mu$.

En

210 En la Fragata de 22 Cañones hallamos (§.172) el metacentro sobre el centro de gravedad, en quanto á los momentos laterales de $7\frac{3}{7}$ pies $=$ K, V (§.112) $=$ 25170 : k (§§. 147 y 172) $= 4\frac{19}{24} - 2\frac{5}{21} = 2\frac{31}{56}$: r (§. 192) $=$ 1426, y M (§. 112) $= 31\frac{2}{3}$: luego $mKV sen.\Delta = 7\frac{3}{7} . 25170 . m sen.\Delta = 186977 m sen.\Delta$: $mukr =$

$$2\tfrac{31}{56} . 1426 . mu = 3641 mu : \frac{M^{\frac{7}{2}} 50796}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{3\left(68650 - \left(\frac{42}{M}\right)^3 V\right)}{35 \cdot 5312}\right) =$$

$$\frac{(31\frac{2}{3})^{\frac{7}{2}} 50796}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{3\left(68650 - \left(\frac{42}{31\frac{2}{3}}\right)^3 25170\right)}{35 \cdot 5312}\right) = 15877 :$$

$$\text{y } \frac{M^{\frac{7}{2}} 81252}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{5\left(68650 - \left(\frac{42}{M}\right)^3 V\right)}{35 \cdot 5312}\right) = \text{------}$$

$$\frac{(31\frac{2}{3})^{\frac{7}{2}} . 81252}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{5\left(68650 - \left(\frac{42}{31\frac{2}{3}}\right)^3 25170\right)}{35 \cdot 5312}\right) = 22173 :$$

por lo que serán los momentos laterales que padecerá la Fragata $= 186977 m sen.\Delta + 3641 mu + \frac{1}{2} mu . 15877 - \frac{1}{2} mu . 22173 = 186977 m sen.\Delta + 493 mu.$

211 Para los momentos de Popa á Proa, es K (§§. 160 y 172) $= 103\frac{1}{2} - 2\frac{5}{21} = 101\frac{11}{42}$, y r (§.192) $=$ 124 : luego $mKV sen.\Delta = 101\frac{11}{42} . 25170 . m sen.\Delta = 2548762 m sen.\Delta$: $mukr = 2\frac{31}{56} . 124 . mu = 316 mu$:

$$\frac{M^{\frac{7}{2}} 53940}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{3\left(68650 - \left(\frac{42}{M}\right)^3 V\right)}{35 \cdot 5312}\right) = \text{-------}$$

$$\frac{(31\frac{2}{3})^{\frac{7}{2}} 53940}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{3\left(68650 - \left(\frac{42}{31\frac{2}{3}}\right)^3 25170\right)}{35 \cdot 5312}\right) = \text{----}$$

16856 :

$$16856:\ y\,\frac{M^{\frac{7}{2}}5136}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1-\frac{5\left(68650-\left(\frac{42}{M}\right)^3 V\right)}{35.5312}\right)=$$

$$\frac{(31\frac{2}{3})^{\frac{7}{2}}.5136}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1-\frac{5\left(68650-\left(\frac{42}{31\frac{2}{3}}\right)^3 25170\right)}{35.5312}\right)=1401:$$

por lo que serán los momentos de Popa á Proa, que padece la Fragata, $=2548762 m sen.\Delta+316 mu+\frac{1}{2}mu.16856-\frac{1}{2}mu.1401=2548762 m sen.\Delta+8044 mu.$

212 En el Navío de tres puentes hallamos K (§. 173) $=8\frac{6}{7}$: V (§.118) $=128293$: k (§§.148 y 173) $=9-3\frac{13}{14}=5\frac{1}{14}$: $r=$ (§.193) 5568: y M $=$ (§.118) 51: luego $mKV sen.\Delta=8\frac{6}{7}.128293.m sen.\Delta=1136309 m sen.\Delta$: $mukr=5\frac{1}{14}.5568.mu=$

$$28238.mu:\ \frac{M^{\frac{7}{2}}.50796}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1-\frac{3\left(68650-\left(\frac{42}{M}\right)^3 V\right)}{35.5312}\right)=$$

$$\frac{(17)^{\frac{7}{2}}.50796}{(16)^{\frac{7}{2}}}\left(1-\frac{3\left(68650-\left(\frac{16}{17}\right)^3 128293\right)}{35.5312}\right)=$$

$$101625:\ y\,\frac{M^{\frac{7}{2}}.81252}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1-\frac{5\left(68650-\left(\frac{42}{M}\right)^3 V\right)}{35.5312}\right)=$$

$$\frac{(17)^{\frac{7}{2}}.81252}{(16)^{\frac{7}{2}}}\left(1-\frac{5\left(68650-\left(\frac{16}{17}\right)^3 128293\right)}{35.5312}\right)=203960:$$



por lo que serán los momentos laterales que padecerá el Navío de tres puentes $=1136309 m sen.\Delta+28238 mu+\frac{1}{2}mu.101625-\frac{1}{2}mu.203960=1136309 m sen.\Delta-22930 mu.$

Pa-

213 Para los momentos de Popa á Proa es K (§§. 160 y 173) $= 131\frac{1}{2} - 3\frac{13}{14} = 127\frac{4}{7}$, y r (§. 193) $= 498$: luego $mKV sen.\Delta = 127\frac{4}{7} \cdot 128293 m sen.\Delta = 16366527 m sen.\Delta$: $mukr = 5\frac{1}{14} \cdot 496 mu = 2525 mu$:

$$\frac{M^{\frac{7}{2}} \cdot 53940}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{3\left(68650 - \left(\frac{42}{M}\right)^3 V\right)}{35 \cdot 5312}\right) = \text{-------}$$

$$\frac{(17)^{\frac{7}{2}} \cdot 53940}{(16)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{3\left(68650 - \left(\frac{16}{17}\right)^3 128293\right)}{35 \cdot 5312}\right) = \text{---}$$

$$107666 : \text{y } \frac{M^{\frac{7}{2}} \cdot 5136}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{5\left(68650 - \left(\frac{42}{M}\right)^3 V\right)}{35 \cdot 5312}\right) = \text{--}$$

$$\frac{(17)^{\frac{7}{2}} \cdot 5136}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{5\left(68650 - \left(\frac{16}{17}\right)^3 V\right)}{35 \cdot 5312}\right) = 12892 : \text{por}$$

lo que los momentos de Popa á Proa, que padecerá el Navío de tres puentes, serán $= 16366527 m sen.\Delta + 2525 mu + \frac{1}{2} mu \cdot 107666 - \frac{1}{2} mu \cdot 12892 = \text{-------} 16366527 m sen.\Delta + 42794 mu$.

214 Estos exâmenes manifiestan ya claramente lo que, para lograr un buen aguante de Vela, conviene elevar lo mas que sea posible el centro de las resistencias horizontales; pues de este depende el momento horizontal $mukr - \frac{1}{2} mu \int fgx^{\frac{3}{2}}$, que puede ser mas ó menos negativo, segun la colocacion de dicho centro. Partiendo esta cantidad por la resistencia r, resulta $mu\left(k - \frac{1}{2r}\int fgx^{\frac{3}{2}}\right)$: de suerte que $k - \frac{1}{2r}\int fgx^{\frac{3}{2}}$ es la distancia desde el centro de gravedad al de las resistencias horizontales. Si $\frac{1}{2r}\int fgx^{\frac{3}{2}}$ es mayor que k, es-

estará dicho centro debaxo del de gravedad, puesto que k es la distancia de este á la superficie del fluido. Quanto mas baxo estubiere, pues, dicho centro, tanto mas negativo será el momento $mu(kr - \frac{1}{2}\int fgx^{\frac{3}{2}})$ que nos perjudica para el aguante de Vela. Este en ninguna manera depende de la seccion horizontal del Navío hecha por la superficie del fluido, que es la unica que, con *Mr. Bouguer*, creyeron todos ser la que determinaba la estabilidad ó aguante, como en efecto la determina, segun vimos (*Capit.* 3 *y* 4) en el solo caso del reposo. Tampoco depende de dicha seccion el momento vertical $\frac{1}{2}mu\int chx^{\frac{1}{2}}y$: ambos proceden de la figura ú disposicion de los fondos del Navío: quanto mas verticales fueren estos desde la horizontal del centro de gravedad hacia arriba, tanto menor será $\int fgx^{\frac{3}{2}}$, y mayor $\int chx^{\frac{1}{2}}y$: por lo que, esta disposicion conviene mucho para lograr una perfecta estabilidad. La colocacion baxa del centro de gravedad, tambien conviene mucho, porque no solo quanto mas baxo esté este, tanto mayor es K y el momento $mKV\,sen.\,\Delta$, sino que tambien aumenta la k, y con ello disminuye el momento negativo $mu(kr - \frac{1}{2}\int fgx^{\frac{3}{2}})$; pero esta providencia es perjudicial para el balance, como se verá mas adelante.

215 Hemos omitido en el cálculo la resistencia que procede de la desnivelacion, porque, como ya se ha visto, es sumamente corta en las velocidades regulares que toma el Navío, especialmente en los grandes: y asimismo no se ha hecho atencion á la cantidad á que debe reducirse la absoluta fuerza de las resistencias, que es (*Esc. Prop.* 36. *Lib.* 2. *Tom.* 1.) los dos tercios de la que resulta por el cálculo; sin embargo,

go, en los casos en que se combinaren fuerzas resistentes, con otras que resulten de pesos efectivos, como en este, se disminuirán las resistentes á los dos tercios: y asi el momento lateral absoluto en el Navío de 60 Cañones, será solo $626431mf\Delta + 440mu$; y asi de los demas.

CAPITULO 7.

De los momentos que padece la Nave en su movimiento horizontal, con respecto al exe vertical que pasa por el centro de gravedad.

216 Los momentos que padece la Nave en su movimiento horizontal, con respecto al exe vertical, que pasa por el centro de gravedad, pueden ser varios, segun la direccion en que se hiciere el movimiento; pero asi como se hizo en el Capitulo precedente los podemos reducir á dos, uno perpendicular á la Quilla, que llamamos lateral, y otro de Popa á Proa; pero como este no se hace por ahora necesario para nuestras conclusiones, bastará que especulemos los momentos laterales.

217 Estos son (*Propos. 65. Libr. 2. Tom. 1.*) $= \frac{1}{2}mu\int cyx^{\frac{1}{2}}dx\,fen.\theta$, ó substituyendo (*Cor. 11. Lem. 1. Lib. 2. Tom. 1.*) $fen.\theta = fen.\lambda fen.\eta = \frac{1}{2}mu\int cyx^{\frac{1}{2}}dx\,fen.\lambda fen.\eta$ $=$ (§. 177) $\frac{1}{2}mu\int fgyx^{\frac{1}{2}}$. Los valores de fg, ó mas bien Fg, por ser los laterales los que corresponden al caso, se hallan ya calculados para el Navío de 60 en la Tabla (§. 179.): y asimismo se tienen (§. 180.) los de $x^{\frac{1}{2}}$, que son $\frac{4}{3}$, $\frac{23}{10}$, $\frac{71}{24}$, $\frac{7}{2}$ y $\frac{127}{32}$. Multiplíquese,

se, pues, el valor de Fg en cada quadrícula separada, por su correspondiente $x^{\frac{1}{2}}$, y resultarán los productos F$gx^{\frac{1}{2}}$ que expone la Tabla siguiente. Súmense con separacion cada cinco de las casas horizontales, que encierran cada dos quadrículas, y con las sumas fórmese la coluna primera de la segunda Tabla. Sáquense los valores de y de la Tabla (§. 201) por ser los mismos que aqui corresponden, y con ellos fórmese la segunda coluna. Multiplicando por ultimo cada uno de estos por la suma que le precede $=$ F$gx^{\frac{1}{2}}$, se tendrán los momentos F$gx^{\frac{1}{2}}y$ que expone la tercera coluna, donde estan distinguidos los positivos de Proa $64328\frac{2}{3}$ que obligan á orzar al Navío, y los negativos de Popa $98603\frac{1}{3}$ que le obligan á arribar: y como estos exceden á los otros en $34274\frac{2}{3}$, con este exceso queda el Navío, por esta causa, propenso á arribar: esto es, siendo $\int fgx^{\frac{1}{2}}y = 34274\frac{2}{3}$, será el momento que obliga á arribar al Navío $= \frac{1}{2}mu\int fgx^{\frac{1}{2}}y = 17137mu$.

218 En el cálculo de las resistencias laterales no se hizo atencion á la inclinacion que de ordinario tiene la Quilla, respecto del horizonte, ú de la superficie del fluido, se supone allí paralela á este, por hacerse despreciable la diferencia que podia resultar; pero siendo considerable en el cálculo de estos momentos, no podemos dispensar su exâmen. Para mayor facilidad podemos suponer que todo el espacio
Lam. 1. Fig. 33. ABC, desde la horizontal AB, hasta la Quilla CB, se reduzca á un triángulo vertical, mitad del rectángulo ABDC: con lo que dividido este en dos partes iguales por la horizontal EG, el triángulo BFG será el espacio que se eleva en la Proa, y su igual EFC el que se sumerge en Popa. Tanto los momentos que produce

Tabla de los productos $\mathrm{F}gx^{\frac{1}{2}}$.

Entre las líneas de agua.

Entre las Quadernas.	1ª y 2ª		2ª y 3ª		3ª y 4ª		4ª y 5ª		5ª y Quil.	
	$x = \frac{4}{3}$		$x = \frac{23}{10}$		$x = \frac{71}{24}$		$x = \frac{7}{2}$		$x = \frac{127}{32}$	
Roda y XXVII	6	4								
XXVII XXIV	18	7	30	8	27	1				
XXIV XXI	24	4	34	8	51	9	61	10	60	10
XXI XVIII	27	1	40	0	41	11	43	2	67	10
XVIII XV	30	8	44	3	49	10	40	10	41	8
XV XII	30	8	47	9	56	0	42	0	30	1
XII IX	31	3	49	2	56	3	49	0	30	1
IX VI	31	3	51	9	58	8	53	8	29	1
VI III	31	3	52	2	59	5	56	7	28	5
III 0	31	3	52	2	61	10	58	7	28	5
0 3	23	2	38	11	45	7	43	2	20	6
3 6	31	3	52	2	60	2	58	7	28	5
6 9	31	3	51	9	59	5	55	9	30	9
9 12	31	1	50	4	56	11	55	9	32	9
12 15	30	8	50	4	56	6	53	1	34	11
15 18	30	8	47	9	52	3	42	0	39	4
18 21	30	4	47	2	48	4	35	0	44	8
21 24	29	7	44	8	46	1	47	10	50	0
24 27	29	3	43	8	45	4	50	9	73	5
27 30	22	8	35	6	50	4	67	8	85	4
30 33	18	9	33	4	58	11	79	11	95	4
33 y Codaste.	9	5	21	9	32	0	31	9	36	0

	Sumas		Valores de y		Valores de $Fgyx^{\frac{1}{2}}$	
Roda y XXVII	6	4	71	0	449	8
XXVII XXIV	76	4	66	1	5044	4
XXIV XXI	223	5	58	11	13167	5
XXI XVIII	220	0	51	9	11385	0
XVIII XV	207	3	44	7	9239	11
XV XII	206	6	37	5	7726	7
XII IX	205	9	30	3	6224	0
IX VI	224	5	23	1	5180	2
VI III	227	10	15	11	3437	2
III 0	232	3	8	9	2032	0
0 3	171	4	2	7	442	5
3 6	230	7	4	9	1095	5
6 9	228	11	11	11	2727	11
9 12	226	10	19	1	4328	9
12 15	225	6	26	3	5919	5
15 18	212	0	33	5	7084	4
18 21	205	6	40	7	8339	11
21 24	218	2	47	9	10417	6
24 27	242	5	54	11	13312	9
27 30	261	6	62	1	16234	9
30 33	286	11	69	3	19814	9
33 y Codaste.	130	11	71	3	9327	10

Valores positivos para orzar. (Roda y XXVII hasta 0 3): $64328\frac{2}{3}$

Valores negativos. (3 6 hasta 33 y Codaste): $98603\frac{1}{3}$

$34274\frac{2}{3}$ Diferencia.

duce el uno como el otro son negativos, porque los de Proa se han de substraer, con que ambos se han de agregar á los ya hallados. En estos triángulos son $EF = f$, y $\frac{1}{2}EC = g$: con que $fg = \frac{1}{2}(EF)(EC)$, y en los dos triángulos juntos $fg = EF.EC = AB.\frac{1}{4}AC$: esto es, al producto de la longitud de la Quilla $AB = 130$, por la quarta parte de la diferencia entre lo que calase mas la Popa que la Proa: y supuesta esta de dos pies, será $fg = \frac{1}{2}.130 = 65$. x es lo que el punto F está sumergido en el fluido $= 5 . 3\frac{1}{2} = \frac{35}{2}$: y $y = \frac{2}{3}.FE = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}.130 = 43\frac{1}{3}$, que es la distancia desde el punto F al centro de las resistencias del triángulo: luego $fgx^{\frac{1}{2}}y = 65\left(\frac{35}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.43\frac{1}{3} = 11787$, y $\frac{1}{2}mu\int fgx^{\frac{1}{2}}y = 5893\frac{1}{2}mu$, cuya cantidad agregada á $17137mu$, será el todo de $\frac{1}{2}mu\int fgx^{\frac{1}{2}}y = 23031mu$.

219 A esto es menester añadir los momentos que resultaren de la tablazon, Quilla, Codaste, Timon, Roda, y Taxamar. La tablazon aumenta el valor de $fgx^{\frac{1}{2}}y$, y en la razon que aumenta $gx^{\frac{1}{2}}$, ó $x^{\frac{3}{2}}$, que (§. 181) es de $\frac{1}{35}$: luego será el aumento, por lo que toca á la tablazon $= 658mu$. La Quilla, Contraquilla y Zapata, supuestas un rectangulo de 2 pies de alto, con 130 de longitud, tiene 75 pies á Popa del centro de gravedad, y 55 á Proa: luego para Popa $fg = 75 . 2 = 150$, y para Proa $= 55 . 2 = 110$. x es (§. 182) para ambas partes $= \frac{37}{2}$: con que será para Popa $fgx^{\frac{1}{2}} = 645$, y para Proa $= 473$. Multiplicando estas cantidades por $\frac{75}{2}$ y $\frac{55}{2}$, que es lo que distan los centros de las resistencias del de gravedad, será para Popa $fgx^{\frac{1}{2}}y = 24562\frac{1}{2}$, y para Proa $= 13007\frac{1}{2}$; cuya diferencia es 11555: y por consiguiente será, por lo que toca á la Quilla, $\frac{1}{2}mu\int fgx^{\frac{1}{2}}y = 5777\frac{1}{2}mu$.

El

220 El Codaste y Timon juntos se supusieron (§. 182) un trapecio ; y su resistencia se halló $=$ $194mu$: luego multiplicada por 80 , distancia desde su centro al de gravedad , producirá el momento $15520mu$.

221 La Roda y Taxamar juntos se supusieron (§. 182) otro trapecio ; y su resistencia se halló $=$ $132\frac{5}{6}mu$: luego multiplicada por $62\frac{1}{3}$, distancia desde su centro al de gravedad , producirá el momento $8280mu$.

222 Juntos los momentos que resultan de la tablazon, de la Quilla , del Codaste y Timon , suman $21955\frac{1}{2}mu$: y rebaxando los de la Roda y Taxamar $8280mu$, quedan $13675\frac{1}{2}mu$, que agregados á los del cuerpo del Navío $23031mu$, es el todo de los momentos que obligan á arribar al Navío , por razon de la resistencia lateral, $= 36706\frac{1}{2}mu$.

223 Hallados los momentos para una disposicion del Navío , se hallarán los que corresponden á otra, en que esté mas ó menos sumergido en el fluido de la cantidad n , porque el aumento ú disminucion de ellos es como el de las resistencias , puesto que en la mutacion no varía la y. Este aumento ú disminucion se dixo (§.187) que es en todo, excepto en la Quilla , como la 1 á $\frac{1}{12}n$: y en esta como 1 á $\frac{1}{36}n$. Puesto pues , como se hizo antes , que el Navío esté mas sumergido de 6 pulgadas , será $n = \frac{1}{2}$: el primer aumento $=$ $(36706\frac{1}{2} - 5777\frac{1}{2})\frac{1}{12}nmu = 1288\frac{2}{3}mu$, y el segundo $=$ $(5777\frac{1}{2})\frac{1}{36}nmu = 80\frac{1}{6}mu$: luego agregados á los $36706\frac{1}{2}mu$, será el legitimo momento que obliga á arribar al Navío de 60 Cañones sumergido á su verdadera línea de agua , $= 38075mu$.

224 Si se dividen estos momentos por la resistencia total (§.187) $3316mu$, que padece el mismo Navío , vienen por quociente $11\frac{1}{2}$ pies , que es lo que el centro de las resistencias laterales queda á Popa del de

gra-

gravedad, si se supone que el Navío esté 2 pies mas calado de Popa que de Proa; pero si se supusiese que la Quilla quede horizontal, respecto que entonces se ha de substraer (§.218) $\frac{5893\frac{1}{2}mu}{3316mu}$, serán proxîmamente solo $9\frac{1}{2}$ pies los que el centro de las resistencias se apartará del de gravedad.

225 Hallados los momentos que padece un Navío, con facilidad se hallan los que corresponden á otro, quando en sus fondos son semejantes: pues la fórmula $\frac{1}{2}mu\int fgx^{\frac{1}{2}}y$ varía segun las raices quadradas de las septimas potestades de las dimensiones lineares de los Buques: esto es, siendo m la manga del Navío, cuyo momento Q se conoce, y M la de aquel que se desea conocer, será este $=\frac{M^{\frac{7}{2}}}{m^{\frac{7}{2}}}Q$, con tal que el momento Q sea aquel que padeciere el primer Navío estando calado ó sumergido en el fluido como lo esté el segundo. La altura que ha de tener el primero de mas ó menos calado para que quede en la misma disposicion que el segundo es (§.145) $=\frac{v-\frac{m^3}{M^3}V}{a}$: con que substituyendo este valor en lugar de n en los aumentos ú disminuciones del Navío de 60, $(36706\frac{1}{2}-5777\frac{1}{2})\frac{1}{12}nmu = 2578\frac{1}{4}nmu$, y $(5777\frac{1}{2})\frac{1}{36}nmu = 160\frac{1}{2}nmu$, que han de resultar en los momentos, quedarán aquellos en $\frac{2578\frac{1}{4}mu}{a}\left(v-\frac{m^3}{M^3}V\right)$, y $\frac{160\frac{1}{2}mu}{a}\left(v-\frac{m^3}{M^3}\right)$: por consiguiente el momento que padecerá el Navío de 60, puesto en la misma disposicion que el otro, será $=$

$$38075mu-\frac{2578\frac{1}{4}mu}{a}\left(v-\frac{m^3}{M^3}V\right)-\frac{160\frac{1}{2}mu}{a}\left(v-\frac{m^3}{M^3}V\right)$$

$=$

$$=38075mu-\frac{2738\frac{3}{4}mu}{a}\left(v-\frac{m^3}{M^3}V\right)= \text{--------}$$

$$38075mn-\frac{2738\frac{3}{4}mu}{5500}\left(68650-\frac{(42)^3}{M^3}V\right)$$: y el que padecerá el otro Navío, cuya manga es M, $=$ ---

$$\frac{38075M^{\frac{7}{2}}mu}{(42)^{\frac{7}{2}}}-\frac{2738\frac{3}{4}M^{\frac{7}{2}}mu}{5500(42)^{\frac{7}{2}}}(68650-\frac{(42)^3}{M^3}V)= \text{---}$$

$$\frac{M^{\frac{7}{2}}mu}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(38075-\frac{2738\frac{3}{4}}{5500}(68650-\frac{(42)^3}{M^3}V)\right).$$

226 Para el Navío de 70 Cañones tenemos $M=48$ $V=96500$: luego será el momento que padecerá este

$$\text{Navío}=\frac{8^{\frac{7}{2}}mu}{7^{\frac{7}{2}}}\left(38075-\frac{2738\frac{3}{4}}{5500}(68650-(\tfrac{7}{8})^3 96500)\right)$$

$=57577mu$, cuya cantidad partida por la resistencia lateral $4391mu$ que padece, viene por quociente $13\frac{1}{9}$ pies, que es lo que el centro de las resistencias queda mas á Popa que el de gravedad.

127 En la Fragata de 22 Cañones es $M=32$, y $V=25170$: luego será el momento que padecerá $=$

$$\frac{(16)^{\frac{7}{2}}mu}{(21)^{\frac{7}{2}}}\left(38075-\frac{2738\frac{3}{3}}{5500}(68650-(\tfrac{21}{16})^3 25170)\right)= \text{-}$$

$12830mu$, cuya cantidad partida por la resistencia lateral $1426mu$ que padece, viene por quociente 9 pies, que es lo que el centro de las resistencias queda á Popa del de gravedad.

228 En el Navío de tres puentes es $M=51$, y $V=128293$: luego será el momento que padecerá

$$=\frac{(17)^{\frac{7}{2}}mu}{(14)^{\frac{7}{2}}}\left(38075-\frac{2738\frac{3}{4}}{5500}(68650-(\tfrac{14}{17})^3 128293)\right)$$

$=78071mu$, cuya cantidad partida por la resistencia

cía lateral 5769*mu* que padece, viene por quociente $13\frac{1}{2}$ pies, que es lo que el centro de las resistencias queda mas á Popa que el de gravedad.

CAPITULO 8.

De los momentos que padece el Navío en su rotacion sobre un exe horizontal, que los Marineros llaman balance ó cabezada.

229 LOs momentos que padece el Navío en su rotacion pueden ser varios, segun el exe horizontal sobre que se suponga executarse aquella; pero los reduciremos, como antes, á solo dos casos: uno, siendo el exe el que se suponga tirado de Popa á Proa, y es lo que efectivamente llaman los Marineros *balance*; y el otro, siendo el exe perpendicular al primero, que es lo que llaman *cabezada*: pues unos y otros deben resultar de los principios generales establecidos, sin embargo que *Mr. Bouguer* (*Tratado del Navío*, lib.2. sec.3. cap.3. §.5.) los consideró muy distintos, por causa de no haber especulado enteramente estos movimientos, como se verá en su lugar.

230 Los momentos que padece un cuerpo que tiene dos mitades iguales y semejantes, y que gira sobre un exe horizontal, son (*Pro.*80.*Lib.*2.*Tom.*1.) $=$
$$\frac{\frac{1}{2}mV}{dt}\int cx^{\frac{1}{2}}dx\left((k-x)^2 sen.\lambda sen.\eta + 2y(k-x)cos.\eta + \frac{y^2 cos.\eta^2}{sen.\lambda sen.\eta}\right).$$
La primera cantidad $cx^{\frac{1}{2}}dx(k-x)sen.\lambda sen.\eta$, es (§.177) $=$ $x^{\frac{1}{2}}fg(k-x)^2 = k^2x^{\frac{1}{2}}fg - 2kx^{\frac{3}{2}}fg + fgx^{\frac{5}{2}}$. Para reducir la segunda $2cx^{\frac{1}{2}}dxy(k-x)cos.\eta$, tenemos $1 : cos.\eta$ (seno de NML) $= dx$ (ML) : NL $= dxcos.\eta$, que llamamos (§. 197) b: luego será dicha cantidad $=$ $2cx^{\frac{1}{2}}byk - 2cx^{\frac{3}{2}}by$. Introduciendo en la tercera Lam. 1. Fig. 32.

$\frac{cx^{\frac{1}{2}}dxy^2\cos.n^2}{\operatorname{sen}.\lambda\operatorname{sen}.n}$ el valor de $dx\cos.n = h$, queda en $\frac{cx^{\frac{1}{2}}hy^2\cos.n}{\operatorname{sen}.\lambda\operatorname{sen}.n}$: asimismo es $c.\operatorname{sen}.\lambda$ (§.177) $= f$, que da $\operatorname{sen}.\lambda = \frac{f}{c}$, y $\frac{\cos.n}{\operatorname{sen}.n} = \frac{h}{g}$: luego será esta cantidad $= \frac{c^2x^{\frac{1}{2}}h^2y^2}{fg}$: y así los momentos que padece el Navío serán

$$\frac{\frac{1}{2}mV}{dt}\int\left(k^2fgx^{\frac{1}{2}} - 2kfgx^{\frac{3}{2}} + fgx^{\frac{5}{2}} + 2ckhyx^{\frac{1}{2}} - 2chyx^{\frac{3}{2}} + \frac{c^2h^2y^2x^{\frac{1}{2}}}{fg}\right)d$$

231 La mayor parte de estas cantidades las tenemos ya halladas para el Navío de 60 Cañones, que nos sirve de exemplo. Empezando por los balances ó accion lateral es (§.180) $\int fgx^{\frac{1}{2}} = 4494$: y siendo k (§. 165 y 166) $= 18 - 13\frac{5}{24} = 4\frac{19}{24}$, será $k^2\int fgx^{\frac{1}{2}} =$ 103183. Del mismo modo es (§.197) $\int fgx^{\frac{3}{2}} = 43471,4$: luego $2k\int fgx^{\frac{3}{2}} = 416601$. Para hallar $\int fgx^{\frac{5}{2}} = \int fgx^{\frac{3}{2}}.x$, multiplicaremos cada uno de los valores $\int fgx^{\frac{3}{2}}$ que corresponden á los espacios entre dos de las líneas de agua (§.197) por su correspondiente x, y son

$\int fgx^{\frac{3}{2}} . x$		$\int fgx^{\frac{5}{2}}$
$1213,8 . \frac{21}{10}$	$=$	2549
$5157,6 . \frac{56}{10}$	$=$	$28882\frac{1}{2}$
$9746,1 . \frac{91}{10}$	$=$	$88689\frac{1}{2}$
$13041,0 . \frac{126}{10}$	$=$	$164316\frac{1}{2}$
$14312,9 . \frac{161}{10}$	$=$	$230437\frac{1}{2}$
		514875 = al total $\int fgx^{\frac{5}{2}}$.

$\int chx$

$\int chx^{\frac{1}{2}}y$ es (§.201) $= 46338$: luego $2k\int chx^{\frac{1}{2}}y = $ --- 444072. Para hallar $\int chyx^{\frac{3}{2}} = \int chx^{\frac{1}{2}}y \,.\, x$, multiplicaremos cada uno de los valores $\int chx^{\frac{1}{2}}y$, que corresponden á los espacios entre dos líneas de agua, por su correspondiente x, y son

$\int chx^{\frac{1}{2}}y \,.\, x$	$\int chyx^{\frac{3}{2}}$
$4812 \,.\, \frac{21}{10} =$	10105
$9610 \,.\, \frac{56}{10} =$	53816
$12381 \,.\, \frac{91}{10} =$	112667
$13435 \,.\, \frac{126}{10} =$	169281
$6100 \,.\, \frac{161}{10} =$	98210
	444079 $=$ al total $\int chyx^{\frac{3}{2}}$:

luego $2\int chyx^{\frac{3}{2}} = 888158$.

232 Ultimamente para hallar el valor de $\int \frac{c^2h^2y^2x^{\frac{5}{2}}}{fg}$ que es la única cantidad que no tenemos calculada, es preciso acudir á las Tablas (§.179 y 201) donde tenemos los productos fg y chy : se quadrarán estos, y puestos despues, tanto los fg, como los $c^2h^2y^2$, por su orden en otra Tabla como la siguiente, se deducirán los quocientes $\frac{c^2h^2y^2}{fg}$, que corresponden á los espacios entre cada dos líneas de agua. Hechas las sumas de las colunas verticales, se multiplicará cada una por su correspondiente $x^{\frac{1}{2}}$, (§.180) y serán los productos

 $\int c^2$

$\int\frac{c^2b^2y^2}{fg}$	. $x^{\frac{1}{2}}$	$\int\frac{c^2b^2y^2x^{\frac{1}{2}}}{fg}$
$26461\frac{1}{3}$	. $\frac{4}{3}$ =	34615
$43297\frac{11}{12}$	. $\frac{23}{10}$ =	99585
$55000\frac{1}{6}$	. $\frac{71}{24}$ =	162709
$64859\frac{1}{0}$	. $\frac{7}{2}$ =	227007
$22432\frac{11}{12}$	. $\frac{127}{32}$ =	89031
		612947 = al total $\int\frac{c^2b^2y^2x^{\frac{1}{2}}}{fg}$.

233 A las seis cantidades halladas es preciso añadir los momentos que resultan por el grueso de las tablas, por la Quilla, Codaste, Timon, Roda y Taxamar. Con la tablazon aumenta la primera cantidad $\int k^2fgx^{\frac{1}{2}} = 103183$ como $x^{\frac{3}{2}}$, ó en la razon (§.181) de $\left(\frac{35}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$ á $\left(\frac{35}{2}+\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$: esto es, de 1 á $1+\frac{1}{35}+\frac{1}{35.210}$; de suerte, que es el aumento $2948+14=2962$: luego con la tablazon es $\int k^2fgx^{\frac{1}{2}} = 106145$. La segunda cantidad $2k\int fgx^{\frac{3}{2}} = 416601$, aumenta como $x^{\frac{5}{2}}$, ó en la razon de 1 á $1+\frac{1}{21}+\frac{1}{21.70}$, y es el aumento $= 19638+283 = 20121$: luego con la tabla es $2k\int fgx^{\frac{3}{2}} = 436722$. La tercera cantidad $\int fgx^{\frac{5}{2}} = 514875$ aumenta como $x^{\frac{7}{2}}$, ó en la razon de 1 á $1+\frac{1}{15}+\frac{1}{15.42}$, y es el aumento $= 34323+817 = 35140$: luego con la tabla es $\int fgx^{\frac{5}{2}} = 550015$. La quarta cantidad $2k\int chx^{\frac{1}{2}}y = 444072$, aumenta como $x^{\frac{3}{2}}y$, por ser b como x: esto es, primero como $x^{\frac{3}{2}}$, y las resultas como y, ó en la razon de 1 á 1+

1

$\frac{1}{35} + \frac{1}{35.210}$, y despues de 1 á $\frac{1}{42}$; de suerte, que el primer aumento es 12748, y el segundo 10573 + 303: luego con la tabla es $2k\int chx^{\frac{1}{2}}y = 467696$. La quinta cantidad $2\int chyx^{\frac{3}{2}} = 888158$, aumenta como $x^{\frac{5}{2}}$, y como y, ó en la razon de 1 á $1 + \frac{1}{21} + \frac{1}{21.70}$, y despues de 1 á $1 + \frac{1}{42}$; el primer aumento es 42897, y el segundo 21147 + 1020: luego con la tablazon es $2\int chyx^{\frac{3}{2}} = 953222$. Ultimamente, la sexta cantidad $\int \frac{c^2 h^2 y^2 x^{\frac{1}{2}}}{fg} = 612947$, aumenta como $x^{\frac{3}{2}}$, y como y^2, ó en la razon de 1 á $1 + \frac{1}{35} + \frac{1}{35.210}$, y despues de 1 á $1 + \frac{1}{21} + \frac{1}{(42)^2}$; el primer aumento es 17596, y el segundo 29535 + 848: luego con la tabla es $\int \frac{c^2 h^2 y^2 x^{\frac{1}{2}}}{fg} =$ 660926. Sumando estas 6 nuevas cantidades, tendremos por lo que toca al cuerpo del Navío con su tablazón

$$\int \left(k^2 fgx^{\frac{1}{2}} - 2kfgx^{\frac{3}{2}} + fgx^{\frac{5}{2}} + 2ckhyx^{\frac{1}{2}} - 2chyx^{\frac{3}{2}} + \frac{c^2 h^2 y^2 x^{\frac{1}{2}}}{fg}\right) = 394838,$$

y $\frac{\frac{1}{2} mV}{dt} \int \left(k^2 fgx^{\frac{1}{2}} - 2kfgx^{\frac{3}{2}} + fgx^{\frac{5}{2}} + 2ckhyx^{\frac{1}{2}} - 2chyx^{\frac{3}{2}} + \frac{c^2 h^2 y^2 x^{\frac{1}{2}}}{fg}\right) = \frac{197419mV}{dt}$.

234 Por lo que toca á la Quilla hallamos (§.182) $\frac{1}{2}\int fgx^{\frac{1}{2}} = 560\frac{1}{6}$, y (§.199) $x = 19$: con que siendo $k = 4\frac{19}{24}$, será $k^2 - 2kx + x^2 = (14\frac{5}{24})^2 = 201\frac{21}{24}$, y $\frac{1}{2}\int fgx^{\frac{1}{2}}.(k-x)^2 = 560\frac{1}{6}.201\frac{21}{24} = 113083$. Las otras can-

Tabla de los productos fg, $c^2h^2y^2$, y de los

Entre las líneas de agua.

	1ª	y		2ª		
Entre las Quadernas.	fg		$c^2h^2y^2$		$\frac{c^2h^2y^2}{fg}$	
Roda y XXVII	4	9	18	9	4	0
XXVII XXIV	13	10	232	0	667	5
XXIV XXI	18	3	22500	0	1232	9
XXI XVIII	20	4	30800	0	1514	9
XVIII XV	23	0	29784	0	1295	0
XV XII	23	0	28730	0	1249	1
XII IX	23	11	25600	0	1070	5
IX VI	23	11	25787	0	1078	3
VI III	23	11	25975	0	1086	1
III 0	23	11	26163	0	1094	7
0 3	17	6	19367	0	1106	8
3 6	23	11	25975	0	1086	1
6 9	23	11	25600	0	1070	5
9 12	23	4	24859	0	1065	4
12 15	23	0	27363	0	1189	8
15 18	23	0	29987	0	1303	9
18 21	22	9	31892	0	1401	10
21 24	22	2	31624	0	1426	9
24 27	21	11	33267	0	1517	11
27 30	17	0	49878	0	2934	0
30 33	14	1	27945	0	1972	5
33 y Codaste.	7	1	738	0	104	2
Sumas.					26461	4

quocientes $\frac{c^2b^2y^2}{fg}$ *en los momentos laterales.*

Entre las líneas de agua.

2ª y 3ª						3ª y 4ª					
fg		$c^2b^2y^2$	$\frac{c^2b^2y^2}{fg}$			fg		$c^2b^2y^2$	$\frac{c^2b^2y^2}{fg}$		
13	4	3491	261	10		9	2	125	13	5	
15	1	24858	1648	0		17	6	5650	322	10	
17	5	50662	2909	0		14	2	43428	3065	6	
19	3	56922	2957	0		16	10	64093	3807	6	
20	9	54096	2607	0		18	3	70313	3852	9	
21	7	53515	2479	5		19	0	67470	3551	0	
22	6	57041	2646	3		19	10	67167	3386	7	
22	8	51718	2281	8		20	1	70313	3501	1	
22	8	51984	2293	5		20	11	64516	3084	5	
16	11	38481	2274	9		15	5	47378	3073	2	
22	8	51718	2281	8		20	4	63924	3143	10	
22	6	54634	2428	3		20	1	61939	3084	1	
21	0	53130	2530	0		19	3	71556	3717	2	
21	0	56763	2703	0		18	5	69608	3779	7	
20	9	51984	2505	3		17	8	69608	3940	1	
20	6	46728	2279	5		16	4	64093	3924	1	
19	5	41345	2129	4		15	7	42642	2736	4	
19	0	32882	1730	8		15	4	22251	1451	2	
15	5	26541	1721	7		17	0	8660	510	7	
14	6	9120	622	1		19	11	1072	13	10	
9	6	79	8	4		10	10	14	1	2	
			43297	11				....	55000	2	

Tabla de los productos fg, $c^2b^2y^2$, y de los

Entre las Quadernas.	Entre las líneas de agua. 4ª y 5ª. fg		$c^2b^2y^2$	$\frac{c^2b^2y^2}{fg}$	
Roda y XXVII					
XXVII XXIV					
XXIV XXI	17	8	1457	82	4
XXI XVIII	12	4	12656	1023	6
XVIII XV	11	8	36258	3107	9
XV XII	12	0	54483	4540	3
XII IX	14	0	68121	4865	9
IX VI	15	4	82369	5371	11
VI III	16	2	87715	5425	8
III 0	16	9	88457	5281	0
0 3	12	4	65862	5340	2
3 6	16	9	83955	5012	1
6 9	15	11	84875	5332	5
9 12	15	11	75763	4760	0
12 15	15	2	66564	4388	10
15 18	12	0	54522	4543	6
18 21	10	0	40267	4026	8
21 24	13	8	17889	1309	0
24 27	17	1	6304	369	0
27 30	19	4	1412	73	0
30 33	22	5	141	6	4
33 y Codaste.	9	1	0	0	0
Sumas......				64859	2

quocientes $\frac{c^2b^2y^2}{fg}$ *en los momentos laterales.*

Entre las líneas de agua.

5ª.		y	Quilla.	
fg		$c^2b^2y^2$	$\frac{c^2b^2y^2}{fg}$	
15	4	3	0	2
17	1	500	29	3
10	6	3220	306	8
7	7	6986	921	3
7	7	11972	1578	9
4	4	16271	2214	3
7	2	18861	2631	9
7	2	19975	2787	2
5	2	15129	2928	2
7	2	18861	2631	9
7	9	17777	2258	4
8	3	14400	1745	6
8	10	11430	1294	0
9	11	6588	664	4
11	3	3369	286	9
12	10	1554	121	1
18	6	540	29	2
21	6	91	4	3
23	11	9	0	4
9	1	0	0	0
			22432	11

cantidades son cero, por ser $b = 0$: luego por lo que toca á la Quilla, serán los momentos $\frac{113083\, mV}{dt}$.

235 El Codaste y Timon juntos, supuestos un trapecio vertical, tienen su diferencial de resistencia (§. 182) $= \frac{1}{2} mu\left(e + \frac{fx}{a}\right)x^{\frac{1}{2}}dx$, y su momento será $= \frac{mV}{2dt}\int (k - x)^2 \left(e + \frac{fx}{a}\right)x^{\frac{1}{2}}dx =$ ----------- $\frac{mV}{2dt}\left(\frac{2}{3}k^2 ex^{\frac{3}{2}} + \frac{2k^2 fx^{\frac{5}{2}}}{5a} - \frac{4}{5}kex^{\frac{5}{2}} - \frac{4kfx^{\frac{7}{2}}}{7a} + \frac{2}{7}ex^{\frac{7}{2}} + \frac{2fx^{\frac{9}{2}}}{9a}\right)$: ó substituyendo (§. 182) $x = a$, $e = 3$, $f = 5$, $a = 21$, será $\frac{mV}{2dt}\left(4k^2 - \frac{184}{35}k(21) + \frac{124}{63}(21)^2\right)(21)^{\frac{3}{2}} = 20738.\frac{mV}{dt}$. Las otras cantidades son cero, por ser $b = 0$.

236 La Roda y Taxamar juntos se supusieron del mismo modo (§. 182) otro trapecio vertical, sin mas diferencia del antecedente, que ser $e = 6$, y $f = -2$: luego su momento será = ----------- $\frac{mV}{2dt}\left(\frac{16}{5}k^2 - \frac{128}{35}k(21) + \frac{80}{63}(21)^2\right)(21)^{\frac{3}{2}} = 21633.\frac{mV}{dt}$: desvaneciendose igualmente las otras cantidades, por ser $b = 0$.

237 Sumando ahora las quatro cantidades $197419 + 113083 + 20738 + 21633 = 352873$, será el todo de los momentos que padece el Navío de 60 Cañones en el balance $= 352873.\frac{mV}{dt}$.

238 Para hallar los mismos en caso que el Navío esté mas calado de la cantidad n, tenemos que cada uno de los valores ya hallados ha de ser á los nuevos que resultaren (§. 187) como $\left(\frac{107}{6}\right)^{\frac{q}{2}}$ á $\left(\frac{107}{6} + n\right)^{\frac{q}{2}}$, expresando q un número qualquiera, ó el numerador

del

del exponente qualquiera que tubieren las cantidades ; ó como la unidad á $1+\frac{1}{2}q\left(\frac{6n}{107}\right)+\frac{1}{2}q\left(\frac{q-2}{4}\right)\left(\frac{6n}{107}\right)^2+\frac{1}{2}q\left(\frac{q-2}{4}\right)\left(\frac{q-4}{6}\right)\left(\frac{6n}{107}\right)^3+\frac{1}{2}q\left(\frac{q-2}{4}\right)\left(\frac{q-4}{6}\right)\left(\frac{4-6}{8}\right)\left(\frac{6n}{107}\right)^4+\&$; ó poniendo $n=\frac{1}{2}$, que es lo que en los Capítulos precedentes supusimos al Navío mas calado, como la unidad á $1+\frac{1}{2}q\left(\frac{3}{107}\right)+\frac{1}{2}q\left(\frac{q-2}{4}\right)\left(\frac{3}{107}\right)^2+\frac{1}{2}q\left(\frac{q-2}{4}\right)\left(\frac{q-4}{6}\right)\left(\frac{3}{107}\right)^3+\frac{1}{2}q\left(\frac{q-2}{4}\right)\left(\frac{q-4}{6}\right)\left(\frac{q-6}{8}\right)\left(\frac{3}{107}\right)^4+\&$.

239 La primera cantidad $k^2\int fgx^{\frac{1}{2}}=106145$, aumenta en la razon de $x^{\frac{3}{2}}$: luego $q=3$, y aquel valor será al nuevo que resultare, como 1 á $1+\frac{9}{214}+\frac{9.3}{214.428}$; por lo que es este $=106145+4464+31=110640$. La segunda cantidad $2k\int fgx^{\frac{3}{2}}=436722$, aumenta en la razon de $x^{\frac{5}{2}}$: luego $q=5$, y aquel valor será al nuevo, como 1 á $1+\frac{15}{214}+\frac{15.3.3}{214.428}+\frac{15.9.3}{214.428.642}$; por lo que es este $=436722+30611+643+3=467979$. La tercera cantidad $\int fgx^{\frac{5}{2}}=550015$, aumenta en la razon de $x^{\frac{7}{2}}$: luego $q=7$, y aquel valor será al nuevo como 1 á $1+\frac{21}{214}+\frac{21.5.3}{214.428}+\frac{21.15.3.3}{214.428.642}+\frac{21.15.9.3}{214.428.642.856}$; por lo que es este $=550015+53937+1892+26+0=605906$. La quarta cantidad $2k\int chx^{\frac{1}{2}}y=467696$, aumenta en la razon de $x^{\frac{3}{2}}$:

luego $q=3$, y aquel valor será al nuevo, como 1 á $1+\frac{9}{214}+\frac{9.3}{214.428}$; por lo que es este $=467696+19670+138=487504$. La quinta cantidad $2\int cbyx^{\frac{3}{2}}=953222$, aumenta en la razon de $x^{\frac{5}{2}}$: luego $q=5$, y aquel valor será al nuevo como 1 á $1+\frac{15}{214}+\frac{15.9}{214.428}+\frac{15.9.3}{214.428.642}$; por lo que es este $=953222+66814+1405+7=1021448$. La sexta cantidad $\int\frac{c\,b^2y^2x^{\frac{1}{2}}}{fg}=660929$, aumenta en la razon de $x^{\frac{3}{2}}$: luego $q=3$, y aquel valor será al nuevo como 1 á $1+\frac{9}{214}+\frac{9.3}{214.428}$; por lo que es este $=660926+27796+195=688917$. En la Quilla la cantidad $\frac{1}{2}\int fgx^{\frac{1}{2}}=560\frac{1}{6}$, aumenta en la razon de $x^{\frac{1}{2}}$: luego $q=1$, y aquel valor será al nuevo como 1 á $1+\frac{3}{214}$; por lo que es este $=568$. La cantidad $(k-x)^2=(9\frac{2}{24}-19)^2=201\frac{2}{24}$, aumenta en la razon de $(4\frac{19}{24}-19)^2$ á $(4\frac{19}{24}-19\frac{1}{2})^2$: con que será ahora $=215\frac{5}{6}$; por consiguiente su momento será $568.215\frac{5}{6}=122593$. Para el Codaste y Timon juntos aumenta la primera cantidad $2k^2(21)^{\frac{3}{2}}=4456$, en la razon de $x^{\frac{3}{2}}$: luego $q=3$, y será en la de la unidad á $1+\frac{9}{214}+\frac{9.3}{214.428}$; por consiguiente será ahora su valor $=4456+187+7=4644$. La segunda cantidad $\frac{92}{35}k(21)^{\frac{5}{2}}=25440$, aumenta en la razon de $x^{\frac{5}{2}}$, ó por ser $q=5$, en la razon de la unidad á 1 +

$+\frac{15}{214}+\frac{15.9}{214.428}+\frac{15.9.3}{214.428.642}$: con que ahora será $=25440+1783+38+0=27261$; y la tercera cantidad $\frac{62}{63}(21)^{\frac{7}{2}}=41766$, aumenta en la razon de $x^{\frac{7}{2}}$, ó por ser $q=7$, en la de la unidad á $1+\frac{21}{214}+$ $\frac{21.15}{214.428}+\frac{21.15.9}{214.428.642}+\frac{21.15.9.3}{214.428.642.856}$: con que será ahora $=41766+4099+144+2+0=46011$. Sumando las tres cantidades, será el todo de los momentos que resultan del Codaste y Timon juntos $=$ 14106. En la Roda y Taxamar juntos aumentan las tres cantidades 3595, 17697, y 26945 en la misma razon que aumentaron las del Codaste: luego ahora serán 3747, 18963, y 29684, que juntas hacen 14468. El todo de los momentos, estando el Navio 6 pulgadas mas calado, será pues, $(110640-467979+605906+487504-1021448+688917+122593+14106+14468)\frac{mV}{dt}=554707\frac{mV}{dt}$.

240 Con igual proceder se pueden calcular los momentos que resultan del movimiento de rotacion sobre un exe horizontal perpendicular al primero, que es lo que llaman los Marineros *Cabezada* ó *Arfada*: y tambien calcular unos y otros para los demas Navíos semejantes; pero escusamos dilatarnos en ello, porque estos momentos se diferencian muy poco de los ya calculados en el aguante de Vela, suponiendo la velocidad $u=0$, que hallamos (§. 206) $=$ --- $7851843 m sen.\Delta$: de suerte, que sin error grande se pueden suponer para el cálculo que necesitamos $=$ $7851843.\frac{mV}{dt}$; no conduciendo su mas precisa determi-

minacion sino para hallar el tiempo en que se executa la cabezada del Navío; y no los momentos de inercia que en ella padece, que es lo unico que conduce para nuestro asunto.

CAPITULO 9.

De los momentos que padecen las partes del Navío, y que ocasionan lo que los Marineros llaman quebranto.

241 YA se dixo (*Prop.* 8. *Lib.* 2. *Tom.* 1.) que para que un cuerpo sumergido en un fluido, que está en reposo, esté sin movimiento ó accion vertical, es preciso que el peso del cuerpo sea igual al del fluido que haya desocupado: de este principio concluimos (§. 105), que para que el todo del Navío quede flotando sin sumergirse mas ó menos, es preciso que su peso sea igual al del fluido que hubiere desocupado. Arguyendo igualmente para cada parte, seccion ó ambito de una, dos ó mas Quadernas, se hace evidente, que para que las acciones que sobre ellas se exerciten se destruyan, es preciso que el peso que se ponga sobre cada ámbito ó Quaderna, sea igual al del fluido que cada ámbito ó Quaderna haya desocupado: esto es, para que sobre la parte del cuerpo del Navío encerrado entre las Quadernas o y 3, ó entre otras dos qualesquiera, no quede fuerza que tienda á sacarle ó moverle de la situacion en que se halla, es preciso que el peso de la misma parte: esto es, de maderas y demas herrages, y carga que encierre, sea igual al del fluido que haya desocupado. No siendo estos dos pesos iguales, el exceso del mayor sobre el menor, actua en la direccion del primero, á sacar ó mover aquella

lla parte del cuerpo de la situacion en que se halla: y esta fuerza que no queda destruida, la han de sostener (*Esc.* 1. *sobre las Palancas Tom.* 1. *pag.* 71.) las fibras ó piezas de madera que componen el Buque, uniendole como si fuera una sola pieza ó palanca.

242 De esta suerte, si todas las Quadernas ó partes del Navío estubieran igualmente cargadas de peso, como proximamente lo están quando se halla bacio el Buque, pues todas tienen casi muy poca diferencia de maderas, porque si las del medio son mas anchas, son mas altas en recompensa las de los extremos: se sigue, que para que no resultasen fuerzas que hayan de sostener las mismas maderas, fuera preciso que los volúmenes de fluido que desocupasen, fueran tambien iguales; pero los ámbitos ó volúmenes que ocupan las Quadernas son menores, al paso que aquellas distan mas de la maestra: luego al paso que estas se apartan mas de la maestra, hay menos fuerza que sostenga el peso que carga sobre las Quadernas. Que las ordenadas oB, 3D, 6E &c. y IIIF, VIG &c. á la curva ABC Lam. 8. expresen el ámbito de las secciones del Navío, ó areas Fig. 36. sumergidas en el fluido de las Quadernas oB, 3D, 6E &c. y IIIF, VIG, &c.: estos mismos ámbitos, areas ú ordenadas, representarán, por lo dicho, las fuerzas con que el fluido las mantiene ó empuja hacia arriba. Si al mismo tiempo otra recta ó curva HI, termina las ordenadas oK, 3L, 6M, IIIN, VIO &c., y que estas representen los pesos que cargan sobre los mismos parages ó puntos; es claro que las KB, LD, ME, NF, OG &c. representarán las fuerzas restantes con que están impelidos hacia arriba los mismos puntos ó secciones; y las AH, PQ, RS, IC &c. aquellas con que están impelidos hacia abaxo: de suerte, que aunque el area total ABC es igual á la AHIC, respecto á que el peso total del Navío es igual al peso del volúmen que desocupa, sin embargo las partes del medio del Navío

TBV.

TBV están con exceso impelidas hacia arriba, y las de los extremos TAH, VIC, están con igual exceso impelidas hacia abaxo.

Lam. 8. Fig. 37. 243 Sucede con esto al Navío lo que á una palanca AB, con varios pesos C, D, E que la tiran hacia arriba, y otros de igual peso F, G, H, I, K, L &c. que la tiran hacia abaxo: pues aunque la palanca ha de quedar sin movimiento, porque las fuerzas positivas son iguales á las negativas; sin embargo, las fuerzas en I, K, L han de estar (*Esc. 1. sobre las Palancas*) sostenidas por las fibras de la misma palanca, tendiendo ambas fuerzas de los extremos á doblar esta, como en efecto la deben doblar, mas ó menos, segun el exceso de las fuerzas.

244 Supongamos que el Navío esté formado en su Proa, esto es, la parte sumergida en el fluido, por Fig. 36. la revolucion de una semielipse DGVC; y la parte de Popa DTA por la revolucion de una parábola, á fin de aproxîmarnos con esto mas á la verdadera figura del Navío, que es de menos volúmen en la Popa que en la Proa. Que sea la longitud de qualquiera de estos cuerpos b, y la mayor profundidad en el medio a, siendo x qualquiera de las demas profundidades, y y qualquiera de las longitudes contadas desde el medio. Con esto, la equacion á la elipse será $\frac{b^2}{a^2}x^2 = b^2 - y^2$; lo que da $x = \frac{a}{b}(b^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$: y siendo c la circunferencia del círculo, cuyo radio es la unidad, $\frac{1}{4}cx^2 = \frac{ca^2}{4b^2}(b^2-y^2)$ será qualquiera seccion perpendicular á la Quilla en la semielipsoyde de Proa, y $\frac{mca^2}{4b^2}(b^2-y^2)ydy$ el momento de qualquiera diferencial de la misma: cuyo integral $\frac{mca^2}{4b^2}(\frac{1}{2}b^2y^2-\frac{1}{4}y^4)$, ó haciendo $y = b$,

$\frac{1}{16}mca^2b^2$ será el momento con que estará impelida por el fluido hacia arriba, expresando m la densidad del mismo fluido. Al mismo tiempo $\frac{mca^2}{4b^2}(b^2-y^2)dy$ es el peso de una diferencial de la misma semielipsoyde, y el integral $\frac{mca^2}{4b^2}(b^2y-\frac{1}{3}y^3)$, ó $\frac{1}{6}mca^2b$ el peso de toda ella: y suponiendo este distribuido igualmente en toda la longitud b, será $\frac{1}{6}mca^2dy$ el peso hacia abaxo que suporta cada diferencial, y el momento que padece $\frac{1}{6}mca^2ydy$, cuyo integral $\frac{1}{12}mca^2y^2$, ó $\frac{1}{12}mca^2b^2$, será el momento total. De esta suerte $\frac{1}{12}mca^2b^2-\frac{1}{16}mca^2b^2 = \frac{1}{48}mca^2b^2$ es el momento con que queda impelida hacia abaxo la misma semielipsoyde, que partido por el peso de ella $\frac{1}{6}mca^2b$, queda $\frac{3}{8}b$ por la distancia desde el medio del Navío al centro de gravedad, donde como reunido actuaria del mismo modo el peso total $\frac{1}{6}mca^2b$: de suerte, que si fuese B el principio de la semielipsoyde, y ZX $=\frac{1}{8}3$C, será la accion como si todo el peso de la semielipsoyde $\frac{1}{6}mca^2b$ cargase reunido en el punto X.

245 La equacion de la parábola de Popa será $\frac{b^2}{a}(a-x)=y^2$, que da $x=\frac{a}{b^2}(b^2-y^2)$: una seccion de la misma, será $\frac{1}{4}cx^2=\frac{ca^2}{4b^4}(b^2-y^2)^2$, y ------ $\frac{mca^2}{4b^4}(b^2-y^2)^2ydy$ el momento que causa una diferencial, cuyo integral $\frac{mca}{4b^4}(\frac{1}{2}b^4y^2-\frac{1}{2}b^2y^4+\frac{1}{6}y^6)$, ó haciendo $y=b$, $\frac{1}{24}mca^2b^2$ será el total momento con que quedará impelida hacia arriba la paraboloyde. El momento resultante con que queda impelida hacia abaxo la misma, será pues, $\frac{1}{12}mca^2b^2-\frac{1}{24}mca^2b^2=\frac{1}{24}mca^2b^2$. El peso de una de sus diferenciales, es asimismo

$\frac{mca^2}{4b^4}(b^2-y^2)^2dy$, cuyo integral $\frac{mca^2}{4b^4}(b^4y-\frac{2}{3}b^2y^3+\frac{1}{5}y^5)$, ó poniendo $y=b$, $\frac{2mca^2b}{15}$ es el peso total, y $\frac{mca^2b^2}{15}$ el momento que actua hacia abaxo: de suerte, que el resultante de ambas acciones será $\frac{1}{15}mca^2b^2-\frac{1}{24}mca^2b^2=\frac{1}{40}mca^2b^2$, que partido por el peso total $\frac{2}{15}mca^2b$, viene al quociente $\frac{3}{16}b$, que es la distancia ZY que dista el punto Y desde el medio ú origen de la paraboloide, donde, como reunido todo el peso $\frac{2}{15}mca^2b$, hiciera el propio efecto. Ahora como los dos momentos resultantes han de ser iguales para que haya equilibrio en el Navío, poniendo la longitud de la parte de Popa $=B$, tendremos $\frac{1}{40}mca^2B^2=\frac{1}{48}mca^2b^2$, ó $B:b=\sqrt{6}:\sqrt{5}$; ó proximamente como 13 á 12. Si fuese, pues, e la longitud ó Eslora del Navío, será $\frac{13}{25}e$ la longitud de la paraboloide de Popa, y $\frac{12}{25}e$ la de la semielipsoide de Proa: la $ZY=\frac{13}{25}e.\frac{3}{16}=\frac{39}{400}e$, $ZX=\frac{12}{25}e.\frac{1}{8}=\frac{24}{400}e$, y $YX=\frac{63}{400}e$. En el Navío de 60 Cañones de nuestro exemplo, que tiene 152 pies de Eslora, será $YZ=14$ pies y 10 pulgadas, y $ZX=9$ pies y $1\frac{1}{2}$ pulgadas.

246. Como el Navío pesa (§.112) 43750 quintales, divididos estos en la razon de YZ á ZX, ú de 13 á 12, corresponderán al peso en Y 21000 quintales, y al peso en X 22750: de suerte, que el efecto en el Navío será, como si en Y, y en X cargasen dichos pesos, y otro en la vertical de Z, de 43750 que actuase en contra hacia arriba. Donde se ve, que dichos pesos ó fuerzas tienden á romper el Navío, ó á vencer hacia abaxo sus extremos ó cabezas, y á suspender su medio en Z hacia arriba, como efectivamente se observa

en

en la práctica. Cada uno de los momentos con que actuan los pesos en Y ó en X, será 43750 . 12, ó 21000 . 13 = 273000 : y esta excesiva accion solo la resisten ó suportan las fibras de las maderas que componen el cuerpo del Navío, su union, enlace, trabazon y fuerza de los herrages con que se clavan ; á no tener la obra en todas sus partes la debida proporcion y regla, cede la mas débil, y se arquea el Navío hacia abaxo, que es lo que llaman estar quebrantado, ó fuera de su debido estado.

247 Al paso que las cabezas baxan, como aumenta su volúmen debaxo del fluido, y este ha de quedar constante, se eleva en el medio el Buque, y con ello disminuye el impulso en este punto, como asimismo en las cabezas : y este efecto continua hasta que pueden sostener las partes del cuerpo los momentos restantes.

248 La debilidad ó fuerza de estas partes puede depender de dos causas principales : la una de la calidad de la madera ó intensidad de sus fibras, y la otra de la verdadera union de unas piezas con otras, y disposicion para que no se de juego ó movimiento entre ellas. Para exâminar lo primero, podemos suponer al Navío como si fuera todo de una pieza de la misma madera ; esto es, sus costados y puentes, pues con ello se excluye la otra causa : el efecto en él será el mismo que diximos resulta en la palanca (*Esc.* 1. *D.f.* 33 *Li.* 1 *To.* 1) alargandose en la madera las fibras de arriba, y encogiendose las de abaxo, que es en lo que consiste la fuerza con que actua. Por repetidas experiencias que practiqué, hallé contextemente, que un palo de Roble de una pulgada en quadro, hecho firme horizontalmente en un poste, suporta, con corta diferencia, á la distancia de un pie, dos quintales. El momento en este caso es pues 2 : y si nos servimos de la

fórmula del mismo Escolio $f = \frac{p\pi}{KA^2 + ka^2}$, en la qual f expresa la intensidad de las fibras en la madera, $p\pi$ el momento, y KA^2, asi como ka^2, el área A^2 ó a^2 de la pieza ó palito, por la distancia K ó k del exe sobre que se hace la rotacion al centro de gravedad de las areas, será en estas experiencias, $p\pi = 2$, $KA^2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{48}$, y $ka^2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{48}$, supuesto que el centro de rotacion estubiese en el medio de la pieza: por lo que la intensidad de las fibras será $f = \frac{2}{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{24}} = 13824$. Con esto la misma fórmula $f = \frac{p\pi}{KA^2 + ka^2}$ dará el momento que puede aguantar qualquiera otra pieza, costado ó cubierta del Navío, pues siendo $f = 13824 = \frac{p\pi}{KA^2 + ka^2}$, será $p\pi = 13824(KA^2 + ka^2)$.

Fig. 38. Pongamos que sea ABCD un costado del Navío con 30 pies de alto, y supuesto E el centro sobre que se ha de hacer la rotacion, tendremos $K = k = 7\frac{1}{2}$: y como el grueso de la tablazon es de 4 pulgadas, será $A^2 = a^2 = \frac{1}{3} \cdot 15$: y por consiguiente $p\pi = 13824(\frac{2}{3} \cdot 15 \cdot 7\frac{1}{2}) = 1036800$: momento excesivo, y muchas veces mayor que el que produce el quebranto 273000: de suerte, que en esta inteligencia un solo costado fuera excesivamente suficiente para impedir el quebranto de un Navío.

249 Pero estas resultas han procedido de suponerse que el exe sobre que se hace la rotacion exísta en el centro de la pieza: supongamosle ahora en el sitio menos ventajoso; esto es, en su extremo inferior, y tendremos en las experiencias del palito $f = \frac{2}{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{24}} = 6912$: con que será en el costado $p\pi = 6912(\frac{1}{3} \cdot 30 \cdot 15) = 10368000$, momento igual al pre-

cedente: y asi de qualquiera suerte siempre produce el mismo momento, excedente al que origina el quebranto; y por consiguiente no puede este ocasionar la rotura del Navío, mayormente habiendo aun el otro costado, y las cubiertas ó puentes, que cada una de por sí tienen enormes resistencias. (*a*)

250 No obstante esto, aunque no resulte la rotura, no puede dexar de resultar algun corto quebranto, pues las fibras de las maderas á la menor fuerza ceden, y para esto no es preciso llegar al extremo de la rotura. Por poco que cedan en cada uno de sus puntos, siendo tan grande la longitud del Navío, puede, y aun debe resultar una suma considerable en el todo: si monta á dos pulgadas lo que el Navío se alargue en su borda, subirá á un pie lo que deben baxar sus cabezas, porque distan, con corta diferencia, seis veces mas del exe de rotacion.

251 Si con todo el excesivo poder de la madera, resulta, que no por ello se puede evitar totalmente el quebranto; aun mas se debe temer de la otra causa, ú del juego que pueden tener unas piezas respecto de otras: pues aunque los Constructores procuran que el todo salga de sus manos perfectamente unido; ya sea por resecarse despues las maderas, ó por ceder los herrages á los esfuerzos, siempre resulta alguna soltura, que por poca que sea en cada una de sus partes, se hace muy sensible en el todo.

252 Se puede, pues, remediar en mucha parte el quebranto del Navío, uniendole y fortificandole bien, y construyendole de una madera firme y seca, de suerte que se evite con ello, lo mas que fuere posible, el movimiento entre sí de las piezas que le componen; pero lo cierto es, que el principal remedio ha de consis-

(*a*) *Mr. Bouguer* (*Traité du Navire* pag. 152) pretende que las cubiertas se hagan horizontales, para evitar el quebranto; pero bien considerado se verá, que la resistencia de las fibras de la madera y herrages en una cubierta, por exemplo en el medio, ninguna conexîon tiene con la figura de la misma cubierta.

sistir en su figura y magnitud, porque los momentos de que resulta el daño, de ello dependen solamente, como hemos visto. Las dos distancias YZ, ZX, son proporcionales á la longitud del Navío (§§. 244 y 245): luego quanto mayor fuere esta, mas expuesto estará al quebranto. Asimismo son mayores quanto mayor fuere la disminucion del volúmen que encierra cada Quaderna, respectivamente al que encierra la maestra, ó como se explican los Marineros, *quantos mas delgados tiene el Navío*, ó menos llenas son á los extremos las curvas BTA, BVC: pues como se vió, por haber supuesto BTA una parábola, y BVC una elipsoide, resultó $YZ = \frac{39}{400} . AC$, y $ZX = \frac{24}{400} . AC$. Puede igualmente remediarse el mismo daño, cuidando de no cargar mucho peso á los extremos del Buque, ó recogiendole todo lo mas al medio que sea posible; pues con ello disminuirán los momentos, ó lo que es lo mismo las distancias YZ, ZX.

Fig. 36.

253 Ultimamente debe reflexionarse, que el cálculo que hemos propuesto es para el caso en que el Navío está cargado ó calado hasta la línea de agua en que navega; estando descargado se eleva mas, y á proporcion son mucho menores los llenos de sus cabezas que las sostienen: y por consiguiente le han de resultar mayores quebrantos en este estado.

254 No puede limitarse esta theórica á sola la accion según la longitud del Navío, pues resulta asimismo de un lado al otro, particularmente en los Navíos de Guerra, que tienen el peso enorme de su Artillería sobre los mismos costados, puntos donde el sosten del fluido es ninguno: el Navío por esta accion debe abrirse, como efectivamente se abre, y se ve en las uniones de las tablas de las cubiertas, particularmente en las inmediatas al costado. *Mr. Bouguer*, en su *Tratado del Navío* (*Lib.* 1. *Sec.* 3. *cap.* 2.) creyó que pu-

pudiese ser al contrario, trayendo por exemplo lo que sucede con un Vaso en figura de Góndola, que se procura torcer segun su longitud; pero este caso no es precisamente lo que sucede al Navío: la Góndola para torcerla se comprime lateralmente; y al contrario en el Navío, el peso de la Artillería hacia abaxo, puesta en los extremos, en contraposicion de la accion del fluido en el medio y hacia arriba, tienden á abrirle. Pero no es aun esto lo que produce el mayor efecto, pues los momentos verticales con que actua la Artillería, estan sostenidos por las Quadernas, tambien verticales, que tienen una fuerza enorme: y por consiguiente permiten muy poco efecto.

255 Los momentos de inercia que resultan en los balances son los que producen grandisimo perjuicio. Si los consideramos divididos en dos, unos verticales, y otros horizontales, quedarán los primeros sostenidos por las Quadernas, como antes expresamos, y sin que se les siga gran daño; pero las horizontales solo los sufren las curvas, baos y pernos con que se liga el costado, y son mas fuertes quanto mas elevada está la Artillería sobre el centro de gravedad, al rededor del qual gira el Navío: esto es, si P denota el peso de un Cañon, y a la altura vertical de su centro de gravedad sobre el del Navío, será a^2P la medida del momento lateral con que actua contra el costado. En el Navío de 60 es, por lo que toca á la bateria baxa, $a = 9\frac{1}{2}$, y en la de la alta $= 16\frac{1}{2}$: con que el Cañon de 18 libras, con el peso de 49 quintales, unido con su Cureña, puesto en la primera, producirá el momento $4422\frac{1}{4}$: y el Cañon de 12 libras con el peso de 39, producirá el de $10617\frac{3}{4}$ puesto en la alta: donde se ve la enorme superioridad con que la Artillería alta actua mas que la baxa, y la falta de debida proporcion en el modo con que se reparte, pues tiene que suportar mas que duplo esfuerzo la segunda cubierta, sin em-

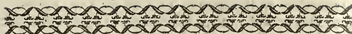
embargo de ser mucho mas debil. Aun cometen mayor absurdo aquellos que en lugar de dos baterias de 36 y 18 en un Navío de 80, substituyen dos de 24: en la primera es $a = 11$, y en la segunda $= 18\frac{1}{2}$: el momento del Cañon de 36, $= 11^2 . 79 = 9559$, y el de 18, $= (18\frac{1}{2})^2 . 49 = 16770\frac{1}{4}$; pero no contentos con esta excesiva diferencia de accion que padece la segunda cubierta, quieren aumentarla hasta $(18\frac{1}{2})^2 . 59 = 20192\frac{1}{4}$, disminuyendo la de la otra á $11^2 . 59 = 7139$. El buen orden pide, que el trabajo se reparta á medida de las fuerzas: esto es, de las maderas que le han de suportar, que se reduce principalmente á la curveria que liga las cubiertas. Supongamos, pues, que el grueso de las de abaxo sea al que tienen las de arriba como 6 á 5, y lo mismo el ancho, y tendremos, por ser las fuerzas como los cubos de estas dimensiones, la fuerza de las de abaxo á las de arriba, como 216 á 125: llamando á mas de esto P al peso del Cañon baxo, y p el del alto, habrá de ser en el Navío de 60, $(9\frac{1}{2})^2 P : (16\frac{1}{2})^2 p = 216 : 125$; ó $p = \frac{112815\frac{1}{4}}{58806} P$: de suerte, que el peso del Cañon alto no debe ser ni aun el quinto del que tenga el baxo para guardar debida proporcion en el trabajo de ambas cubiertas: y asi, aunque fuese este de 24, y aquel de 4, trabajará mas con este la segunda cubierta, que con aquel la primera. De todo lo qual se deduce, que los Marineros deben procurar alibiar en lo posible el peso de las segundas baterias, y los Constructores aumentar la fuerza de las curbas y pernos que las ligan. Aun en caso de que esta fuese igual á la bateria baxa, el peso de sus Cañones no debia ser sino en razon inversa de los quadrados de sus elevaciones sobre el centro de gravedad del Navío: esto es, en el de 60, como $(16\frac{1}{2})^2$ á $(9\frac{1}{2})^2$, ó proxîmamente como 3 á 1: de suerte, que poniendo en la bateria baxa Cañones de 24, no cor-

res-

respondian en la segunda sino de *6*; pero aunque se pusieran de á 8, mejor suportaria el Navío dos baterias de 24 y 8, que las dos que suelen ponerse de 18 y 12. (*a*)

LI-

(*a*) *Mr. Bouguer*, en su *Tratado del Navío*, (Lib.2. Sec.2. cap.6. pag.284. hasta 286.) exâmina si conviene mas á un Navío de 70 llevar dos baterias de 24, que una de 36, y otra de 18: y sin embargo que su cálculo se estiende solo á comparar la simple diferencia de momentos que en uno y otro caso padece el todo del Navío, y no los de inercia, que son los mas fuertes; determina en favor de las dos baterias de 36 y 18. Mucho mas habria apoyado este dictamen, si hubiera exâminado la diferencia de momentos de inercia que padece cada cubierta de por sí; pues los de la segunda serian en el primer caso mayores que los de la primera, en razon de los quadrados de sus distancias al centro de gravedad: de suerte, que la cubierta segunda padeciera mas de tres veces mas que la primera. Esta consideracion manifiesta lo perjudicial qne seria practicar el remedio que expone el mismo Autor (pag. 332.) para evitar la rotura de los palos; pues con él quizas se lograria la del Navío, que seria mucho peor.



LIBRO TERCERO.

De las Máchinas que mueven y goviernan el Navío.

CAPITULO PRIMERO.

De las Velas, y de la fuerza que hace el viento en ellas.

256 LAs Velas, que como diximos (§.1), son unos lienzos expuestos al viento que los impele, no pueden por su flexibilidad mantenerse planas, por mas que se procure estirarlas con gran fuerza por todas partes: han de formar precisamente una curvidad, que exâminó *Juan Bernoulli* (*Nueva Theórica de la maniobra de los Navíos* cap. 16) baxo el supuesto de que la resistencia de los fluidos fuera como los quadrados de las velocidades; pero esta suposicion ya no cabe en la efectiva accion de ellos, como hemos visto. La intrincada theórica que resultara de formar los cálculos, atendiendo á esta curvidad, ha hecho que todos los demas Autores las hayan supuesto como planas; y aun el mismo *Bernoulli* no hizo sino decirnos la distinta direccion de las fuerzas resultantes que por la curvidad se deduce. En efecto la diferencia que resulta es corta; pero no tanto que dexemos de dar los conocimientos conducentes: y mas habiendo de atender á otras atenciones muy notables.

257 Para esto supondremos, que en lugar del ayre sea un fluido no elástico, y de la misma densidad

de aquel, el que actue sobre la Vela, pues con esto, produciendo el mismo efecto el uno que el otro, podemos servirnos de la fórmula $\frac{1}{2}mcD^{\frac{1}{2}}au\text{fen}.\theta$, ó (*Cor.*2. *Prop.*40. *Lib.*2. *Tom.*1.) $\frac{1}{2}muD^{\frac{1}{2}}\int ac\text{fen}.\theta$, que se reduce, por lo expuesto (*Esc.* 1. *Propos.* 52. *Lib.* 2. *Tom.* 1.) á $\frac{1}{4}muD^{\frac{1}{2}}\int ac\text{fen}.\theta$, que expresa la fuerza que dicho fluido hará sobre la Vela, denotando m la densidad del ayre, a una diferencial vertical de aquella, D la altura hasta la superficie superior del fluido, c la amplitud ó anchura horizontal de la Vela, y θ el ángulo que forme el fluido con dicha diferencial. Con esto toda la dificultad consistirá en hallar los valores de D, y de $\int ac\text{fen}.\theta$.

258 Para determinar el primero ya diximos que las alturas D con que se equilibran dos fluidos de distinta densidad (*Esc.*2. *Prop.* 3. *Lib.* 2. *Tom.* 1.) son reciprocamente como sus densidades. La densidad del ayre se halla, segun las experiencias physicas, de $\frac{1}{1000}$ de la del agua de lluvia, y la del Mercurio 14 veces mayor: luego, segun estas experiencias, será la densidad del ayre á la del Mercurio, como 1 á 14000. La altura á que se mantiene el Mercurio en el Barometro simple á la orilla del Mar es de $2\frac{1}{2}$ pies Ingleses: luego serán $1 : 14000 = 2\frac{1}{2} : D = 35000$, altura del fluido de que hemos de hacer uso en lugar del ayre. Supongamos ahora, que m exprese la densidad del agua del Mar, que siendo á la del agua de lluvia, como 1030 á 1000, será la densidad del ayre $\frac{m}{1030}$; cuya cantidad hemos de substituir por m solo, que antes admitimos por dicha densidad: lo que dará la

 fuer-

fuerza del viento sobre la Vela $= \frac{\frac{1}{4} mu D^{\frac{1}{2}}}{1030} \int acsen.\theta =$ --

$\frac{\frac{1}{4} mu . (35000)^{\frac{1}{2}}}{1030} \int acsen.\theta = \frac{9}{200} mu \int acsen.\theta.$

259 Esta determinacion puede no obstante ser sospechosa: depende de las experiencias physicas, y de distintos preparativos practicados en los fluidos, que no sabemos tenga el ayre á la orilla del mar; podemos atenernos mas bien á este otro méthodo. Por las experiencias del Barometro que hice en el Perú, (*Observaciones Astronomicas y Physicas*, lib. 5. cap. 4.) para que el Barometro baxe una línea, es preciso elevarse 86 pies sobre la superficie del Mar: luego siendo el fluido de igual densidad, su altura total será de tantas veces 86 pies, como líneas tienen los mismos $2\frac{1}{2}$ pies de la altura total del Barometro: será, pues, dicha altura $D = 30960$: y esta misma cantidad expresará la densidad del Mercurio, siendo la del ayre libre la unidad. Como la del agua de lluvia es $\frac{1}{14}$ de la del Mercurio, será expresada la de esta agua por $\frac{30960}{14}$, y la del agua del Mar por $\frac{30960 . 103}{1400} =$ -- $\frac{3096 . 103}{140}$. La fuerza del viento sobre la Vela, será, pues, con estos principios $= \frac{\frac{1}{4} mu D^{\frac{1}{2}} 140}{3096 . 103} \int acsen.\theta =$ --

$\frac{35 mu (30960)^{\frac{1}{2}}}{3096 . 103} \int acsen.\theta = \frac{6160}{118888} mu \int acsen.\theta.$

260 Se puede tomar por dicha fuerza $\frac{1}{20} mu \int acsen.\theta$, pues ya se vió no haber resultado antes sino $\frac{9}{10}$ de esta: y el que venga algo menor solo depende de suponer,

ner, que en lugar de 86 pies sean solo 85 los que se necesita elevar el Barometro para que baxe de una línea.

261 Para hallar el integral de $acsen.\theta$ necesitamos entrar en el exâmen de la curva que forma la Vela. Supongamos, para facilitar el cálculo, que esta sea un lienzo rectangular con dos lados verticales, que firme sobre estos, tome horizontalmente, con la fuerza del viento y por su total flexîbilidad, la curvidad que le sea natural, y vamos á especular. Sea, pues, ABC una seccion horizontal de dicho lienzo ó Vela, y DB la direccion del viento que la hiere: perpendicular á esta tírese la tangente BE: tómese el punto del contacto B por origen: cuentense las abcisas x sobre la BD, y perpendicularmente á estas, ó segun la tangente BE las ordenadas. Con esto, siendo AF una diferencial constante de la curva, que llamaremos db, será la perpendicular HF $= dx$, y la HA $= dy$. La fuerza perpendicular que hará el viento sobre dicha diferencial AF $= db$, será $\frac{1}{2}{}_{0}mua.dbsen.\theta$, expresando a la altura de la Vela, y θ el ángulo de incidencia, cuyo seno es $= \frac{dy}{db}$, por lo que quedará la misma fuerza $= \frac{1}{2}{}_{0}muady$. Tírense, á mas de esto, las perpendiculares á la curva AG, FG, que serán los radios de su devoluta: y respecto que si IF, perpendicular á AF, expresare la fuerza perpendicular que hace el viento sobre la diferencial AF, esta expresará la que hace la Vela sobre qualquier punto como A, que llamaremos F por haber de ser esta fuerza constante: siendo IF á AF, como AF al radio de la devoluta AG, tendremos Lam. 8. Fig. 39.

$db : \frac{db.dy}{ddx}$ (radio de la devoluta) $= \frac{1}{2}{}_{0}muady : F = \frac{1}{2}{}_{0}mua.\frac{dy^2}{ddx}$: ó suponiendo $\frac{F}{\frac{1}{2}{}_{0}mua} = Q, \frac{dy^2}{ddx} = Q$: ó

$db^2 - dx^2 = Qddx$. Para despejar esta equacion de diferenciales, siendo z el arco ó ángulo AEN que forma la tangente AE con la otra BE, tenemos $dx = dbsen.z$, y $ddx = dbdzcos.z$; lo que da $db^2 - db^2 sen.z^2 = Qdbdzcos.z$, $db = \frac{Qdzcos.z}{1 - sen.z^2} = \frac{Qdz}{cos.z}$, $dx = \frac{Qdzsen.z}{cos.z}$, y $dy = Qdz$: ó integrando $x = Ql.cos.z$, y $y = Qz$; de que resulta $xz = yl.cos.z$, equacion muy distinta de la cadenaria, que hallamos (§. 41. *del Apéndice*). Su construccion se hace mas facil, pues tomando por ordenadas los arcos z, los logarithmos hyperbólicos de $cos.z$ serán las abcisas correspondientes.

Abcisas y ordenadas para la construccion de la Velaria.

Arcos z.	Abcisas.	Ordenadas.
10°	0,0153	0,1745
20	0,0638	0,3490
30	0,1437	0,5236
40	0,2663	0,6981
50	0,4415	0,8727
60	0,6924	1,0472
70	1,0717	1,2217
80	1,7488	1,3963
90	infinita	1,5708

262 Respecto que es $y = Qz$, será $Q = \frac{y}{z} = \frac{F}{\frac{1}{20}mua}$, y $F = \frac{\frac{1}{20}muay}{z}$, fuerza con que en su tirantez actua la Vela.

263 La direccion en que actua la fuerza total del todo ó parte de la Vela, ó curva como AK, es LO, que divide en dos partes iguales el ángulo KOA, que forman las dos tangentes KO, AO: pues siendo la tension ó tirantez de la Vela, tanto en K, como en A, $= F$, formado el rombo KOML, la diagonal LO será

la

la fuerza y direccion resultante de las dos iguales F, expresadas por KO, MO. Por esta misma razon tendremos $sen.LMO : sen.LOM = F : \frac{F sen.LMO}{sen.LOM}$, fuerza que en la direccion LO hace la porcion de curva ó Vela AK. Si llamamos, pues, φ el ángulo KOA que forman las dos tangentes, será la fuerza que segun LO hace la porcion de Vela $KA = \frac{\frac{1}{2^0} mauy sen.\varphi}{z sen.\frac{1}{2}\varphi} = \frac{\frac{1}{2^0} mauy.2cos.\frac{1}{2}\varphi}{z}$: ó llamando π el ángulo EAN que forma la Vela con el viento en el punto A, y Π el OKP que forma en el otro extremo K, será $z = Ar.(90-\pi)$, y $\varphi = 180° - (\Pi - \pi)$, lo que dá la fuerza de la Vela $= \frac{\frac{1}{2^0} mauy.2sen.\frac{1}{2}(\Pi-\pi)}{Ar.(90°-\pi)}$.

264 Supuesta la ordenada $BR = Y$ es, por las equaciones (§.261) $y = Qz = QAr.(90°-\pi)$, y la $Y = QAr.(90°-\Pi)$, luego $y : Y = Ar.(90°-\pi) : Ar.(90°-\Pi)$; lo que da $Y = \frac{y Ar.(90°-\Pi)}{Ar.(90°-\pi)}$. A mas de esto, si llamamos b la cuerda KA, y α el ángulo que forma con el viento, tendremos $y - Y = b sen.\alpha$, ó $Y = y - b sen.\alpha$: luego $\frac{y Ar.(90°-\Pi)}{Ar.(90°-\pi)} = y - b sen.\alpha$, que dá $y = \frac{b sen.\alpha Arc.(90°-\pi)}{Ar.(\Pi-\pi)}$. Este valor substituido en la fuerza que hace la Vela KA en la direccion LO, queda esta $= \frac{\frac{1}{2^0} maub sen.\alpha.2sen.\frac{1}{2}(\Pi-\pi)}{Ar.(\Pi-\pi)} = \frac{\frac{1}{2^0} maub sen.\alpha sen.\frac{1}{2}(\Pi-\pi)}{Ar.\frac{1}{2}(\Pi-\pi)}$.

265 La fuerza de la Vela no solo depende del ángulo α que forma el viento con la Verga, sino tambien de la diferencia entre los ángulos Π y π, ú de la curvidad de ella, que es de donde dimanan aquellos;

de

de suerte, que quanto mas curva sea la Vela, menor será su fuerza: y como la curvidad depende de la anchura de la Vela, de la violencia del viento, y de la tension y calidad de la Vela, quanto mas ancha fuere, mayor sea el viento, menos estendida estubiere la Vela, y mas delgada ó flexible fuere, menor será á proporcion la fuerza que hará.

266 Para hallar por la fórmula el caso en que la Vela sea plana, no hay sino suponer que sean sensiblemente $\Pi = \pi$, que será por consiguiente aquel en que mas fuerza haga: la cantidad de Vela comprehendida entre los dos extremos A y K, será, por la suposicion infinitamente pequeña, y degenerará en línea recta, ó un solo plano. La fórmula ó fuerza se reducirá, segun esto, á $\frac{\frac{1}{20}mauhsen.\alpha sen.o}{Ar.o}$; y como es la razon $\frac{sen.o}{Ar.o} = 1$, queda la fuerza que hace la Vela, supuesta plana, $\frac{1}{20}mauhsen.\alpha$: y será la mayor que pueda producir.

267 Por el contrario, la menor que puede hacer es aquella en que la curvidad sea la mayor posible, ó que la diferencia $\Pi - \pi$ sea la mayor, que es quando son $\Pi = 180^\circ$, y $\pi = 0$: la fórmula se reduce en tal caso á $\frac{\frac{1}{20}mauhsen.\alpha sen.90^\circ}{Ar.90^\circ}$: de suerte, que la fuerza mayor que puede hacer la Vela, es á la menor como el arco de 90° al radio. En general, la fuerza de la Vela, supuesta plana, es á la que legitimamente hace, siendo curva, como $Ar.\frac{1}{2}(\Pi - \pi)$ á $sen.\frac{1}{2}(\Pi - \pi)$.

268 El ángulo que forma la direccion LO con el viento es $= LOE + EAN = 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}(\Pi - \pi) + \pi = 90^\circ + \frac{1}{2}(\Pi + \pi)$, donde se ve que la direccion LO, ninguna dependencia tubiera del ángulo α, si por alterarse este, no se alteraran tambien los Π y π; pero

son

son (§.261) $x = Q\,log.cof.z$, y $y = Qz$, y si suponemos $RK = X$, $X = Q\,log.cof.Z$, y $Y = QZ$, expresando Z el ángulo OYN: luego $\frac{y-Y}{x-X} = tang.\alpha =$

$$\frac{z-Z}{log.cof.z - log.cof.Z} = \frac{Ar.(\Pi-\pi)}{log.cof.(90^\circ-\pi) - log.cof.(90^\circ-\Pi)}$$

$$= \frac{Ar.(\Pi-\pi)}{log.fen.\Pi - log.fen.\pi} \text{ y } fen.\alpha = \frac{Ar.(\Pi-\pi)}{\left(\left(log.\frac{fen.\Pi}{fen.\pi}\right)^2 + Ar.(\Pi-\pi)^2\right)^{\frac{1}{2}}}:$$

donde se ve, que los ángulos Π y π dependen del ángulo α, y que al paso que este es mayor, lo es tambien la diferencia de aquellos: y por consiguiente, que la direccion LO depende tambien del ángulo α, aunque no lo exprese el que forma con el viento $= 90^\circ + \frac{1}{2}(\Pi+\pi)$.

269 La equacion $tang.\alpha = \frac{Ar.(\Pi-\pi)}{log.fen.\Pi - log.fen.\pi}$ que acabamos de dar, puede servir para hallar los valores de Π y π dado el de α; pero como es indeterminado corresponden infinitas soluciones á un mismo valor de α, cada una de ellas que resulta de distinta velocidad del viento, que obliga á la Vela á tomar mayor ó menor curvidad; siendo claro, que quantas paralelas se tiraren á la AK, y terminaren en la curva, como BX, daran otros tantos casos en que, siendo α del mismo valor, Π y π serán de distinto, y terminarán distinta curvidad á la Vela, que ha de resultar de la mayor ó menor velocidad del viento: de suerte, que quanto mayor sea este, mayor será Π, y menor π, aumentando aquel en mayor razon que en la que disminuya este.

270 Si del ángulo $90^\circ + \frac{1}{2}(\Pi+\pi)$ que forma el viento con la direccion LO, se substrae el ángulo α, que forma el viento con la Verga, quedará el AVO, que forma la Verga con la direccion, =

$90^\circ + \frac{1}{2}(\Pi + \pi) - \alpha$: y el VOQ, que forma esta con OQ, perpendicular á la Verga; y que llamaremos $\delta = \frac{1}{2}(\Pi + \pi) - \alpha$: por lo que el AVO, que forma la Verga con la direccion, será tambien $= 90^\circ + \delta$.

271 Si TS representa la Quilla del Navío, y llamamos β el ángulo TSV, que forma con la Verga, será el STV, que forma la Quilla con la direccion LO, $= 90^\circ + \delta - \beta = 90^\circ + \frac{1}{2}(\Pi + \pi) - \alpha - \beta$: ó porque $\alpha + \beta$ es igual al ángulo que forma el viento con la Quilla, si suponemos que este sea γ, será el que forma la Quilla con la direccion $= 90^\circ + \frac{1}{2}(\Pi + \pi) - \gamma$.

272 La fuerza que hace la Vela en la direccion LO, es á la fuerza que hace segun la Quilla, como el radio al coseno del angulo STV que forma la Quilla con la direccion: luego la fuerza que hará la Vela, segun la Quilla, será $= \frac{\frac{1}{20} mauhsen.\alpha sen.\frac{1}{2}(\Pi - \pi) sen.(\beta - \delta)}{Ar.\frac{1}{2}(\Pi - \pi)}$.

Como esta fuerza es á la que exerce la Verga perpendicular ó lateralmente á la Quilla, como $sen.(\beta - \delta)$ á $cos.(\beta - \delta)$, será esta fuerza lateral $=$ - - - - - - - -
$\frac{\frac{1}{20} mauhsen.\alpha sen.\frac{1}{2}(\Pi - \pi) cos.(\beta - \delta)}{Ar.\frac{1}{2}(\Pi - \pi)}$.

273 Ultimamente nos queda que indagar el centro de las fuerzas de la Vela. Siendo plana y quadrilonga, no hay duda que lo fuera el medio de ella, ú de la cuerda KA: y lo mismo aunque fuese curva, si las curvidades á iguales distancias del mismo centro fueran iguales; pero ya no es lo propio siendo mas curva por la parte de sotavento: en efecto la direccion es LO, y O un punto donde, colocada una potencia, haria el mismo efecto que las dos iguales colocadas á los extremos K y A, ó colocada en qualquiera punto de la línea LO. De esta suerte, si S fuere el medio de la cuerda KA, y la accion de la Vela, supuesta plana, se exerciere en el mismo punto S,

sien-

siendo curva, y representando ST la Quilla del Navío, T, interseccion de esta, y de la direccion LO, será el punto sobre que exercerá la accion la Vela curva: de suerte que, para el cálculo y efecto, será lo mismo que si, supuesta la Vela plana, estubiere el palo ó medio de la Verga en T, ó que se hubiesen retirado los palos hacia Popa de la cantidad ST. El valor de esta se puede inferir por el cálculo de Trigonometria. Siendo KOA $= 180^\circ - (\Pi - \pi)$, y KAO $= \alpha - \pi$, será KO $= \frac{h sen.(\alpha - \pi)}{sen.(\Pi - \pi)}$. Siendo asimismo KOL $= 90^\circ - \frac{1}{2}(\Pi - \pi)$, y KVO $= 90^\circ - \delta$, será KV $= \frac{h sen.(\alpha - \pi) cos. \frac{1}{2}(\Pi - \pi)}{sen.(\Pi - \pi) cos.\delta}$, y SV $= \frac{1}{2}h - \frac{h sen.(\alpha - \pi) cos. \frac{1}{2}(\Pi - \pi)}{sen.(\Pi - \pi) cos.\delta}$. Ultimamente, siendo el ángulo TVS $= 90^\circ - \delta$, y STV $= 90^\circ + \delta - \beta$, será ST $= \frac{\frac{1}{2} h cos.\delta}{cos.(\beta - \delta)}$ ----- $\frac{h sen.(\alpha - \pi) cos. \frac{1}{2}(\Pi - \pi)}{sen.(\Pi - \pi) cos.\beta - \delta)} = \frac{\frac{1}{2}h}{cos.(\beta - \delta)} \left(cos.\delta - \frac{sen.(\alpha - \pi}{sen.\frac{1}{2}(\Pi - \pi)} \right)$.

274 Sentados ya los principios theóricos de la Vela, debemos indagar los ángulos que se observan en la práctica, á fin de aplicar aquellos á esta en su debido lugar. A Popa ya se sabe que es $\alpha = 90^\circ$: con que será (§.269) $tang.\alpha = \frac{Ar.(\Pi - \pi)}{log.sen.\Pi - log.sen.\pi} = \infty$: lo que da $sen.\Pi = sen.\pi$, ó $\Pi = 180^\circ - \pi$. Substituidos estos valores en δ (§.270) $= \frac{1}{2}(\Pi + \pi) - \alpha$, resulta $\delta = 90^\circ - 90^\circ = 0$: lo que manifiesta, que la Vela actua en direccion perpendicular á la Verga, lo que es bien notorio. Substituyendo asimismo los valores hallados en $\beta = 90^\circ$ en la fuerza que hace la Vela, segun la Quilla, queda esta $= \frac{\frac{1}{20} mauh sen.(90^\circ - \pi)}{Ar.(90^\circ - \pi)}$: de suerte, que al paso que disminuye π, ó que tiene

mas curvidad la Vela, es menor la fuerza que esta hace. La que exerce lateralmente es cero, por ser *cos.*β $=$ o: y el valor de ST no queda terminado, porque substituidos los hallados, es ST $= \frac{\frac{1}{2}h}{o}(1-1)$.

275 El ángulo α, asi como el β, con que se navega á bolina, es dificultoso se midan á bordo con la prolixidad que se requiere. Para obtenerlos con alguna seguridad, recurrí á un modelo primorosamente aparejado: en él hallé, que sirviendose de *Trozas*, largando estas, y forzando las *Vergas* contra los *Obenques* y *Estay*, se pueden *bracear las mayores*, hasta formar sus Vergas con la Quilla un ángulo de 35°: que llevadas hasta un regular braceo, le forman de 40°, y que puede aumentar hasta $42°\frac{1}{2}$. Con esto, sabiendose que en este caso es regularmente el ángulo que forma el viento con la Quilla de $67°\frac{1}{2}$, se sigue, que el ángulo α será de 25°. Es, pues, precisamente este ángulo el que en la práctica forman las Vergas con el viento yendo á bolina, quando quedan las Velas bien orientadas: de esta suerte, usando Trozas, será $\gamma = 60°$; á un braceo sin ellas $= 65°$; y á lo ordinario $= 67°\frac{1}{2}$, quedando siempre constante $\alpha = 25°$. Para el uso de nuestro exemplo podemos tomar el medio, y sentar $\gamma = 65°$, $\alpha = 25°$, y por consiguiente $\beta = 40°$. No obstante que con vientos fuertes las mismas Vergas, ó *aparejo* se bracea mas, por afloxarse la *obencadura* de sotavento, que es la que lo impide. En las Velas latinas de Galeras, Xabeques, &c. se bracean aun muchisimo mas.

276 Segun lo dicho, será á bolina en los Navíos, $tang.\alpha = ,4663077 = \frac{Ar.(\Pi-\pi)}{log.sen.\Pi - log.sen.\pi}$. Esta equacion no nos da el valor de Π y π en el caso extremo de $\Pi = \pi$, ó en que sea el viento infinitamente corto, y la Vela plana, porque resulta $,4663077 = \frac{0}{0}$:

para

para hallarles podemos ocurrir á la equacion $\delta = \frac{1}{2}(\Pi + \pi) - \alpha$, porque, supuesta la Vela plana, es $\delta = 0$, lo que da $\frac{1}{2}(\Pi + \pi) - \alpha = \Pi - \alpha = 0$, y $\Pi = \pi = \alpha = 25^\circ$. Es, pues, este el menor valor que navegando á bolina puede tener Π, y el mayor que puede tener π. A el paso que aumente el viento, aumentará Π, y disminuirá π; pero siempre de forma que quede constante $\alpha = 25^\circ$, y $tang.\alpha = ,4663077 = \frac{Ar.(\Pi - \pi)}{log.sen.\Pi - log.sen.\pi}$. Si suponemos que con viento de todas Velas es $\Pi = 60$, se hallará $\pi = 6^\circ\ 40'\frac{1}{2}$: y si con viento fresco aumenta Π hasta ser $= 90^\circ$, se halla $\pi = 2^\circ\ 7'\frac{1}{2}$. Substituidos estos valores en $\delta = \frac{1}{2}(\Pi + \pi) - \alpha$, queda para el primer caso, $\delta = \frac{1}{2}(60^\circ + 6^\circ\ 40'\frac{1}{2}) - 25^\circ = 8^\circ\ 20'\frac{1}{4}$, y para el segundo $\delta = \frac{1}{2}(90^\circ + 1^\circ\ 7'\frac{1}{2}) - 25^\circ = 21^\circ\ 3'\frac{3}{4}$: en donde ya se vé lo que, solo por aumentar el viento, debe aumentar la deriva del Navío; y esto sin contar el efecto de la Mar, puesto que de un caso á otro hay $12^\circ\ 43'\frac{1}{2}$ de diferencia, que es lo que la direccion del viento fresco cae mas á sotavento que la otra. Substituidos ahora todos los valores hallados con $\beta = 40^\circ$ en la fuerza que hace la Vela, segun la Quilla, (§. 272) quedará para el primer caso esta fuerza $= \frac{\frac{1}{20}mauhsen.25^\circ sen.(26^\circ\ 39'\frac{3}{4})sen.(31^\circ\ 39'\frac{3}{4})}{Ar.(26^\circ\ 39'\frac{3}{4})} = \frac{1}{20}mauh.\frac{2138}{10000}$: y para el segundo $= \frac{\frac{1}{20}mauhsen.25^\circ sen.(43^\circ\ 56'\frac{1}{4})sen.(18^\circ\ 56'\frac{1}{4})}{Ar.(43^\circ\ 56'\frac{1}{4})} = \frac{1}{20}mauh.\frac{1241}{10000}$: de suerte, que esta no es á proporcion, ni los $\frac{3}{5}$ de la otra; pero debe aumentar por el mayor valor de u. Substituyendo asimismo los propios valores en la fuerza lateral que hace la Vela, quedará esta para el primer caso $= \frac{1}{20}mauh.\frac{3468}{10000}$: y para el segundo $=$

$\frac{1}{20}$

$\frac{1}{20} mauh . \frac{435}{1000}$: donde se ve que aumentando en este segundo caso la fuerza lateral, debe asimismo aumentar la deriva. Substituidos finalmente los valores de α, δ, Π, π y β en el de ST $=$ ---------- $\frac{\frac{1}{2}b}{cof.(\beta-\delta)}\left(cof.\delta - \frac{fen.(\alpha-\pi)}{fen.\frac{1}{2}(\Pi-\pi)}\right)$, será para el primer caso, $ST = \frac{\frac{1}{2}b}{cof.(31^\circ\ 39'\frac{1}{4})}\left(cof.(8^\circ\ 20'\frac{1}{4}) - \frac{fen.(18^\circ\ 19'\frac{1}{2})}{fen.(26^\circ\ 29'\frac{1}{4})}\right) = \frac{173}{1000}.b$: y para el segundo, ST $=$ -------- $\frac{\frac{1}{2}b}{cof.(18^\circ\ 56'\frac{1}{4})}\left(cof.(21^\circ\ 3'\frac{3}{4}) - \frac{fen.(22^\circ\ 52'\frac{1}{2})}{fen.(43^\circ\ 56'\frac{1}{4})}\right) = \frac{217}{1000}.b$.

277 Los ángulos α y β que á viento largo hacen los Marineros formar á sus Vergas, dado el γ se deducen con bastante proximidad, dividiendo proporcionalmente el movimiento circular que hiciere la Verga, y el que hiciere el viento, de esta suerte. Yendo de bolina forma el viento con la Quilla un ángulo de 65°; y yendo á Popa, de 180°: con que su movimiento circular, de un estado á otro, es el de $180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$. La Verga, yendo á bolina, forma el ángulo, con la Quilla, de 40°, y yendo á Popa, de 90°: con que su movimiento circular es de $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$. Un movimiento á otro es, pues, como 115 á $50 = 23 : 10$; y siendo γ el ángulo que forme el viento con la Quilla en qualquier caso, y β el que forme la Verga, tendremos por la proporcion que se pide $23 : 10 = \gamma - 65^\circ : \beta - 40^\circ$; lo que da $\beta = \frac{10}{23}(\gamma + 27^\circ)$, valor del ángulo que debe formar la Verga con la Quilla, dado el de γ, que forma esta con el viento: y como es $\gamma = \alpha + \beta$, substituido en la equacion este valor, resulta $\alpha = \frac{1}{10}(13\beta - 270^\circ)$.

278 En el caso extremo de ser el viento infinitamente corto, ó la Vela plana, ya diximos (§. 276) que

que es $\delta = \frac{1}{2}(+\pi\Pi) - \alpha = 0$, y $\Pi = \pi$, lo que da $\alpha = \Pi = \pi = \frac{1}{10}(13\beta - 270^\circ)$; ó substituyendo el valor de $\beta = \frac{10}{13}(\gamma + 27^\circ)$, será $\alpha = \Pi = \pi = \frac{1}{13}(13\gamma - 270^\circ)$, que es el valor mínimo de Π, y el máximo de π. Al paso que aumente el viento, aumentará Π, y disminuirá π, conservando entre sí la relacion $tang.\alpha = \frac{Ar.(\Pi - \pi)}{log.\frac{sen.\Pi}{sen.\pi}}$, ó $sen.\alpha = \frac{Ar.(\Pi - \pi)}{\left(\left(log.\frac{sen.\Pi}{sen.\pi}\right)^2 + Ar.(\Pi - \pi)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$. Exâminemos el caso en que sea $\gamma = 134^\circ$, ó en que abra el viento por la Popa de 46°, y será $\alpha = 46^\circ$, y $\beta = 70^\circ$. Demos que con viento de todas Velas sea $\Pi = 90^\circ$, y se hallará $\pi = 41^\circ\ 14'$: y si con viento fuerte suponemos $\Pi = 110^\circ$, se hallará $\pi = 27^\circ\ 20'\frac{1}{2}$. En el primer caso será $\delta = 1^\circ\ 37'$; y en el segundo $= 4^\circ\ 40'\frac{1}{2}$. La fuerza que hace la Vela, segun la direccion de la Quilla, es en el primer caso $= \frac{1}{10} mauh. \frac{8116}{10000}$, y en el segundo $= \frac{1}{10} mauh. \frac{748}{1000}$. Ultimamente, el valor de ST es en el primer caso $= \frac{844}{10000} h$, y el segundo $= \frac{475}{10000} h$. Del mismo modo se pueden resolver todos los demas casos de viento largo, ó formar tablas, con las quales á un golpe de vista se tenga resuelto qualquier caso que se ofrezca.

179 Si en lugar de bracear ú orientar las Velas con la regularidad que se ha dicho, se hiciera mayor el braceo por barlovento, variarán los valores hallados. Si en lugar de ser $\alpha = 64^\circ$, y $\beta = 70^\circ$, siendo $\gamma = 134^\circ$, fuere $\alpha = 54^\circ$, y $B = 80^\circ$, puesto con viento fresco $\Pi = 110^\circ$, se hallará $\pi = 20^\circ\ 51'$; $\delta = 6^\circ\ 25'\frac{1}{2}$: la fuerza de la Vela, segun la Quilla, =

$= \frac{1}{20} mauh . \frac{7157}{10000}$, y $ST = \frac{306}{10000} b$: donde se ve que; por sola esta alteracion, la fuerza es menor, y la ST mayor.

280 Para que podamos, despues de esto, calcular efectivamente la fuerza que hacen las Velas, es preciso que indaguemos los valores de *a* y *b*, que es el alto y ancho de ellas, ó bien el de su producto *ab*, que es el area que encierran, ó número de pies quadrados que contienen. En el Navío de 60 Cañones, que nos sirve de exemplo, son como se sigue.

	Caida.	*Anchura media.*	*Area.*
Vela mayor.	44	80	3520
Gabia.	56	65	3640
Gabia con un rizon tomado.	48	$67\frac{1}{8}$	3222
Con dos rizos.	40	$69\frac{1}{5}$	2768
Con tres.	32	$71\frac{1}{4}$	2280
Trinquete.	39	67	2610
Velacho.	52	55	2860
Velacho con un rizo tomado.	$44\frac{4}{7}$	$56\frac{3}{5}$	2525
Con dos rizos.	$37\frac{1}{7}$	$58\frac{1}{3}$	2167
Con tres.	$29\frac{5}{7}$	60	1783
Mesana.			1300
Sobre-mesana.			1720
Juanete mayor.			1500
Juanete de Proa.			1130
Cevadera.			1250
Foque.			1060
Contra foque.			410
Ala de Gabia.			1100
Ala de Velacho.			860
Rastrera.			1500
Vela de Estay mayor, de Gabia, ó Volante.			700
Vela de Estay de Mesana, Sobre-mesana ó Juanete.			400

Qual-

Qualquier número de estas Velas, ú de sus areas, que se exponga al viento, podremos expresarlo por A^2: y será por lo dicho (§. 264) su fuerza $= \frac{\frac{1}{2\circ}mA^2 u\,sen.\alpha\,sen.\frac{1}{2}(\Pi-\pi)}{Ar.\frac{1}{2}(\Pi-\pi)}$, ó suponiendo $\frac{sen.\frac{1}{2}(\Pi-\pi)}{Ar.\frac{1}{2}(\Pi-\pi)} = G$, será $= \frac{1}{2\circ}mA^2 G u\,sen.\alpha$, expresando m la densidad del agua, y α el ángulo que forme el viento con la Verga: y respecto que (§. 266) es $\frac{1}{2\circ}mA^2 u\,sen.\alpha$ la fuerza que hace la Vela, supuesta plana, siempre que sea G proxîmamente $= 1$, como sucede con poco viento, y particularmente siendo este largo, se podrá suponer la Vela plana, por lo que toca á su fuerza, y esta $= \frac{1}{2\circ}mA^2 u\,sen.\alpha$.

281 Del mismo modo necesitamos, para la continuacion de nuestros cálculos, hallar los momentos verticales con que aćtuan las propias Velas, que se reducen á los produćtos de las fuerzas halladas, por la distancia vertical desde el exe horizontal, que pasa por el centro de gravedad del Navío, sobre que gira este, hasta el centro donde se reunen las fuerzas de cada Vela. Tendremos, pues, conocidos los momentos, solo con hallar estas alturas verticales de los centros de las Velas: y esto, hallando el centro de sus areas, y su situacion en altura respećto del casco, cuya cálculo es puramente material. Despues de hecho para el Navío de 60 Cañones, se halla como se sigue.

El centro de la Vela mayor elevado........	42 pies,
del Trinquete.................	41
de la Gabia toda larga............	91
con un rizo tomado........	$87\frac{2}{3}$
cos dos rizos............	$84\frac{1}{6}$
con tres...............	$80\frac{1}{2}$
del Velacho todo largo...........	84
con un rizo..............	$80\frac{4}{5}$
con dos................	$77\frac{1}{2}$
con tres................	74
de la Mesana.................	47
de la Sobre-mesana...............	75
del Foque al extremo del Botalon.....	73
del Contra-foque...............	58
del Juanete mayor..............	133
del Juanete de Proa.............	123
de la Vela de Estay mayor y Mesana...	33
de la Cevadera.................	23
de la Vela de Estay de Gabia.......	75
de la Vela de Estay volante........	92
de la Vela de Estay de Sobre-mesana.	73
de la Vela de Estay de Juanete.....	122

Si la elevacion de los centros de cada una de estas Velas, se multiplica ahora por la fuerza $\frac{1}{10}mA^2Gusen.\alpha$, que le corresponde, poniendo A^2 por el area superficial de la misma, se tendrá su momento; ó llamando aquella elevacion n, será el momento ------ $\frac{1}{10}mnA^2Gusen.\alpha$. Los productos de dichas elevaciones por las areas son:

De

	Areas.	*Elevaciones.*	*Productos* $= nA^2$
De la Vela mayor.........	3520	42	147840
del Trinquete............	2610	41	107010
de la Gabia..............	3640	91	331240
con un rizo.........	3222	$87\frac{7}{5}$	282340
con dos...........	2768	$84\frac{1}{6}$	232854
con tres...........	2280	$80\frac{1}{2}$	183566
del Velacho..............	2860	84	240240
con un rizo.........	2525	$80\frac{4}{5}$	203964
con dos...........	2167	$77\frac{1}{2}$	167857
con tres...........	1783	74	131980
de la Mesana.............	1300	47	61100
de la Sobre-mesana........	1720	75	129000
del Foque................	1060	73	77380
del Contra-foque..........	410	58	23780
del Juanete mayor.........	1500	133	199500
del Juanete de Proa.......	1130	123	138990
de la Vela de Estay mayor...	700	33	23100
de la de Estay de Mesana...	400	33	19800
de la Cevadera............	1250	23	28750
de la Vela de Estay de Gabia.	700	75	52500
Volante.	700	92	64400
de Sobre-mesana.	400	73	29200
de Juanete.	400	122	48800
Suma de todo el Velamen............			1722630

Multiplicando ahora qualquier número de estas cantidades por $\frac{1}{20}mu G sen. \alpha$, se tendrá el momento de las Velas á que corresponden.

282. Si la suma de momentos de qualquiera número de Velas se divide por la suma de sus fuerzas, se tendrá la elevacion del centro de fuerzas de todas aquellas Velas sobre la horizontal que pasa por el centro de gravedad del Navío. De esta suerte, si

$\frac{1}{20}mnA^2Gu$*sen.*α representare dicha suma de momentos, n será la elevacion del centro de todas aquellas fuerzas ó Velas: y asi, siendo $\frac{1}{20}mu$G*sen.*α. 1722630 el momento de todas las Velas que sirven á bolina, y $\frac{1}{20}mu$G*sen.*α 24400 la suma de sus fuerzas, la elevacion del centro de estas sobre la horizontal que pasa por el centro de gravedad del Navío, será $n = \frac{1722630}{24400} = 70\frac{1}{2}$: esto es, en qualquier caso la elevacion será el quociente que resulte de dividir la suma de los produćtos expuestos en la Tabla anterior, por la suma de las areas. Quedando con solas las mayores, Gabias con un rizo tomado, Sobre-mesana y Contra-foque, la suma de los produćtos es $=893928$, y el de las areas $=14107$: con que el centro de estas Velas estará elevado de $63\frac{1}{3}$ pies. Los produćtos de solas las dos mayores es $=254850$, y sus areas $=6130$: luego la elevacion del centro de sus fuerzas será $41\frac{1}{2}$ pies, y asi de las demas.

283 En Navíos que tengan los Aparejos proporcionales á las dimensiones lineares de sus buques, ú de las mangas, como de ordinario los hacen los Marineros, las areas de las Velas son como los quadrados de dichas dimensiones, y los momentos como los cubos. Si fuere, pues, m la manga del Navío de 60 Cañones, y M la de otro qualquiera, será el momento de las Velas en el primero, al momento de las del segundo, como m^3 á M^3: y asi el momento de todas las Velas en el Navío de 70 Cañones, cuyas dimensiones lineares con el de 60, son como 8 con 7, será $= \frac{512}{343}\cdot\frac{1}{20}mu$G*sen.*$\alpha$. $1722630 = \frac{1}{20}mu$G*sen.*α. 2571390: y asi de los demas Navíos, y demas Velas.

284 Del mismo modo que hemos calculado el momento y centro de las Velas, por lo que toca á la

ac-

accion vertical, necesitamos calcular lo mismo por lo que toca á la accion horizontal, que es de donde depende el govierno del Navío. Para esto debemos determinar la situacion de los palos, ó lo que el centro de fuerzas de cada una de las Velas dista del exe vertical que pasa por el centro de gravedad del Navío, pues el producto de su fuerza, por esta distancia, será su momento, y la suma de todos, partida por la de las fuerzas, dará la distancia horizontal desde el centro comun de todas al exe vertical, que pasa por el centro de gravedad del Navío.

285 Tienen los Constructores, por lo ordinario, sus reglas para colocar ó situar los palos, que usan indiferentemente, tenga el Navío la figura que se quiera, quando en esto, como se verá en su lugar, debe cuidarse de establecer un perfecto equilibrio. Los unos situan el Palo mayor á $\frac{1}{6}$ de la Eslora mas á Popa que la mitad del Navío, otros á solo $\frac{1}{12}$ de la misma. Aquellos ponen el Triquete á $\frac{1}{8}$, tambien de la Eslora, distante de Proa, y estos á $\frac{1}{10}$: la Mesana, segun los primeros, va á $\frac{3}{16}$ de la Eslora distante del Codaste, y segun los segundos á $\frac{4}{33}$. El Navío de 60 Cañones, que nos ha servido de exemplo, tenia los palos colocados segun los segundos: esto es, el Palo mayor á $6\frac{10}{11}$ pies á Popa del medio del Navío: el Trinquete á $60\frac{4}{5}$ á Proa del mismo medio: y la Mesana á $49\frac{20}{33}$ á Popa; pero el medio del Navío estaba (§.140) $\frac{1}{3}$ de pie á Popa del centro de gravedad: luego el Palo mayor distaba del centro $7\frac{8}{33}$ pies: el Trinquete $60\frac{7}{15}$, y la Mesana $49\frac{31}{33}$. Con esto el centro de fuerzas horizontales de las Velas Mayor, Gabia, Juanete mayor, por lo que estas dos se aproxîman algo mas á Proa que la primera, se puede suponer á 7 pies del centro de gravedad: el del Trinquete, Velacho y Juanete de Proa á 61; y el de la Sobre-mesana, por lo que este palo cae sobre Popa, á 50. La Mesana

tie-

tiene su centro á 65 : el Foque, amurado al extremo del Botalon, á 100; y el Contrafoque á 90. Si cada una de estas distancias se multíplica ahora por la fuerza de las Velas á que corresponde, se tendrá su momento horizontal: cuya suma, partida por la de las fuerzas, dará la distancia horizontal desde el centro comun de todas á la vertical que pasa por el centro de gravedad del Navío, ó lo que es lo mismo, la suma de productos de cada una de las distancias, por las areas de las Velas correspondientes, partida por la suma de las areas, dará la misma distancia horizontal. Para el Palo mayor tenemos el producto (3520 + 3640 + 1500). 7 = 60620 : para el Trinquete (2610 + 2860 + 1130). 61 = 402600 : para la Sobremesana 1720. 50 = 86000 : para la Mesana 1300.65 = 84500 : para el Foque 1060. 100 = 106000; y para el Contra-foque 410. 90 = 36900. Los del Palo mayor y Mesana juntos, hacen 231120, y los del Trinquete, Foque, y Contra-foque 545500: restando aquellos que obligan á orzar, de estos que obligan á arribar, quedan para esto 314380, que divididos por la suma de las areas 19750, vienen al quociente $16\frac{2}{3}$ pies, distancia horizontal desde el centro comun de las fuerzas de las Velas referidas, hasta la vertical que pasa por el centro de gravedad del Navío. Como la mayor elevacion de la Popa equivale á otra superficie que actua como las Velas para orzar, no debemos omitir su efecto. Su area sube á 540 pies, y su centro de fuerza dista de la vertical, que pasa por el centro de gravedad del Navío, de 50, con que su momento es 27000. A mas de esto la inclinacion que el Foque y Contra-foque tienen, respecto del horizonte, disminuye mucho su fuerza. Segun lo dicho (*Cor.* 2. *Propos.* 40. *Lib.* 2. *Tom.* 1.) es en razon directa compuesta del area vertical, y del seno de incidencia; pero el area vertical disminuye como el mismo seno: luego

sera

será como los quadrados del propio. En el Foque, la inclinacion es proxîmamente de 45°; con que el quadrado de su seno será $\frac{1}{2}$, siendo el radio la unidad: y por consiguiente la disminucion de la fuerza es de la mitad, y lo mismo el momento, que se reducirá á 53000: el mismo que resultara si el area de la Vela 1060 fuese solo la mitad 530 de lo que realmente es. En el Contra-foque la inclinacion, respecto de la vertical, es menor, va solo á 30°; con que disminuye su fuerza en la razon de 4 á 3: será, pues, su momento 27675, y el area á que corresponde $307\frac{1}{2}$. Quitando ahora lo que disminuyen los momentos de estos Foques de los 554500 que antes hallamos, y tienden á arribar, quedarán para lo mismo 492275, y para orzar 258120, habiendo añadido los que proceden del costado, á los 231120 que antes hallamos. Haciendo lo propio por lo que toca á las areas, quedan estas $=$ $19657\frac{1}{2}$, y dividiendo por este número la diferencia de los momentos $492275 - 258120 = 234155$, viene al quociente proxîmamente 12 pies, que es la verdadera distancia horizontal desde el centro comun de todas las fuerzas, hasta la vertical que pasa por el centro de gravedad del Navío.

286 Del mismo modo se puede hallar el centro comun de las fuerzas de qualesquiera otras Velas; pero teniendo ya los momentos 234155, y las areas $19657\frac{1}{2}$ de las primeras, se hace mas facil la operacion, quando se hubiere de quitar alguna de las Velas. Supongamos que se substraigan los Juanetes. El momento del mayor es para orzar de $1500 . 7 = 10500$, y el que corresponde al de Proa para arribar $= 1130 . 61 = 68930$: añadiendo aquel, y quitando este de 234155, quedan 185715, que partidos por la suma de las areas $19657\frac{1}{2} - 150 - 1130 = 17047\frac{1}{2}$, vienen al quociente $10\frac{9}{11}$ pies por la distancia horizontal desde el centro de las fuerzas, hasta la ver-

vertical que pasa por el centro de gravedad del Navío. Supongamos que, ademas de los Juanetes se quite el Foque. Su momento es 53000, que quitado de 185715, queda en 132715, y partido por el area $17047\frac{1}{2} - 530 = 16517\frac{1}{2}$, resulta la distancia horizontal $=$ 8 pies. Demos que se tome, despues de esto, un rizo á cada Gabia. El momento de la una es $418 . 7 = 2926$, y el de la otra $335 . 61 = 20435$: con que la distancia horizontal será $= \frac{132715 - 20435 + 2926}{16517\frac{1}{2} - 418 - 335} = 7\frac{1}{3}$. Ultimamente, si quitamos la Mesana, cuyo momento es 84500, y su area 1300, quedará la distancia horizontal, desde el centro de las fuerzas, hasta la vertical que pasa por el centro de gravedad $= \frac{199706}{14464\frac{1}{2}} = 13\frac{4}{5}$ pies. De todas estas determinaciones del centro de fuerzas, ú distancia horizontal hallada, es preciso, atendiendo á la curvidad de las Velas, substraher el valor de ST hallado (§.273 y 276) para obtener el verdadero centro de ellas; pero esto quedará para quando tratemos del govierno, que es donde lo necesitamos.

CAPITULO 2.

Del Timon.

287 YA diximos (§.9) que el Timon se reduce á una Tabla vertical colocada sobre goznes en el extremo de la Popa ó Codaste, para que, girando sobre aquellos, se pase á la derecha ó á la izquierda del Navío, y oponiendose á la corriente de las aguas por aquel lado, sirva de nueva potencia que obligue á girar el todo de la Nave, ó á equilibrar las extrañas que la quisieren sacar de la direccion por donde se

go-

governa. La theórica de esta máchina ó instrumento la han dado muchos Geómetras; pero todos se han fundado sobre el principio de ser la resistencia ó fuerza que las aguas hacen sobre él, como los quadrados de las velocidades del fluido, y senos de ángulos de incidencia. De este principio, ninguna conseqüencia pudieron sacar sobre la figura mas ventajosa que el Timon debe tener, y sin embargo la práctica ha manifestado que es la de un trapecio, mas estrecho por arriba que por abaxo, tal como lo practican todas las Naciones, y como lo supusimos (§. 182): nuestro nuevo principio determina esto, como se verá en su lugar. Por lo ordinario, segun queda dicho (§. 18), suele el Codaste tener lanzamento ó caida hacia atras, y por tanto esta misma resulta sobre el Timon, y es causa para que, pasando de un lado ú otro del Codaste, y fuera de la direccion de la Quilla, dexe de estar vertical, como en su situacion recta con la misma Quilla: todos estos accidentes complican mas la theórica; pero de ella se deducen las reglas que deben conducirnos.

288 Sea BDEC la proyeccion vertical del Timon, DB su anchura en la superficie del agua, y EC la misma en su extremo inferior: sean ademas Lam. 8. Fig. 40.

$DB = CH = b$,

$EH = e$,

la altura vertical desde DB á $EC = a$,

la que hubiere desde una diferencial horizontal $= x$,

y la ordenada $= y$.

Con esto serán $a : e = x : \frac{ex}{a}$; y tambien $y = b + \frac{ex}{a}$.

La fuerza de las aguas en la misma diferencial será $\frac{mydx\,sen.x}{sen.u}\left(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2$, y la resistencia = -----

$\frac{muy\,sen.\varkappa\,sen.\theta}{2\,sen.n}x^{\frac{1}{2}}dx$; pero por motivo del lanzamento es $sen.n$ menor que el radio ó que la unidad, y por la misma razon no son $\varkappa$ ni θ los ángulos que forma la Fig.41. direccion horizontal de las aguas BA con las diferenciales horizontales del Timon NT, supuesta esta figura una representacion horizontal de Quilla y Timon. Si llamamos λ el ángulo TAB que forman dicha direccion de las aguas con la diferencial horizontal del Timon, será (*Cor.* 11. *Lem.* 1. *Lib.* 2. *Tom.* 1.) $sen.\theta = sen.n\,sen.\lambda$, y $sen.\varkappa = sen.n\,cos.\lambda$, supuesto que sea AQ, perpendicular á la Quilla, la direccion en que se busca la fuerza, pues esta es solamente la que concurre á la rotacion de la Nave: la que se dirige segun BA, paralelamente á la Quilla, no hace sino detenerla sin tomar parte á hacerla girar. Substituidos estos valores de $sen.\theta$ y $sen.\varkappa$, asi como el de y en la fórmula, se reduce á $\frac{1}{2}mux^{\frac{1}{2}}dx\left(b+\frac{ex}{a}\right)sen.n\,sen.\lambda\,cos.\lambda$: é integrando, será toda la fuerza con que actua el Timon, segun la perpendicular á la Quilla, $=$ - - - $\frac{1}{2}mu\left(\frac{2}{3}ba^{\frac{3}{2}}+\frac{2ex^{\frac{5}{2}}}{5a}\right)sen.n\,sen.\lambda\,cos.\lambda$; ó poniendo $x=a$,

$$=mu\left(\tfrac{1}{3}ba^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{5}ea^{\frac{3}{2}}\right)sen.n\,se.\lambda\,cos.\lambda=\tfrac{1}{15}mua^{\frac{3}{2}}(5b+3e)\,se.n\,se.\lambda\,cos.\lambda.$$

Supóngase ahora $b+e=g=$ á toda la base inferior del Timon, y $A^2=$ á toda la area del mismo $=\frac{1}{2}ea+ba$: y tendremos $b=\frac{2A^2}{a}-g$, y $e=2g-\frac{2A^2}{a}$, cuyos valores substituidos en la fórmula, la reducen á $\frac{1}{15}mua^{\frac{3}{2}}\left(\frac{4A^2}{a}+g\right)sen.n\,sen.\lambda\,cos.\lambda=$ - - - - - - $\frac{1}{15}mua^{\frac{1}{2}}(4A^2+ga)\,sen.n\,sen.\lambda\,cos.\lambda$.

Fal-

289 Falta ahora aun, para que no nos quede sino cantidades conocidas, colocar el valor de $sen.\eta$: este es variable á causa del lanzamento del Codaste, y depende de $sen.\lambda$ quando es $sen.\lambda = 0$, ó que el Timon está en línea recta con la Quilla, es $sen.\eta = 1$; y quando es $sen.\lambda = 1$; es $sen.\eta =$ al seno del ángulo que forma el Codaste con la Quilla. Siendo esta QA, BC el Codaste, y BDEC el Timon, baxadas las perpendiculares BF y FG, $sen.\eta$ será el seno de FGB: para hallar su valor, hagase CF $= b$, y en el triangulo CFG serán $1 : sen.\lambda = b : FG = b\,sen.\lambda$; y en el BFG, BG $= \sqrt{a^2 + b^2 sen.\lambda^2} : BF = a = 1 : sen.\eta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 sen.\lambda^2}}$, cuyo valor substituido en la fórmula, la reduce á $\dfrac{mua^{\frac{3}{2}}(4A^2 + ga)\,sen.\lambda cos.\lambda}{15\sqrt{a^2 + b^2 sen.\lambda^2}}$. Fig. 42.

290 Podemos, á mas de esto, incluir en esta expresion el efecto de la deriva, porque impelido el Navío, no solo segun su Quilla, sino tambien perpendicularmente á su costado, quando no se dirige segun el viento, su curso es obliquo á la Quilla, como ya diximos (§.4). Que sea $\varepsilon =$ el ángulo de la deriva que tubiere, y será la fuerza que, con atencion á ella, hace el Timon perpendicularmente á la Quilla $= \dfrac{mua^{\frac{3}{2}}(4A^2 + ga)\,sen.(\lambda \pm \varepsilon)cos.\lambda}{15\sqrt{a^2 + b^2 sen.\lambda^2}}$: el signo superior quando el Timon esta á arribar, y el inferior quando esta á orzar.

291 De esta fórmula se deduce, que quanto mayor fuere la velocidad u del Navío, tanta mas fuerza tendrá el Timon en su govierno: que quanto mayor fuere su altura vertical, tanto mayor será tambien la misma fuerza: que á ángulos iguales del Timon, ma-

yor es la fuerza para arribar que la fuerza para orzar; y por ultimo, que quanto menor sea h, ó el lanzamento del Codaste, tanto mas aumenta la fuerza: de suerte que, á no ser porque son mayores los golpes del Mar, y que se resiente mas el Navío quanto menos lanzamento tiene, deberiamos omitirle enteramente, y reducir la fórmula á $\frac{1}{15} mua^{\frac{1}{2}}(4A^2+ga) sen.(\lambda+\varepsilon) cos.\delta$: muchos Navíos sin embargo se han construido sin él; pero respecto á que no se hace precisa tanta fuerza en el Timon, porque la experiencia ha manifestado, que sin este extremo corresponden muy bien los efectos, no hay para que aventurarse, por tan limitada mejoría, á las desdichas que pueden ocurrir en un temporal. Puedese, no obstante, usar de esta ultima fórmula, porque el lanzamento tampoco se debe dar con el exceso que antiguamente se acostumbraba, y en tal caso se hace despreciable la h.

292 Por lo que toca al ángulo λ que debe formar el Timon con la Quilla, se hace evidente, que si es $\lambda = 0$, queda la fuerza en $\frac{1}{15} mua^{\frac{1}{2}}\left(4A^2+ga\right) sen. \pm \varepsilon$: de suerte, que es positiva para arribar, negativa para orzar, y cero en caso de ser cero la deriva; siendo asimismo cero, quando fuera $\lambda = 90^\circ$, ó que el Timon se colocase perpendicularmente á la Quilla.

293 Hay, pues, un ángulo medio, que produce la mayor fuerza que se puede emplear, y que es bueno conocerla para aprovecharse de ella en las ocasiones: para esto igualaremos la diferencial de $sen.(\lambda \pm \varepsilon) cos.\lambda$ á cero, y tendremos $cos.(\lambda \pm \varepsilon) cos.\lambda - sen.\lambda\, sen.(\lambda \pm \varepsilon) = 0$, ó $\frac{sen.\lambda}{cos.\lambda} = \frac{cos.(\lambda \pm \varepsilon)}{sen.(\lambda \pm \varepsilon)}$: que se reduce á $tang.\lambda = \frac{1}{tang.(\lambda \pm \varepsilon)}$, ó $tang.\lambda\, tang.(\lambda \pm \varepsilon) = 1$: los dos arcos λ y $\lambda \pm \varepsilon$ juntos han de ser, pues, iguales á 90°: esto

es,

es, $\lambda + \lambda \mp \varepsilon = 90^\circ$, lo que da $\lambda = 45^\circ \pm \frac{1}{2}\varepsilon$, es el ángulo que debe formar el Timon con la Quilla para que haga su mayor fuerza posible: si la deriva fuese pues de 10 grados, el ángulo de sotavento deberá ser de 40°, y el de barlovento de 50°.

294 Si el valor del ángulo λ se substituye en la fuerza hallada, será la máxima con que hará el Timon girar al Navío =

$\frac{1}{3} mua^{\frac{1}{2}}(4A^2 + ga)\,sen.(45^\circ \pm \frac{1}{2}\varepsilon)\,cos.(45^\circ \mp \frac{1}{2}\varepsilon)$; pero respecto á que $sen.(45^\circ \pm \frac{1}{2}\varepsilon)$ es igual á $cos.(45^\circ \mp \frac{1}{2}\varepsilon)$, se reducirá la máxima fuerza á

$\frac{1}{3} mua^{\frac{1}{2}}(4A^2 + ga)\,sen.(45^\circ \pm \frac{1}{2}\varepsilon)^2$.

295 De esto se concluye, que la fuerza que puede hacer el Timon por sotavento es siempre mayor que la que puede hacer por barlovento: esto es, que su fuerza para arribar puede siempre ser mayor que la fuerza para orzar: es asunto que los Timoneles verifican todos los dias, particularmente con viento fresco.

296 No obstante las ventajas expuestas, con la disposicion que hay en los Navíos, apenas puede formar el Timon con la Quilla un ángulo de 35°: la *Caña*, que es un palo horizontal hecho firme en la cabeza del Timon, para que, como palanca, se facilite el manejo, es bastante larga, y queda ya casi apoyada sobre el costado, abriendo el ángulo de 35°: para que este se pueda formar mayor, es preciso acortar la Caña, y esto tiene el inconveniente de que resultaría mas insuportable y rudo el manejo del Timon, quando ya lo es bastante en tiempo riguroso: inconveniente que obliga, á mi dictamen, á renunciar el aumento del ángulo á que nos incita el cálculo. Esta pérdida no es muy considerable si se exâmina con cuidado: un exemplo puede sacarnos de la duda. Supongamos, para mayor facilidad, el caso de ser la deriva

cero;

cero; y tendremos, que la máxima fuerza que nos da la theórica, es á la que resulta por la práctica de los Marineros, como $sen.(45^{\circ})^2$ á $sen.35^{\circ}\ cos.35^{\circ}$, ó proxîmamente como 10 á 9: de suerte, que toda la pérdida de la fuerza se reduce á una decima parte: lo mismo resulta, con corta diferencia, con qualquiera otros ángulos, á excepcion de los que, con deriva, se forman por barlovento, ó con el fin de orzar. Supuesta, como antes, la deriva de 10°, será la fuerza máxîma de la theórica, á la que resulta por la práctica de los Marineros, como $sen.(40^{\circ})^2$ á $sen.25^{\circ}\ cos.35^{\circ}$, ó proxîmamente como 25 á 21, cuya diferencia es algo mayor: por dicha la necesidad de orzar no se hace tan urgente como la de arribar: los Navíos, por lo ordinario, tienden siempre á orzar, por las razones que se verán mas adelante, especialmente quando el viento es fuerte, ó como llaman los Marineros *fresco*, ó lo que es lo mismo en la precisa necesidad de mucha deriva; de suerte que, por este accidente, queda subsanada la dificultad.

297 No basta para el govierno del Navío atender á la fuerza que produce el Timon: es preciso considerar su momento; esto es, al producto de su fuerza, por la distancia horizontal desde el centro de aquella al exe vertical que pasa por el centro de gravedad del Navío, que es sobre quien se executa la rotacion. Que sea D la distancia desde dicho exe al Codaste, y z la del Codaste al centro de las fuerzas del Timon, y será el momento de este $= (D + z)\frac{1}{15} mua^2 (4A^2 + ga) sen.(\lambda \pm \varepsilon) cos.\lambda$.

Para hallar el valor de z tenemos que el centro de las Fig.40. fuerzas del rectangulo BDHC dista del Codaste $\frac{1}{2}b$, y el centro de las fuerzas del triángulo DEH, $b + \frac{5}{14}e$: por lo que la distancia desde un centro á otro será $\frac{1}{2}b + \frac{5}{14}e$. Las fuerzas del triángulo son á las del rectangulo como $\frac{1}{5}e$ á $\frac{1}{3}b$: luego tendremos $\frac{1}{5}e + \frac{1}{3}b : \frac{1}{5}e = \frac{1}{2}b$

$\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}e : \frac{\frac{1}{10}be+\frac{1}{14}e^2}{\frac{1}{3}b+\frac{1}{5}e}$ distancia horizontal desde el centro de las fuerzas del rectangulo al centro de las fuerzas de todo el Tímon: con que la distancia desde este centro al Codaste $= z = \frac{1}{2}b + \frac{\frac{1}{10}be+\frac{1}{14}e^2}{\frac{1}{3}b+\frac{1}{5}e} = \frac{42be+35b^2+15e^2}{14(3e+5b)}$; ó substituyendo los valores de e y b, $z = \frac{2(A^4+5A^2ga+g^2a^2)}{7a(4A^2+ga)}$, que reduce el momento del Timon á $\left(D+\frac{2(A^4+5A^2ga+g^2a^2)}{7a(4A^2+ga)}\right)\frac{1}{15}mua^{\frac{1}{2}}(4A^2+ga)\,sen.(\lambda \pm \varepsilon)\,cos.\lambda$

$$= \left(D+2(A^2+ga)-\frac{6A^4}{7a(4A^2+ga)}\right)(4A^2+ga)\frac{1}{15}mua^{\frac{1}{2}}\,sen.(\lambda \pm \varepsilon)\,cos.\lambda.$$

298 Por estas fórmulas se ve, como diximos, quanto importa el que aumente la g, y disminuya la b, ó que se aproxime la figura del Tímon lo mas que sea dable, á un triángulo, como lo practican los Marineros.

299 La distancia $D+z$ varía al paso que el ángulo λ es mayor; pero esta diferencia se hace despreciable por lo muy grande que es D, respecto de z.

300 Ultimamente es preciso advertir, que el ángulo ventajoso, ú de mas fuerza $\lambda = 45° \pm \varepsilon$ no es tampoco el que mas conviene en caso de virar el Navío por delante, porque este ángulo, á causa de lo que el Tímon detiene al Navío, y disminuye la velocidad u, la disminuye mas que otro menor; pero haciendose preciso, por las razones dadas, que quede segun lo estilan los Marineros, es escusado que nos detengamos mas en esta materia.

CA-

CAPITULO 3.

Del Remo.

301 A Medida que el Remo parece simple, se ensalza ó eleva á mayor grado su theórica: no nos detendremos en explicar las muchas equivocaciones que en ella han padecido, no solo los antiguos, sino tambien los Geómetras modernos de la mayor reputacion, que escribieron despues de lo que ya habian dado sus predecesores. *(a)* *(b)* No nos detendremos

(*a*) *Mr. Bouguer*, en su *Tratado del Navío* (Lib. 1. Sec. 2. cap. 4. pag. 110.) pretende, que quanto mas corta sea la parte exterior del Remo, aumentando la pala á proporcion, para que su momento sea siempre el mismo, mayor será la velocidad de la Embarcacion: baxo este principio funda todo su cálculo, que por consiguiente ha de llevar consigo el mismo vicio. El motivo para aumentar la pala es creer que, por disminuir la parte exterior del Remo, no pudiera el Remero contrabalancear el momento de aquella, empleando este siempre un momento constante, á quien ha de ser igual el de la Pala; equivocacion que nace de no haber considerado dichos momentos sino como simples, y no como momentos de inercia, como efectivamente lo son. Que la pala sea grande ó chica, siempre el Remero equilibra su momento, porque este es el producto de la resistencia que padece la pala en el agua por su distancia al centro de rotacion del Remo, y la resistencia es como la velocidad de la misma pala: si esta fuere chica, moviendola con mas velocidad se aumenta el momento, sin necesidad de alterar su distancia al Tolete; y al contrario, si se disminuye esta, se aumenta el momento, sin alterar la pala, solo con moverla con mas velocidad: todo es notorio á los Marineros, y lo mismo al Geómetra que quiera considerarlo. Con el mismo Remo no se hace siempre uso de la misma pala: quando se pone menos porcion de esta en el agua, tiran los Remeros con mas velocidad, y al contrario: uno y otro modo de remar suelen ser buenos, aquel para quando hay calma de Mar y viento, y este para quando no la haya. La poca práctica hace caer de ordinario á los Geómetras en estas equivocaciones: ya veremos breve, que en el caso de una pala infinita en que quiere *Mr. Bouguer* que la velocidad del Barco fuera tambien infinita, está tan apartado de la verdad, como que esta será cero. A mas de esto, y de muchas atenciones precisas que omite, depende tambien su cálculo del principio en que se suponen las resistencias del Barco como los quadrados de las velocidades: y por consiguiente conduce á nuevas resultas no menos apartadas de la realidad que se busca.

(*b*) *Leonardo Eulero*, en las *Memorias de la Academia Real de Berlin*, Tom. 3. año 1747, trae la theórica del Remo con gran atencion, advierte la equivocacion de *Mr. Bouguer*, y añade muchas consideraciones precisas; funda su cálculo sobre el mismo principio de ser las resistencias del fluido como los quadrados de sus velocidades: y ademas, aunque atiende al peso del Remo como necesario, no es para substraerle de la fuerza que emplea el Remero, porque aquel peso le es de continua fatiga; solo hace uso de él en quanto que al remar produce una cantidad de momento, que, como veremos, se hace despreciable. Su determinacion sobre la longitud que deben tener la parte interior y exterior del Remo, resulta, sin excluir á mag-

mos tampoco en especular si le debemos considerar como palanca de uno de los tres generos explicados (*Def.*33. *Lib.*1. *Tom.* 1.), porque esto nada conduce á nuestro intento, que se reduce á exâminar sus fuerzas y efectos, sin separarnos de las mas exâctas leyes de mechânica, á fin de que no cayendo en errores, se puedan deducir con perfecto conocimiento las ventajas que resultan.

302 Se reduce el Remo, como diximos (§. 1), á Fig.41.
una pieza de madera ó palo AB, que apoyado, ó he- y 44.
cho firme sobre el bordo del Barco C, se tira de él por el extremo A, segun AE, arrastrando el otro B por el agua: la reaccion que la resistencia de esta comunica al Barco, impele á este, y le pone en marcha.

303 Las partes que en el Remo tenemos que considerar son: la interior, ó que cae á la parte de dentro del Barco AC, que los Marineros llaman *Guion*: la exterior CB, que en toda la porcion CD se alivia de madera lo mas que es posible: la pala DB, que es ancha y delgada, para que, aliviada de peso, cause su anchura ó mayor superficie mayor resistencia en el agua; y ultimamente, el punto F, que en la accion del Remo queda sin movimiento ó fixo, pues moviendose el guion hacia adelante, y la pala hacia atras, precisamente ha de haber un punto en el Remo que esté fixo, y que sobre él gire el todo, aunque no sea sino por aquella palada ó unico golpe.

304 Los momentos que en el Remo actuan son: 1° el que hace el Remero en el extremo del guion A, donde aplica sus fuerzas: 2° el que hace con sus pies ó cuerpo en direccion contraria, sobre el fondo del Bar-

magnitud de la pala, substituyendo su verdadero valor en cantidades que encierran la misma parte exterior: pues, como se verá despues, dada la fuerza que emplea el Remero, la velocidad con que mueve sus manos, y las longitudes de dichas partes interior y exterior del Remo, no puede quedar arbitra la pala; y si esta lo fuere, no puede serlo alguna de las otras cantidades, porque entre todas se forma una equacion que da la relacion entre ellas. Esto mismo se hallará en mas superior Obra del Autor, intitulada *Ciencia Navalis*.

Barco, ó sobre sus bancos, pues no hay accion sin igual y contraria reaccion (*Ax.*3. *Lib.*1. *Tom.*1.), cuyo efecto es el mismo que si actuase sobre el bordo del mismo Barco: 3° la resistencia del agua en el todo de la Embarcacion, que asimismo puede considerarse que actua en el propio bordo: 4° la resistencia ó fuerza que exerce la pala en el agua: 5° el peso del Remo que debe sostener el Remero, pues si el centro de gravedad de este se halla fuera del bordo, actua con momento que es preciso sufra el Remero: 6° la fuerza con que el agua sostiene la pala luego que se sumerge esta, que igualmente produce momento favorable al Remero: 7° el momento de inercia del Remo, que tambien tiene que vencer el Remero, y le escusaremos en el cálculo, porque al fin haremos ver lo poco que conduce; y 8° el momento de inercia del cuerpo del hombre ú hombres que reman, que añadió Eulero; y que aqui escusamos igualmente, porque el mismo que resulta moviendo su cuerpo hacia adelante, resulta en su movimiento contrario hacia atras, y se compensan mutuamente.

305 Sean pues:

a la longitud del guion, ú distancia desde el bordo al punto donde aplica su fuerza el Remero ú Remeros.

V la velocidad con que estos mueven sus manos.

K la cantidad de peso equivalente que debiera levantar el Remero con la velocidad V, para hacer la misma fuerza que exerce en el extremo del guion.

m la densidad del fluido.

u la velocidad del Barco.

mRu su resistencia en la Proa ú total.

x la distancia desde el bordo al punto inmovible del Remo.

b la distancia desde el bordo al punto donde se reunen las fuerzas ó resistencias de la pala.

V la velocidad de este mismo punto.

mrV la resistencia de cada una de las palas.

n el número de los Remos.

T el tiempo que pasa entre una palada y otra.

t el que emplean los Remeros en actuar cada palada.

G la distancia que hubiere desde el bordo al centro de gravedad del Remo.

P el peso del Remo.

e el espacio que ocupa la pala en el agua.

Con esto $\frac{GP}{a}$ será el peso que, por causa de la gravedad P del Remo, debe sostener el Remero: y $\frac{Meb}{a}$ el que le equilibra, por lo que el volumen Me de agua al remar sostiene la pala; de suerte, que el peso que deberá vencer el Remero, será $K - \frac{GP}{a} + \frac{meb}{a}$, que llamaremos k.

306 Aunque la fuerza con que actua el Remero ó Remeros, no sea sino kV, como, movido el Barco, la velocidad de las manos de aquel es $V+u$ la fuerza del extremo del guion, será $k(V+u)$, y su momento ó esfuerzo, $= k(a+x)(V+u)$, producto de $k(V+u)$, por la distancia $a+x$ que dista el extremo del guion del punto fixo en el Remo.

307 El momento que el Remero ó Remeros producen con los pies ó cuerpo, en direccion opuesta á la del Barco, será kux: y siendo la resistencia en la Proa del Barco mRu, la que tiene que vencer cada Remo será $\frac{mRu}{n}$; pero el tiempo que actua el Remo, no siendo sino t, necesita para vencer la resistencia en todo el tiempo T, que hay entre una y otra palada, vencer la resistencia $\frac{TmRu}{tn}$, y el momento $\frac{TmRxu}{tn}$.

308 La resistencia de la pala es mrV, y su momento $mrV(b-x)$: por lo que suponiendo que los

arcos que describan las manos de los Remeros, y el centro de las palas son cortos, y por consiguiente, que se mueven estos puntos paralelamente al Barco, á fin de evitar con esto la obliquidad con que era preciso consideraramos que actuarian de lo contrario, pues aun en la práctica se ve este modo de proceder, equilibrados todos estos momentos, tendremos $k(a+x)(V+u)$ $= kux + \frac{TmRxu}{tn} + mrV(b-x)$.

309 Para despejar las incognitas de esta equacion, Fig. 45. supuesto que el Remo AB pase á la situacion ab girando sobre el punto fixo F, de suerte que el C pase asimismo á c, tendremos los triángulos AFa, CFc, y BFb semejantes, que dan estas analogicas CF(x) : AF($a+x$) $=$ (Cc)u : Aa(V$+u$) : lo que da $x = \frac{au}{V}$: y --- CF(x) : FB($b-x$) $=$ (Cc)u : (Bb)$V = \frac{(b-x)u}{x}$. Estos valores, substituidos en la equacion, la reducen á $ak(V+u)^2 = kau^2 + \frac{TmRau^2}{tn} + \frac{mr(bV-au)^2}{a}$.

310 Esta fórmula sirve en todos casos: esto es, tanto en los del movimiento de la Embarcacion, como en el de reposo, ó primer instante de quererle empezar á tomar: en este es $u = 0$, y la fórmula queda en $a^2kV^2 = mrb^2V^2$, ó en $a^2k = mrb^2$: y como debe suponerse que siempre emplean los Remeros igual accion, ó la misma fuerza, se sigue, que en todos casos tendremos $a^2k = mrb^2$: ó $mr = \frac{a^2k}{b^2}$: de donde se deduce, que la r, y por consiguiente la magnitud de la pala de que debe usar el Remero, ó sumergir en el agua, no le es árbitra: depende de los valores de a y b, y de la fuerza k que en la accion empleare: si quisiere sumergir mas pala ha de aumentar la k; sin esto queda la otra constante. Subs-

311 Substituyendo, pues, este valor de mr en la ultima fórmula, quedará en $2akVu = \frac{TmRau^2}{tn} - \frac{a^2k}{b^2}u(2bV - au)$; ó partiendo por au, $2kV = \frac{TmRu}{tn} - \frac{ak}{b^2}(2bV - au)$, que da $u = \frac{2kV(a+b)}{\left(\frac{TmR}{tn} + \frac{a^2k}{b^2}\right)b}$ $= \frac{2kVtnb(a+b)}{TmRb^2 + a^2ktn}$, velocidad que debe tomar el Barco; ó substituyendo de nuevo el valor de $k = K - \frac{GP}{a} + \frac{meb}{a}$, será $u = \frac{2Vtnb(a+b)\left(K - \frac{GP}{a} + \frac{meb}{a}\right)}{TmRb^2 + a^2tn\left(K - \frac{GP}{a} + \frac{meb}{a}\right)}$.

312 Supongamos, por exemplo, un Bote con 15 Remos *pareles*, que llaman los Marineros á los que ván hermanados de dos en dos; y que sean $a = 4$, $b = 8$, $K = 30$, $GP = 24$, $me = 2$, $T = 3$, $t = 1$, $mK = 60$, (a) $n = 15$: y serán $k = 30 - 6 + 4 = 28$, y $u = \frac{56.15.8.12.V}{3.60.64 + 16.28.15} = \frac{48}{19}V$: luego si fuere $V = \frac{5}{2}$ pies por segundo, será $u = 6\frac{12}{19}$ pies por segundo, cuyo andar equivale á 4 millas por hora.

313 Si los Remeros se esforzaren por un rato, hasta hacer $K = 60$, y $V = 2$, serán $k = 60 - 6 + 4 = 58$, y $u = \frac{116.15.8.12.2}{3.60.64 + 16.58.15} = \frac{696}{53}$, cuyo andar equivale á 8 millas por hora.

314 Supongamos el mismo Bote con 9 Remos de pun-

(a) En un Bote de 37 pies de Eslora, y 8 de Manga es $R = \frac{90}{64}$: y multiplicando por 64, peso del agua, es $mR = 90$; de cuya cantidad se han de tomar (*Esc. Prop. 36. Lib. 2, Tom. 1.*) los dos tercios 60 para que quede la absoluta resistencia.

punta, que llaman los Marineros á los que tienen sus guiones mas largos, y casi del ancho de la Embarcacion: y sean $a = 7$, $b = 11$, $n = 9$, y las demas cantidades como antes; y será $u = \frac{56.9.11.18V}{3.60.121.+49.28.9} = 2\frac{876}{948}V$: luego si fuese $V = \frac{3}{2}$ pies por segundo, será $u = 4\frac{122}{316}$ pies por segundo, cuyo andar equivale á $2\frac{3}{5}$ millas por hora.

315 Si los Remeros se esforzaren por un rato hasta hacer $K = 60$, y $V = 2$, será $u = \frac{116.9.11.18.2}{3.60.121+49.58.9} = 7\frac{1}{10}$, cuyo andar equivale á $4\frac{2}{5}$ millas por hora.

316 Del valor de u hallado (§. 311) se sigue: 1°, que la velocidad del Barco será siempre proporcional á la velocidad V con que muevan sus manos, ó el guion los Remeros: 2°, que la misma velocidad aumentará si aumenta la fuerza k que emplearen los mismos, sin disminuir la velocidad V: 3°, que igualmente aumentará la misma velocidad, aumentando la razon $\frac{t}{T}$, y el numero de los Remos n; y ultimamente que disminuirá quanto mayor sea la resistencia mR de la Proa.

317 Todas estas consequencias son regularmente sabidas de los Marineros: falta que exâminemos ahora las que, á mas de aquellas, ofrecen las fórmulas. La cantidad $k = K - \frac{GP}{a} + \frac{meb}{a}$ puede aumentarse, no solo con la fuerza del Remero K, sino disminuyendo el momento GP; lo que se consigue de dos modos: 1° disminuyendo el peso de la parte exterior del Remo lo mas que sea posible, pues con ello no solo disminuye P, sino tambien G: y 2° aumentando el peso de la parte interior del Remo, ó el guion, pues de esta

sucr-

suerte, aunque aumente P, disminuye mucho mas la G, y puede por este medio llegarse al extremo de ser $GP - meb = 0$, con lo qual toda la fuerza del Remero K se empleará con utilidad. Los Marineros ya le dexan al guion mucha Madera, y reconocen que esto les es cómodo; pero no creo se hayan persuadido á que pueda contribuir á aumentar la velocidad del Barco: pudieran lograrla mayor poniendo algun peso al extremo del guion, como plomo embutido en la misma madera, aumentandole hasta tanto que sea $GP - meb = 0$, ó hasta tanto que puesta la pala en el agua como á lo regular, se halle el centro de gravedad en el punto C donde se apoya el Remo sobre el bordo del Barco. En tal caso será $k = K$, y tendrá todo el aumento posible sin perjuicio del Remero.

318 Supongamos en los exemplos antecedentes $GP - meb = 0$, ó $k = K$, y será $n = \frac{2KVtnb(a+b)}{TmRb^2 + aKtn}$

Substituyendo, pues, los valores dados en los Remos pareles, será $u = \frac{60.15.8.12.\frac{3}{2}}{3.60.64 + 16.30.15} = 6\frac{1}{1}\frac{2}{3}$ pies por segundo; cuyo andar equivale á $4\frac{10}{65}$ millas por hora: $\frac{10}{65}$ de milla mas que antes. Y en el caso de esforzarse los Remeros, será $u = \frac{120.15.8.12.2}{3.60.64 + 16.60.15} = 13\frac{1}{3}$ pies por segundo; cuyo andar equivale á 8 millas por hora: lo mismo que antes con corta diferencia.

319 De hallarse la cantidad kV, ó esfuerzo que emplea el Remero, en el numerador de la fórmula, quando en el denominador solo se ve la k, pudiera creerse que quanto mas aumentara la V, disminuyendo la k, mayor velocidad conseguiria el Barco; pero de suponer $k = 0$, queda igualmente cero dicha velocidad: luego es preciso que haya un valor de kV, que dé el máximo andar u. Para hallarle, es necesario su-

poner

poner que el Remero emplee siempre un mismo esfuerzo ó fatiga, y buscar la razon en que aumenta ú disminuye la velocidad V, por disminuir ó aumentar el peso K, pues determinada esta razon, se tendrá con facilidad el máximo que se busca. Supongamos que el hombre pueda suspender, ó casi estar para suspender, un peso Q, y no mas; y será la masa que debemos suponer puede tirar sin velocidad alguna. Supongamos tambien, que la mayor velocidad con que puede el mismo hombre mover sus manos, sin tirar peso alguno, sea de W pies por segundo: y respecto que á medida que disminuya la velocidad con que mueva sus manos, podrá levantar ó tirar mayor peso, será este como aquella disminucion de velocidad, y podremos formar esta equacion $\frac{W}{Q}=\frac{W-V}{K}$ que da $V=W\left(\frac{Q-K}{Q}\right)$; si fuere $K=0$, será $V=W$, y si fuere $V=0$, procederá de ser $K=Q$. Estos valores se han de medir segun el esfuerzo que quisieren hacer los Remeros: un hombre puede suspender *9* arrobas ó mas, y mover sus manos sin peso á *6* ó mas pies por segundo; pero solo por poco tiempo, no por horas, como necesitan emplearse los Remeros. Para una continuada fatiga será regular suponer $V=3\left(\frac{81-K}{81}\right)$ ú otra prudente expresion; pero en general tendremos siempre del mismo modo $V=W\left(\frac{Q-K}{Q}\right)$, expresando tanto W como Q las cantidades que regularmente sean suportables por mucho tiempo.

320 Substituyendo, pues, este valor de V en el hallado *u*, tendremos $u=\frac{2Ktnb(a+b)W(Q-K)}{Q(TmRb^2+a^2Ktn)}$, cuya diferencial, suponiendo K variable, igualada á cero, nos dará el valor máximo de K con que ha de actuar el Re-

Remero, para producir la mayor velocidad del Barco. Tendremos, pues, $(Q-2K)(TmRb^2+a^2Ktn)=-a^2tnK(Q-K)$, que da $a^2tnK^2+2TmRb^2K=TmRb^2Q$, cuya raiz es $K=-\frac{TmRb^2}{a^2tn}\pm\frac{TmRb^2}{a^2tn}\left(1+\frac{a^2tnQ}{TmRb^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

321 Supongamos ahora $Q=81$, y las demas cantidades como las supusimos para los Remos pareles: esto es, $T=3$, $t=1$, $a=4$, $b=8$, $mR=60$; y $n=15$; y será proxîmamente $K=31$: y supuesta $W=3$, será $V=3\left(\frac{81-31}{81}\right)=1\frac{5}{6}$: de suerte, que el Remero ha de tirar el peso de 31 libras con la velocidad de $1\frac{5}{6}$ pies por segundo. El valor de u será en tal caso $=\frac{62.1\frac{3}{6}.15.8.12}{3.60.64+16.32.15}=8\frac{5}{8}$ pies por segundo, que equivalen á $5\frac{5}{7}$ millas por hora, con corta diferencia.

322 Para el caso en que los Remeros quieran esforzarse por un corto rato, podemos poner $V=4\left(\frac{180-K}{180}\right)$, ó $Q=180$, y será proxîmamente, $K=54$, y $V=2\frac{4}{5}$: lo que da $u=\frac{108.2\frac{4}{5}.15.8.12}{3.60.64+16.54.15}=17\frac{4}{5}$ pies por segundo, cuyo andar equivale á $10\frac{2}{3}$ millas por hora.

323 Para los Remos de punta, en que supusimos $a=7$, $b=11$, $n=9$, $T=3$, $t=1$, y $mR=60$; siendo $Q=81$, se tendrá proxîmamente, $K=31$: y supuesta $W=3$, será $V=3\left(\frac{81-31}{81}\right)=1\frac{5}{6}$, con lo que se tiene $u=\frac{62.1\frac{5}{6}.9.11.18}{3.60.121+49.31.9}=5\frac{4}{7}$ pies por segundo, cuyo andar equivale á $3\frac{3}{7}$ millas por hora.

324 Queriendose esforzar los Remeros por un ra-

rato, hemos de poner $Q = 180$: lo que da proxîmamente $K = 57$, y $V = 4\left(\frac{180-57}{180}\right) = 2\frac{13}{18}$, y $u = \frac{114 . 2\frac{13}{18} . 9 . 11 . 18}{3 . 60 . 121 + 49 . 57 . 9} = 11\frac{4}{5}$ pies por segundo, cuyo andar corresponde á $7\frac{2}{15}$ millas por hora.

325 En las velocidades grandes, quando se esfuerzan los Remeros, era preciso atender á la resistencia que procede de la desnivelacion del fluîdo, pues la que hemos supuesto $mR = 60$ solo corresponde á la resistencia, que es como las sîmples velocidades; pero aun en el caso en que hemos hallado la velocidad $u = 17\frac{4}{5}$ no resulta de aumento en el 60 por causa de la desnivelacion sîno $3\frac{1}{5}$, y por él los $17\frac{4}{5}$, quedarán en $17\frac{7}{20}$: de suerte, que las $10\frac{2}{3}$ millas por hora que correspondia andar, solo fueran $10\frac{2}{5}$: esto es, $\frac{4}{15}$ de milla menos. En los demas casos regulares, esta diferencîa es mucho menor, y puede omitirse por no confundir mas el cálculo.

326 Los valores de a y b ofrecen tambîen otra máxîma velocidad: haciendo $b = 0$, será igualmente cero la velocidad u, y sî la aumentamos mucho, llegará á ser negativo el valor de K, y con él la misma velocîdad. La cantidad a ha de resultar de la disposicion mas cómoda para el Remero, y de la anchura de la Embarcacîon: quando mas horizontal esté el Remo, quedando el guion á la altura del pecho del Remero, mas facîlmente le manejará; pero para que quede horizontal se hace precîso que tanto a como b tengan suficîente longitud, á lo menos la prîmera ha de tener toda la posible: las medîdas que se le pueden dar se reducen á dos, pues ó ha de ser de la mitad del ancho de la Embarcacîon, para usar de los Remos pareles, ó ha de tener casî todo el ancho para usar de los de punta; pero en esta ocasîon se dismînuye por mitad el numero de los Remos. No es menester mucha atencion

cion para reconocer que la primera disposicion es la mas ventajosa, siempre que el Buque no sea pequeño: supongamos tener ya hallada la relacion que ha de haber entre b y a, y que sea $b = ha$, siendo h una constante ú dependiente de n en la fórmula $u = \frac{2KVtnb(a+b)}{TmRb^2+a^2Ktn}$, y quedará $u = \frac{2KVtn(1+h)h}{TmRh^2+Ktn}$: donde se ve, que qualquiera valor que tenga la h, aunque dependa de n, como esté esta en el numerador de la expresion, como se verá despues, siempre será mayor la velocidad u quanto mayor fuere el numero de los Remos; pero esta disposicion no debe tener lugar en Embarcaciones muy pequeñas, porque la duplicidad de la gente es demasiado peso para ellas, aumenta mucho la resistencia de Proa mR, y esta disminuye la velocidad u; suele con todo tener lugar quando un solo Remero tira dos Remos.

327 De qualquiera suerte que sea, ya sabemos que la a ha de tener de longitud la mitad del ancho de la Embarcacion, ó todo el ancho entero. Sabemos tambien que esta parte ha de estar lo mas sobrecargada de peso que fuere posible, á fin de contrapesar la exterior: con que solo nos queda que exâminar la relacion que han de tener entre sí a y b, supuesta la primera constante ú dada. Considerando, pues, b como variable, diferenciemos la equacion $u = \frac{2KVtnb(a+b)}{TmRb^2+a^2Ktn}$ para igualar su diferencial á cero, y será - - - - - - - $(a+2b)(TmRb^2+a^2Ktn) = 2TmRb^2(a+b)$, que da $\frac{b}{a} = \frac{Ktn}{TmR} \pm \frac{Ktn}{TmR}\left(1+\frac{TmR}{Ktn}\right)^{\frac{1}{2}}$, y es la relacion mas ventajosa que ha de haber entre b y a para conseguir la máxima velocidad u; pero baxo el supuesto de que la parte exterior del Remo estará equilibrada con la interior.

328 No puede, pues, ser constante esta relacion: depende de K, fuerza que empleen los Remeros, y de $\frac{t}{T}$, cantidades sumamente variables: quanto mayores fueren estas, asi como el numero de los Remos n, mayor debe ser b, respecto de a; y al contrario, menor quanto mayor fuere la resistencia mR. En Embarcaciones semejantes es mR (§.188) como las raices quadradas de las quintas potestades de las dimensiones lineares de aquellas, y n como simplemente dichas dimensiones: de suerte, que la mayor Embarcacion necesita menor b, ó mas corta la parte exterior del Remo, respecto de la interior.

329 Pongamos $K = 31$, $T = 3$, $t = 1$, $n = 15$, $mR = 60$, como hicimos en el exemplo del Bote con los Remos pareles (§.321), y será $\frac{b}{a} = \frac{31.15}{3.60} + \frac{31.15}{3.60}\left(1 + \frac{3.60}{31.15}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{31}{12} + \frac{31}{12}\left(1 + \frac{12}{31}\right)^{\frac{1}{2}}$, ó proximamente $\frac{b}{a} = 5\frac{5}{8}$: de suerte, que si ponemos $a = 4$, como en el mismo exemplo, será $b = 22\frac{1}{2}$. Substitúyase este valor en la equacion $u = \frac{2KVtnb(a+b)}{TmRb^2 + a^2Ktn}$ con $V = 1\frac{5}{6}$, y será $u = \frac{62.1\frac{5}{6}.15.22\frac{1}{2}.26\frac{1}{2}}{3.60(22\frac{1}{2})^2 + 16.31.15} = 10\frac{12}{13}$ pies por segundo, que equivalen á $6\frac{2}{3}$ millas por hora: $1\frac{1}{3}$ millas mas que en dicho exemplo.

330 Pero esto es sin atender al otro máximo que depende del valor de K: para comprehender ambos, es preciso despejar una de las dos incognitas K ó b, por medio de las mismas equaciones que dieron los valores máximos de estas cantidades. De la equacion (§. 327), $(a+2b)(TmRb^2 + r^2Ktn) = 2TmRb^2(a+b)$, re-

sulta $K = \frac{TmRb^2}{atn(a+2b)}$. Substituyendo este valor en la $a^2tnK^2 + 2TmRb^2K = TmRb^2Q$ (§. 320.), tenemos $aTmRb^2 + 2TmRb^2(a+2b) = Qatn(a+2b)^2$: y despues de despejar, y haber ordenado, - - - - -

$$\left.\begin{matrix} +\frac{3}{4}ab^2 \\ b^3 \\ -\frac{Qatn}{TmR}b^2 \end{matrix}\right. - \frac{Qtna^2}{TmR}b - \frac{Qtna^3}{4TmR} = 0.$$ La raiz positiva de esta equacion, dará el valor máxîmo de b, con, igualmente, el máxîmo de $K = \frac{TmRb^2}{tn(a^2+2b)}$.

331 Volvamos, pues, á los Remos pareles, y caso de la fatiga, en que hicimos $Q=81$, $a=4$, $T=3$, $t=1$, $n=15$, $mR=60$, y se reducirá la equacion á $b^3 - 24b^2 - 108b - 108 = 0$, cuya raiz positiva es proxîmamente $b=28$, $5\frac{1}{2}$ pies mas que antes. El valor de K es $= \frac{3.60.28.28}{4.15.60} = 39\frac{1}{5}$: y substituyendo en la equacion $V = 3\left(\frac{81-K}{81}\right)$, da $V = 1\frac{54}{100}$. Estos tres valores colocados en $u = \frac{2KVtnb(a+b)}{TmRb^2 + a^2ktn}$, producen $u = \frac{78\frac{2}{5}.1\frac{54}{100}.28.15.32}{3.60.28.28+16.39\frac{1}{6}.15} = 10\frac{78}{100}$ pies por segundo, que equivalen á $6\frac{1}{2}$ millas por hora, poco mas que en el exemplo antecedente.

332 Pero todas estas ventajas resultan baxo el supuesto de estar equilibradas la parte interior y exterior del Remo : y bien se ve la imposibilidad de conseguirlo, siendo $b=28$; solo pudiera lograrse haciendo todo el guion de hierro, uniendole ó empalmandole despues al resto del Remo; pero en tal caso pesaria cada guion dos quintales, y el Bote estubiera

sobre-

sobrecargado de 30, los quales producirian la resistencia $mR=64$, en lugar de 60 que antes teniamos: y muy léxos de aumentar la marcha, la disminuyera de $\frac{1}{8}$ millas por hora, quedando en solo $6\frac{1}{8}$. Estas mismas las produce proxîmamente un Remo ordinario todo me madera con $b=9$, cuya longitud puede equilibrarse muy bien engrosando el guion al modo que lo usan los Ingleses: y asi es escusado aquel excesivo contrapeso. Bien se ve con esto, que qualquiera otra longitud mayor que $b=9$ fuera perjudicial por necesitar contrapeso; y aun sin él sucede lo mismo.

333 Para el exâmen de esto nos es preciso buscar los ventajosos valores de K y de $\frac{b}{a}$, no en la equacion $u=\frac{2KVtnb(b+a)}{TmRb^2+a^2Ktn}$ que corresponde al solo caso en que el Remo este equilibrado, sino en la general

$$u=\frac{2Vtnb(a+b)\left(K-\frac{GP}{a}+\frac{meb}{a}\right)}{TmRb^2+a^2tn\left(K-\frac{GP}{a}+\frac{meb}{a}\right)};$$

ó substituyendo el valor de $V=\left(\frac{Q-K}{Q}\right)W$ en la $u=\frac{2Wtnb(a+b)}{Q}$.

$$\frac{(Q-K)\left(K-\frac{GP}{a}+\frac{meb}{a}\right)}{TmRb^2+a^2tn\left(K-\frac{GP}{a}+\frac{meb}{a}\right)}.$$

Pongamos ahora, para mayor facilidad, $\frac{GP-meb}{a}=A$, y supuesta K variable, sáquese su diferencial é igualese á cero; que dará $K^2+2\left(\frac{TmRb^2}{a^2tn}-A\right)K=\frac{TmRb^2}{a^2tn}(Q-A)-A^2$: equacion de que resulta el valor ventajoso K, de que se debe usar. Este se debe substituir en el de u, y dife-

ferenciar de nuevo suponiendo la b variable, para deducir una equacion que asimismo de el valor ventajoso de b; ó sin substituir el valor ventajoso de K en el de u, diferenciar este, respecto de la b variable, é igualar las dos diferenciales. De qualquiera manera, las resultas son de una equacion dilatadisima, que podemos escusar, diciendo: que con solo aumentar el valor hallado de $b = 9$ de un pie: esto es, suponer $b = 10$, resulta $\frac{GP - meb}{a} = A = 3$, cuya cantidad substituida con $Q = 81$, $mR = 60$, $T = 3$, $t = 1$, $a = 4$, y $n = 15$, como antes, en la equacion $K^2 + 2\left(\frac{TmRb^2}{a^2tn} - A\right)K = \frac{TmRb^2}{a^2tn}(Q - A) - A^2$, da $K = 33$, y $V = 3\left(\frac{81 - 33}{81}\right)$: cantidades que substituidas en el valor de $u = \frac{2Vtnb(a+b)\left(K - \frac{GP}{a} + \frac{meb}{a}\right)}{TmRb^2 + a^2tn\left(K - \frac{GP}{a} + \frac{meb}{a}\right)}$, resulta $u = 8\frac{3}{4}$ pies por segundo, que equivalen á $5\frac{1}{4}$ millas por hora, cerca de una milla menos que con $b = 9$, estando equilibrado el Remo: y asi esta es su disposicion mas ventajosa: esto es, el Remo se ha de reducir á equilibrar con sola su madera la parte exterior con la interior, en cuyo caso será proximamente $b = \frac{9}{4}a$; á menos que la equacion

$$b^3 \begin{matrix} + \frac{3}{4}ab^2 \\ - \frac{Qatn}{TmR}b^2 \end{matrix} - \frac{Qa^2tn}{TmR}b - \frac{Qa^3tn}{VTmR} = 0,$$

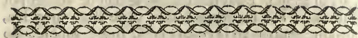
no dé menor valor á la b; pues en tal caso es preciso sujetarse á este, y equilibrar el Remo, disminuyendo el grueso del guion. El valor de K será (§. 320.) = - - - - - - -

$-\frac{TmRb^2}{a^2tn}+\frac{TDRb^2}{a^2tn}\left(1+\frac{a^2tnQ}{TmRb^2}\right)^{\frac{1}{2}}$: el de V (§. 319.) $=W\left(\frac{Q-K}{Q}\right)$, y el de $u=\frac{2KVtnb(a+b)}{TmRb^2+a^2Ktn}$.

334 En una Galera de 40 Remos, es $mR=640$, la longitud del guion de 12 pies; pero la distancia desde el apoyo hasta el centro de las fuerzas de los hombres solo $=9$, porque los 5 que hay en cada Remo ocupan $7\frac{1}{2}$ pies de guion: $T=4$, $t=1$, $Q=405$, que es el producto de 81 por 5, y W, como antes, $=3$. Con esto la equacion que da el valor de b, se reduce á $b^3-50b^2-513b-1156=0$, que da b de cerca de 60 pies: y siendo esta longitud mayor que $\frac{9}{4}.12=27$, esta debe ser la distancia desde el apoyo al centro de las palas $=b$. Con ello la equacion, que da el valor de K, quedará en $K=-64.9+64.9\left(1+\frac{9.5}{64}\right)^{\frac{1}{2}}=180$, y tendremos $V=3\left(\frac{405-180}{405}\right)=1\frac{2}{3}$: de que resulta $u=\frac{360.1\frac{2}{3}.40.27.36}{4.640.27.27+81.180.40}=9\frac{1}{2}$ pies por segundo, que serán los que andará la Galera, y equivalen á $5\frac{7}{15}$ millas por hora.

335 Ya no nos queda, para dar fin á este asunto, sino manifestar, como prometimos (§. 304.) que la inercia del Remo en el movimiento de él, se hace despreciable en el cálculo. Para esto, supuesto que sea π el peso de la parte exterior del Remo, y g la distancia desde el centro de gravedad de ella hasta el apoyo, podemos representar por $\frac{g^2\pi V}{fa}$ su inercia: y del mismo modo $\frac{h^2\Pi V}{Fa}$ será la de la interior si Π denota su peso, y h la distancia desde su cenrro de gravedad has-

hasta el apoyo. Estas dos fuerzas se han de vencer por el Remero, con las demas á que ya se hizo atencion, introduciendolas en la equacion (§. 309): suponiendo pues $\left(\frac{g^2\pi}{fa}+\frac{h^2\Pi}{Fa}\right)V=P$, será la equacion $2akVu=\frac{TmRau^2}{tn}-\frac{a^2ku}{b^2}(2bV-au)+P$, que se reduce á $u=\frac{kVtnb(b+a)}{TmRb^2+a^2ktn}\left(1+\left(1-\frac{P(TmRb^2+a^2ktn)}{k^2V^2tna(b+a)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$, ó á $u=\frac{kVtnb(b+a)}{TmRb^2+a^2ktn}\left(2-\frac{P(TmRb^2+a^2ktn)}{2k^2V^2tna(b+a)^2}\right)$; pero $\frac{2kVtnb(b+a)}{TmRb^2+a^2ktn}$ es el valor de u que antes hallamos: luego, llamando este w, tambien será $u=w-\frac{Pb}{kVa(b+a)w}$, por lo que la diferencia de u á w, ó $w-u=\frac{Pb}{kVa(b+a)w}=\frac{b\left(\frac{g^2\pi}{f}+\frac{h^2\Pi}{F}\right)}{ka^2(b+a)w}$; pero $\left(\frac{g^2\pi}{f}+\frac{h^2\Pi}{F}\right)$ es proxîmamente $=\frac{1}{5}a^2k$: luego será $w-u=\frac{b}{5(b+a)w}$, ó poniendo $b=\frac{9}{4}a$, $w-u=\frac{9a}{20aw}=\frac{9}{20w}$; de suerte, que siendo $w=9$, será $w-u=\frac{1}{20}$ de pie: cantidad despreciable.



LIBRO QUARTO.

De las acciones y movimientos del Navío.

CAPITULO PRIMERO.

Del andar ó movimiento progresivo que da al Navío el impulso del viento en las Velas: y del rumbo que le obliga á seguir.

336. TRes son los movimientos progresivos, que hemos de distinguir en el Navío: uno que se dirige segun la Quilla, que llamaremos directo: otro, segun la perpendicular á esta, que llamaremos lateral; y el tercero, que será el compuesto de los dos antecedentes, y por consiguiente el verdadero rumbo que siga el Navío, que llamaremos obliquo. Con estos tres movimientos tenemos suficiente conocimiento para determinar el andar, y derrota que sigue el Navío; pero sin embargo es preciso atender á otro, quizás el mas esencial, que es el que los Marineros llaman *salida á barlovento*: esto es, movimiento con que se dirige la Nave directamente hacia el viento, pues aunque resulta de los otros, no procede solo del mayor ó menor movimiento directo, sino de la combinacion de este con el lateral. Todos estos movimientos resultan de la fuerza que á la Nave comunican las Velas, su Buque, sus Xarcias, y demas sobre que actua el viento, como asimismo la fuerza de las olas, y de las corrientes de las aguas; pero en este Capítulo solo nos,

nos dedicamos á determinar los que resultan de la accion de las Velas. Casi todos los Autores que sobre esto han tratado, á excepcion de algunos (*M.M.Parent y Jacobo Bernoulli*) ademas del falso principio sobre las resistencias en que se han fundado, han supuesto que la velocidad del viento es infinita respecto á la que toma el Navío, llevados naturalmente de lo que con ello se facilita el cálculo; pero esta suposicion está tan sumamente apartada de la realidad, como que en los Capítulos sucesivos se verá, con grande admiracion, que el Navío puede, bien dispuestas sus Velas, tomar, y aun toma una velocidad casi igual á la del mismo viento que le impele. Es verdad que se demostrará, y que las experiencias ratifican, manifestando el error de lo que hasta ahora se ha creído, particularmente de la enorme velocidad que era preciso atribuirle al viento para concertar las resultas que producian los cálculos.

337 La fuerza que hace el viento en las Velas, segun la direccion de la Quilla, despues de haber puesto el Navío en movimiento, y dadole toda la velocidad directa posible, se equilibra con la resistencia directa del agua en la Proa: lo mismo sucede con la velocidad lateral, de que resultan dos equaciones, que son las que nos han de producir los conocimientos que buscamos: la primera se halló (§§.272. y 280.) $= \frac{1}{16} mVA^2 G\, sen.\alpha\, sen.^2(\beta - \delta)$; pero esta fuerza no subsiste sino en tanto que está el Navío ó sus Velas paradas: luego que se mueven disminuye, porque la velocidad relativa del viento sobre la Vela disminuye asimismo de toda la que toma el mismo Navío segun la propia direccion. Represente QN la Quilla, Q la Popa, y N la Proa: HI la Verga, KE la direccion del viento, y EF la obliqua que tome el Navío. Báxese desde F la perpendicular FN, y si EF representare la velocidad obliqua del Navío, EN representará la di- Lam.9. Fig.46.

 recta,

recta, y FN la lateral: de suerte, que las tres líneas EF, EN, y FN serán entre sí como dichas tres velocidades. Tírese tambien la GNT perpendicular á la Vela, como asimismo la KI: y si KE representare la velocidad absoluta del viento V, $KI = V sen.\alpha$ será aquella con que cae perpendicularmente sobre la Verga estando parada; pero tirada FG paralela á la misma, es TG la velocidad que, segun la perpendicular á la Verga, toma esta: luego la velocidad relativa con que hiere el viento á la Verga perpendicularmente, será $KI - TG = V sen.\alpha - TG$, y es de la que hemos de hacer uso en lugar de solo $V sen.\alpha$.

338 Para hallar esta velocidad, sean:

A^2 el area de todas las Velas.
V la velocidad del viento.
u la velocidad directa del Navío.
v la velocidad lateral.
w la velocidad obliqua.
W la velocidad con que sale á barlovento.
α el ángulo que forma el viento con la Verga.
β el ángulo que formare la Verga con la Quilla.
γ el ángulo que formare el viento con la Quilla.

Con esto, siendo β el ángulo NET, y $EN = u$, será $NT = u sen.\beta$: y por la semejanza de los triangulos NET, FNG, $NG = v cos.\beta$, por ser $FN = v$: luego $NT + NG = TG = u sen.\beta + v cos.\beta$: por lo que la velocidad con que hiere el viento á la Verga perpendicularmente, será $V sen.\alpha - u sen.\beta - v cos.\beta$, y la fuerza que hace la Vela segun la Quilla $=$ (§. 337.) $\frac{1}{20} m A^2 G sen.(\beta - \delta)(V sen.\alpha - u sen.\beta - v cos.\beta)$. Esta fuerza es á la que exerce lateralmente (§. 272.) como $sen.(\beta - \delta)$ á $cos.(\beta - \delta)$: luego la fuerza lateral con que actuan las Velas, será $= \frac{1}{20} m A^2 G cos.(\beta - \delta)(V sen.\alpha - u sen.\beta - v cos.\beta)$.

339 Las fuerzas ó resistencias que padece el Navío, tanto por la Proa, ó directamente, como por el cos-

costado, ó perpendicularmente, las tenemos halladas (*Cap.* 5. *Lib.* 2.); pero para seguir el cálculo con generalidad, supondremos aquella $= mru$, y esta $= mRv$, expresando r y R las cantidades allí halladas. Con esto tendremos estas dos equaciones $mru = \frac{1}{20}mA^2G\,sen.(\beta-\delta)(V\,sen.\alpha - u\,sen.\beta - v\,cos.\beta)$, y $mRv = \frac{1}{20}mA^2G\,cos.(\beta-\delta)(V\,sen.\alpha - u\,sen.\beta - v\,cos.\beta)$. La primera da $v = \frac{GA^2\,sen.(\beta-\delta)(V\,sen.\alpha - u\,sen.\beta) - 20ru}{GA^2\,sen.(\beta-\delta)cos.\beta}$,

y la segunda $v = \frac{GA^2\,cos.(\beta-\delta)(V\,sen.\alpha - u\,sen.\beta)}{GA^2\,cos.(\beta-\delta)cos.\beta + 20R}$: luego será $\frac{GA^2\,sen.(\beta-\delta)(V\,sen.\alpha - u\,sen.\beta) - 20ru}{GA^2\,sen.(\beta-\delta)cos.\beta} = \frac{GA^2\,cos.(\beta-\delta)(V\,sen.\alpha - u\,sen.\beta)}{GA^2\,cos.(\beta-\delta)cos.\beta + 20R}$, que da $u = \frac{GA^2RV\,sen.\alpha\,sen.(\beta-\delta)}{GA^2(R\,sen.(\beta-\delta)sen.\beta + r\,cos.(\beta-\delta)cos.\beta) + 20Rr} = \frac{GA^2RV\,sen.\alpha\,sen.(\beta-\delta)}{GA^2(R-r)sen.\beta\,sen.(\beta-\delta) + r(GA^2\,cos.\delta + 20R)}$, es la velocidad directa que debe tomar el Navío. Si su valor lo substituimos en qualquiera de los valores de v, tendremos $v = \frac{GA^2rV\,sen.\alpha\,cos.(\beta-\delta)}{GA^2(R-r)sen.\beta\,sen.(\beta-\delta) + r(GA^2\,cos.\delta + 20R)}$ es la velocidad lateral que asimismo debe tomar el Navío.

340 Tendremos, pues, $\frac{v}{u} = \frac{r\,cos.(\beta-\delta)}{R\,sen.(\beta-\delta)} = \frac{r}{R\,tang.(\beta-\delta)}$: y como esta relacion $\frac{v}{u}$, ó $\frac{FN}{NE}$ expresa la tangente del ángulo FEN que llaman los Marineros de la deriva; si á este ángulo llamamos θ, será $tang.\theta = \frac{r}{R\,tang.(\beta-\delta)}$.

Res-

341 Respecto que las dos velocidades u y v son como $R\,sen.(\beta-\delta)$ á $r\,cos.(\beta-\delta)$, si se expresaren por estos mismos valores, $\left(R^2 se.(\beta-\delta)^2+r^2 cos.(\beta-\delta)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ expresará la velocidad obliqua w, y serán $R\,sen.(\beta-\delta)$ á $\left(R^2 sen.(\beta-\delta)^2+r^2 cos.(\beta-\delta)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, como ------
$$\frac{A^2GRV\,sen.\alpha sen.(\beta-\delta)}{GA^2(R-r)sen.\beta sen.(\beta-\delta)+r(GA^2cos.\delta+2oR)} \text{ á } w=$$
$$\frac{GA^2V\,sen.\alpha(R^2 sen.(\beta-\delta)^2+r^2cos.(\beta-\delta)^2)^{\frac{1}{2}}}{GA^2(R-r)sen.\beta sen.(\beta-\delta)+r(GA^2cos.\delta+2oR)}.$$

342 Para hallar la velocidad W con que se sale á barlovento, que es la unica que nos falta, si representa Fig.47. KE la direccion del viento, FN la velocidad directa, y NF la lateral: levantando EX, perpendicular á la direccion KE, que los Marineros llaman *perpendicular del viento*, tirando NX paralela á la misma direccion, y perpendicular á esta la FG; XG representará la velocidad con que se sale á barlovento. Para hallar NX, tenemos el triángulo rectángulo NEX, en que el ángulo en N es γ, por ser igual á NEK, y EN $=$
$$\frac{GA^2RV\,sen.\alpha sen.(\beta-\delta)}{GA^2(R-r)sen.\beta sen.(\beta-\delta)+r(GA^2cos.\delta+2oR)}$$
velocidad directa: luego NX $=$ -------------
$$\frac{GA^2RV\,cos.\gamma sen.\alpha sen.(\beta-\delta)}{GA^2(R-r)sen.\beta sen.(\beta-\delta)+r(GA^2cos.\delta+2oR)}.$$
Con igual proceder, en el triángulo NFG, semejante al antecedente, y en que es NF $=$ -----------
$$\frac{GA^2rV\,sen.\alpha cos.(\beta-\delta)}{GA^2(R-r)sen.\beta sen.(\beta-\delta)+r(GA^2cos.\delta+2oR)}$$
velocidad lateral, tenemos NG $=$ -------------
$$\frac{GA^2rV\,sen.\gamma sen.\alpha cos.(\beta-\delta)}{GA^2(R-r)sen.\beta sen.(\beta-\delta)+r(GA^2cos.\delta+2oR)}$$
: luego

XG$=$

$$XG = NX - NG = W = \frac{GA^2 V \,sen.\alpha (R\,cos.\gamma\, sen.(\beta - \delta) - r\, sen.\gamma\, cos.(\beta - \delta))}{GA^2 (R - r)\, sen.\beta\, sen.(\beta - \delta) + r(GA^2 cos.\delta + 2 o R)}.$$

343 De todos estos valores de las velocidades, para mayor facilidad, podemos despejar el ángulo α, substituyendo el valor de su seno en los de γ y β: porque respecto que es $\gamma = \alpha + \beta$, tenemos $sen.\alpha = sen.\gamma\, cos.\beta - cos.\gamma\, sen.\beta$: y serán

$$u = \frac{GA^2 RV\, sen.(\beta - \delta)(sen.\gamma\, cos.\beta - cos.\gamma\, sen.\beta)}{GA^2 (R - r)\, sen.\beta\, sen.(\beta - \delta) + r(GA^2 cos.\delta + 2 o R)}.$$

$$v = \frac{GA^2 r V\, cos.\beta - \delta)(sen.\gamma\, cos.\beta - cos.\gamma\, sen.\beta)}{GA^2 (R - r)\, sen.\beta\, sen.(\beta - \delta) + r(GA^2 cos.\delta + 2 o R)}.$$

$$w = \frac{GA^2 V (R^2 sen(\beta - \delta)^2 + r^2 cos.(\beta - \delta)^2)^{\frac{1}{2}} (sen.\gamma\, cos.\beta - cos.\gamma\, sen.\beta)}{GA^2 (R - r)\, sen.\beta\, sen.(\beta - \delta) - r(GA^2 cos.\delta + 2 o R)}.$$

$$W = \frac{GA^2 V (R\, cos.\gamma\, se.(\beta - \delta) - r\, se.\gamma\, cos.(\beta - \delta))(se.\gamma\, cos.\beta - cos.\gamma\, se.\beta)}{GA^2 (R - r)\, sen.\beta\, sen.(\beta - \delta) + r(GA^2 cos.\delta + 2 o R)}.$$

344 Para que estas velocidades puedan servirnos, tanto para el caso en que se navegue á viento largo, como de bolina, se debe advertir, que si $cos.\gamma$ es negativo en el caso de bolina, como se ha puesto en los mismos valores, en el caso de viento largo es positivo: por consiguiente, con solo mudar el signo donde se halle, se tendrá este caso: bien entendido que, para evitar confusiones, llamaremos ir de bolina á qualquiera caso en que el ángulo γ sea agudo por la parte de Proa, ó en que sea menor que 90°; y ir á viento largo, quando sea mayor: de esta suerte, quando sea $\gamma = 90^\circ$, será $cos.\gamma = 0$: y si fuere $\gamma = 180^\circ$, que es el caso en que se navegue á Popa, será $cos.\gamma = 1$.

345 El primer conocimiento que nos ofrecen estas fórmulas es, que todas quatro velocidades fueran en razon directa de la del viento V, supuesta una misma cantidad y disposicion del aparejo, si por variar la V,

no

no variasen igualmente la $G = \frac{sen.\frac{1}{2}(\Pi - \pi)}{Ar.\frac{1}{2}(\Pi - \pi)}$, y $\delta = \frac{1}{2}(\Pi + \pi) - a$. Aumentando la V, aumenta la Π (§. 269) y disminuye la π, con que disminuye asimismo la G: y por aumentar Π en mayor razon que disminuye π, aumenta δ: luego por ambas razones debe disminuir la u del valor que tubiera sin estas alteraciones; y por consiguiente no puede aumentar en la propia razon que la V. Lo mismo se debe entender de las velocidades obliqua w, y con que sale á barlovento W; pero la lateral v, al contrario, aumenta en mayor razon.

346 Igualmente variando el valor de G y δ por la distinta curvidad de la Vela, y esta por la tension y calidad del lienzo (§. 265), se sigue, que quanto mas fuerte ó tupida sea la Vela, esto es, menos dispuesta á tomar gran curvatura, y mas tendida ó tirante esté, mayores serán las velocidades directa, obliqua, y con que se sale á barlovento; y menor la lateral.

347 Como la R multiplica todo el numerador en la velocidad directa, y no todo el denominador: y asimismo por hallarse la r solo en este; quanto mayor fuere la relacion $\frac{R}{r}$, tanto menor será esta velocidad: y en aquella con que se sale á barlovento, disminuye el numerador y aumenta el denominador, al paso que aumenta la r; luego será tanto menor, quanto mayor sea r: de suerte, que si fuere $r = \frac{R cos.\gamma sen.(\beta - \delta)}{sen.\gamma cos.(\beta - \delta)} = \frac{R tang.(\beta - \delta)}{tang.\gamma}$, el Navío no podrá ganar barlovento alguno: ó lo que es lo mismo, para que le pueda ganar es preciso que sea $tang.(\beta - \delta) > \frac{r}{R} tang.\gamma$.

348 Por multiplicar el Velamen A^2 al todo de los numeradores, quando no el de todos los denominadores, quanta mas Vela se alargue, tanto mayores

serán

serán en general las quatro velocidades. La directa y obliqua llegan al extremo, sino en el Navío, en otras Embarcaciones, de ser iguales y aun mayores que la del viento. Para ello es menester que el coeficiente en el numerador $GA^2R\,sen.\alpha\,sen.(\beta-\delta)$ sea igual ó mayor que el denominador $GA^2(R-r)sen.\beta\,sen.(\beta-\delta)$ $+r(GA^2cos.\delta+20R)$. Pongamos para facilitar la reduccion $\alpha=90^\circ$, á fin de que, siendo (§. 270) $\delta=\frac{1}{2}(\Pi+\pi)-\alpha$, sea (§.274) $\delta=0$: y quedará la verificacion de lo propuesto en solo haber de ser $GA^2R\,sen.\beta$ igual ó mayor que $GA^2R\,se.\beta^2+GA^2r\,cos.\beta^2$ $+20Rr$; ó A^2 igual ó mayor que $\frac{20Rr}{GR(sen.\beta-sen.\beta^2)-Gr\,cos.\beta^2}$.

Esta expresion manifiesta ya claramente que no conviene substituir $sen.\beta=1$, porque quedará en $\frac{20Rr}{0}=\infty$, y fuera preciso que fuese $A^2=\infty$ para que sólo anduviese la Embarcacion tanto como el viento: cosa que en efecto está infinitamente apartada de poderse verificar en la práctica. Colóquese, pues, $sen.\beta=\frac{1}{2}$, cuyo valor no está muy apartado de ser el mas ventajoso, y dependerá la condicion de haber de andar la Embarcacion tanto ó mas que el viento, de haber de ser A^2 igual ó mayor que $\frac{80Rr}{G(R-3r)}$: ó substituyendo $\pi=60^\circ$, y por consiguiente $G=$ --- $\frac{sen.\frac{1}{2}(180^\circ-2\pi)}{Ar.\frac{1}{2}(180^\circ-2\pi)}=\frac{1}{2}.\frac{3,14}{6}=\frac{3}{3,14}$, de haber de ser A^2 igual ó mayor que $\frac{251,2Rr}{3(R-3r)}$. Pongamos ahora R(§.187) $=3316$, y $r=294$, segun en el Navío de 60 Cañones, y hallaremos $\frac{251,2Rr}{3(R-3r)}=31484$; pero este Navío no puede largar (§.280) sinó 24400 pies de Velámen: luego en esta disposicion nunca puede

andar tanto como el viento: era pues preciso para obligarle á ello, ó aumentar el Velámen hasta 31484 pies, ú disminuir el valor $\frac{251,2Rr}{3(R-3r)}$ disminuyendo la resistencia de Proa r. Lo primero es excesivamente arriesgado, como se deducirá de los Capítulos siguientes: lo segundo, si no conviene en los Navíos que han de sufrir espantosos golpes de Mar por la Proa, como igualmente se verá mas adelante, se ve verificado en otras Embarcaciones, como Galeras, Xabeques, y sus semejantes. Para certificarnos hagamos $24400 = \frac{251,2.3316r}{3(3316-3r)}$, y hallaremos proxîmamente $r = 240$: es valor que debiera tener r, en lugar de 294, para que el Navío pudiese andar tanto como el viento: y respecto que las resistencias son como los senos de los ángulos de incidencia, y estos como las longitudes del Navío, quedando constante todo lo demas, se sigue, que alargando el Navío en la razon de 240 á 294, anduviera tanto como el viento: esto es, dandole de Eslora $4\frac{1}{2}$ veces su manga, andaria mas que el viento. Como nadie ignora que una Galera tiene de largo mas que siete veces su ancho, y ademas mucho mas fina á proporcion su Proa, es claro que la Galera, bien dispuestas sus Velas, anda mas que el viento. Para que no quede escrúpulo en esto, no hay mas que substituir en la fórmula $\frac{251,2Rr}{3(R-3r)}$, $r = 15$, y $R = 300$, que son los valores de las resistencias en una Galera, y se hallará proxîmamente $\frac{251,2Rr}{3(R-3r)} = 1477$: pero en la Galera es A^2 á lo menos de 3000: luego anda muchísimo mas que el viento. En un Xaveque grande es $r = 60$, y $R = 700$, lo que da $\frac{251,2Rr}{3(R-3r)} = 6763$:

pero

pero A^2 es igual 9000 : luego tambien anda mas que el viento. Todo esto debe entenderse con vientos suaves, y quando las Embarcaciones pueden aguantar todo su Velámen ; pues luego que se ven obligadas á recoger Velas disminuye A^2, y no se verifica la igualacion. En el Navío concurre otra circunstancia que le imposibilita el lograr la ventaja antecedente, y es no poder hacer $sen.\beta = \frac{1}{2}$, ó $\beta = 30$, pues (§.275) diximos que, quando menor sea, solo llega á ser $\beta = 35^\circ$: en la Galera, Xaveque, y generalmente en toda Vela latina se forma mucho menor, y tiene esta preferencia sobre la Vela redonda.

349 Los valores de los ángulos γ y β, que deben emplearse, ofrecen aun mas variedades y ventajas; pero su extension nos obliga á reservar su exâmen para otro Capítulo : bastando en este, que consultemos las fórmulas con la práctica usual de la Marinería, y hagamos ver su verdadera conformidad.

350 Navegando á Popa es $\lambda = 180^\circ$: y siendo (§.277) $\beta = \frac{10}{23}(\gamma + 27^\circ)$: y $\gamma = \alpha + \beta$, tendremos $\beta = 90^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, lo que da δ (§.270) $= \frac{1}{2}(180^\circ) - \alpha = 0$. Estos valores substituidos en la velocidad directa, la reducen á $u = \frac{GA^2V}{GA^2 + 20r}$, que es la velocidad que tendrán las Embarcaciones yendo en Popa. Pongamos ahora que el Navío de 60 Cañones con viento suave navegue con Trinquete $= 2610$, Gabia $= 3640$, Juanete mayor $= 1500$, dos alas $= 2200$, y dos rastreras $= 3000$, cuya suma es $12950 = A^2$: y substituyendo este valor con $r = 294$, y $G = 1$, por ser con viento suave, quedará la velocidad del Navío $u = \frac{12950V}{12950 + 5880} = \frac{12950V}{18830}$: ó proxîmamente $u = \frac{69}{100}V$. Si el viento corriese 10 pies por segun-

do, andaria el Navío $6\frac{9}{10}$, que equivalen á $4\frac{1}{7}$ millas por hora: y si corriese aquel 15, andaria este $10\frac{7}{20}$, que equivalen á $6\frac{1}{5}$ millas por hora. Aumentando mas el viento, es preciso disminuir el valor de G: supongamosle $= \frac{7}{8}$, y será $u = \frac{\frac{7}{8}.12950V}{\frac{7}{8}.12950+5880} = \frac{11331V}{17211}$ ó próximamente $u = \frac{66}{100}V$, solo $\frac{3}{100}V$ menor que antes. Si con el mismo aparejo corriese, pues, el viento 20 pies por segundo, andaría el Navío $13\frac{1}{5}$, que equivalen á $7\frac{9}{10}$ millas por hora: y si se pudiese aguantar el mismo Velámen corriendo el viento 25 pies por segundo, andaría el Navío $16\frac{1}{2}$, que equivalen á $9\frac{9}{10}$ millas por hora; lo que no se ve en la práctica: luego es prueba evidente de que el viento que corre 25 pies por segundo no es aguantable con todo el aparejo. Quedando solo el Trinquete y la Gabia es $A^2 = 6250$: con que será $u = \frac{\frac{7}{8}.6250V}{\frac{7}{8}.6250+5880} = \frac{5469}{11349}V$, ó próximamente $u = \frac{48}{100}V$. Si corriese, pues, el viento 25 pies por segundo, andaría el Navío 12, que equivalen á $7\frac{1}{5}$ millas por hora: y si corriese aquel 30, andaría el Navío $14\frac{2}{5}$, que equivalen á $8\frac{64}{100}$ millas por hora. Tomando los tres rizos á la Gabia, queda esta $= 2280$, y $A^2 = 4890$: con que será $u = \frac{\frac{7}{8}.4890V}{\frac{7}{8}.4890+5880} = \frac{4279}{10159}V$, ó próximamente $u = \frac{42}{100}V$. Si corriese, pues, el viento 30 pies por segundo, andará el Navío $12\frac{3}{5}$, que equivalen á $7\frac{56}{100}$ millas por hora: y si corriese aquel 35, andará el Navío $14\frac{7}{10}$, que equivalen á $8\frac{82}{100}$ millas por hora. Ultimamente, aferrada la Gabia, y quedando solo el Trinquete es $A^2 = 2610$: con que será $u = $ ------

$\frac{7}{8}$

$\frac{\frac{7}{8}.2610V}{\frac{7}{8}.2610+5880}=\frac{2284}{8164}V$, ó próxîmamente $u=\frac{28}{100}V$. Si corriese, pues, el viento 40 pies por segundo, andará el Navío $11\frac{1}{5}$, que equivalen á $6\frac{72}{100}$ millas por hora: si aquel corriese 50, andará 14 el Navío, que equivalen á $8\frac{4}{5}$ millas por hora; y si corriese el primero 60, andará el Navío $16\frac{4}{5}$, que equivalen á $10\frac{8}{100}$ millas por hora; lo que rara vez se verá: y asi el viento que corra 60 pies por segundo será violentísimo.

351 En la navegacion á viento largo caben varios casos: exâminemos el propuesto en el §. 278, en que siendo $\gamma=134°$, es $\beta=70°$, y $\alpha=64°$: con viento suave es $\delta=1°\ 37'$, y con fuerte $=4°\ 40'\frac{1}{4}$: $G=\frac{4}{5}$ en el primer caso, y en el segundo $=\frac{78}{100}$. Pongamos que el Navío navegue con Mayor $=3520$, Trinquete $=2610$, Gabia $=3640$, Velacho $=2860$, Mesana $=1300$, Sobre-mesana $=1720$, Juanete mayor $=1500$, Juanete de Proa $=1130$, y Foque $=1060$, cuya suma es 19340: y rebaxando de esto 1660 que la Mayor cubre al Trinquete, la Gabia al Velacho, y la Sobre-mesana á la Gabia, quedan $17680=A^2$. Como este aparejo corresponde á viento suave, le pertenece $\delta=1°\ 37'$, y $G=\frac{4}{5}$; cuyos valores substituidos en la fórmula con $r=294$, y $R=3316$, dan $u=$

$$\frac{\frac{4}{5}.17680.3316.V\,sen.(68°23')\,sen.64°}{\frac{4}{5}.17680.3316\,se.70°\,se.(68°23')+\frac{4}{5}.17680.294\,cos.70°\,cos.(68°23')+20.3316.294}$$

$=\frac{3919}{6100}V$; ó próxîmamente $u=\frac{64}{100}V$. Si el viento corriese 10 pies por segundo, andaria el Navío $6\frac{2}{5}$, que equivalen á $3\frac{84}{100}$ millas por hora: y si corriese aquel 15, andaria el Navío $9\frac{3}{5}$, que equivalen á $5\frac{76}{100}$ millas por hora. Aumentando el viento, hemos de poner $\delta=4°\ 40'$, y $G=\frac{78}{100}$: con que será $u=$ - - -

$$\frac{\frac{78}{100}.17680.3316.\text{sen.}(65^\circ 20')\,\text{sen.}64^\circ}{\frac{78}{100}.17680.3316\,\text{se.}70^\circ\,\text{se}(65^\circ 20')+\frac{78}{100}.17680.294\,\text{co.}70^\circ\,\text{co.}(65^\circ 20')-20.3316.294}$$

$=\frac{3735}{5913}V$, ó proxîmamente $u=\frac{63\frac{1}{6}}{100}V$: esto es, solo $\frac{1}{120}V$ menor que antes, cuya cantidad se puede, por corta, despreciar. Si el viento corriese, pues, 20 pies por segundo, andaria el Navío $12\frac{64}{100}$, que equivalen á $7\frac{58}{100}$ millas por hora: y si corriese aquel 25, andaria el Navío $15\frac{4}{5}$, que equivalen $9\frac{48}{100}$ millas por hora. Aumentando mas el viento, debemos quitar los dos Juanetes y el Foque, que son 3690 pies quadrados, y quedará $A^2=13990$, y $u=$ - - - - - - - - - - - - -

$$\frac{\frac{78}{100}.13990.3316\,\text{sen.}(65^\circ 20')\,\text{sen.}64^\circ}{\frac{78}{100}.13990.3316\,\text{se.}70^\circ\,\text{se.}(65^\circ 20')+\frac{78}{100}.13990.294\,\text{co.}70^\circ\,\text{se}(65^\circ 20')+20.3316.294}$$

ó con corta diferencia $u=\frac{57}{100}V$. Si el viento corriese, pues, 25 pies por segundo, andará el Navío $14\frac{1}{4}$, que equivalen á $8\frac{55}{100}$ millas por hora: y si corriese aquel 30, andaria el Navío $17\frac{1}{10}$, que equivalen á $10\frac{26}{100}$ millas por hora. Aferrada la Sobre-mesana; y tomando los tres rizos á las Gabias, queda $A^2=9950$, y $u=$

$$\frac{\frac{78}{100}.9950.3316\,\text{sen.}(65^\circ 20')\,\text{sen.}64^\circ}{\frac{78}{100}.9950.3316\,\text{se.}70^\circ\,\text{se.}(65^\circ 20')+\frac{78}{100}.9950.294\,\text{cos.}70^\circ\,\text{co.}(65^\circ 20')+20.3316.294}$$

ó próxîmamente $=\frac{50}{100}V$. Si el viento corriese, pues, 25 pies por segundo, andará el Navío $17\frac{1}{2}$, que equivalen á $10\frac{1}{2}$ millas por hora: y si pudiera aguantar el mismo aparejo, corriendo aquel 40 pies por segundo, andaria el Navío 20 pies, que equivalen á 12 millas por hora. Llevando solo las dos Mayores, es $A^2=5200$, habiendo rebaxado 930 que la Mayor tapa al Trinquete, con que será $u=$ - - - - - - - - - - - - - - -

$$\frac{\frac{78}{100}.5200.3316\,\text{sen.}(65^\circ 20')\,\text{sen.}64^\circ}{\frac{78}{100}.5200.3316\,\text{se.}70^\circ\,\text{se.}(65^\circ 20')+\frac{78}{100}.5200.294\,\text{co.}70^\circ\,\text{cos.}(65^\circ 20')+20.3316.294}$$

ó con corta diferencia $=\frac{35}{100}$ V. Si corriese, pues, el viento 40 pies por segundo, andará el Navío 14, que equivalen á $8\frac{1}{3}$ millas por hora: y si corriese aquel 50, andaria el Navío $17\frac{1}{2}$, que equivalen á $10\frac{1}{2}$ millas por hora.

352 En la navegacion de bolina es (§. 275) $\gamma=65^\circ$, $\alpha=25^\circ$, y $\beta=40^\circ$: con viento suave $\delta=8^\circ\,10'\frac{1}{4}$, y con fuerte $=21^\circ\,03'\frac{3}{4}$: G, en el primer caso, $=\frac{sen.\frac{1}{2}(53^\circ\,19'\frac{3}{4})}{Ar.\frac{1}{2}(53^\circ\,19'\frac{3}{4})}=\frac{96}{100}$, y en el segundo $=\frac{sen.\frac{1}{2}(87^\circ\,52'\frac{1}{2})}{Ar.\frac{1}{2}(87^\circ\,57'\frac{1}{2})}=\frac{90}{100}$. Pongamos que el Navío navegue con Mayor $=3520$, Trinquete $=2610$, Gabia $=3640$, Velacho $=2860$, Mesana $=1300$, Sobre-mesana $=1720$, Juanete mayor $=1500$, Juanete de Proa $=1130$, Foque $=1060$, Contrafoque $=410$, Velas de Estay mayor, de Gabia y Volante $=2100$, y Velas de Estay de Mesana, Sobre-mesana y Juanete $=1200$; cuya suma es $A^2=23050$, que substituida en la fórmula con $G=\frac{96}{100}$, y $\delta=80^\circ\,20'$, por ser con viento suave, y los demas valores hallados, será $u=$

$$\frac{\frac{96}{100}.23050.3316\,sen.(31^\circ\,40')\,sen.25^\circ}{\frac{96}{100}.23050.3316\,se.40^\circ\,se(31^\circ\,40')+\frac{96}{100}.23050\,2240\,co.40^\circ\,co.(31^\circ\,40')+20.5316.294}$$

$=\frac{1628}{4850}$V, ó proxîmamente $u=\frac{335}{1000}$V. Si el viento corriese 10 pies por segundo, andará el Navío $3\frac{35}{100}$, que equivalen á $2\frac{1}{10}$ millas por hora: y si corriese aquel 15, andará el Navío $5\frac{1}{4}$, que equivalen á $3\frac{3}{20}$ millas por hora. Aumentando el viento, es preciso disminuir la Vela menuda, disminuir asimismo la G, y aumentar la δ. Pongamos $G=\frac{93}{100}$, $\delta=15^\circ$, y que se quiten los Juanetes, Velas de Estay de Mesana, Sobre-mesana, Volante de Juanete, y aun que se tome un rizo á las Gabias. Con ello quedará $A^2=17765$, y $u=$ ---------------

$\frac{93}{100}$

$$\frac{\frac{93}{100}.17765.3316 sen.25^\circ}{\frac{93}{100}.17765.3316 se.40^\circ se.25^\circ + \frac{93}{100}.17765.294 cos.40^\circ cos.25^\circ + 20.3316.294}$$

$= \frac{9785}{37753}$V, ó proxîmamente $u = \frac{26}{100}$V. Si corriese el viento 20 pies por segundo, andaria el Navío $5\frac{1}{5}$, que equivalen á $3\frac{12}{100}$ millas por hora: y si corriese aquel 25, andaria el Navío $6\frac{1}{2}$, que equivalen á $3\frac{9}{10}$ millas por hora. Aumentando mas el viento, pondremos $G = \frac{9}{10}$, $\delta = 21^\circ$: y dexaremos las dos Mayores, Gabias, con las tres andanas de rizos tomadas, Mesana, y Contrafoque: lo que da $A^2 = 11900$, y $u =$

$$\frac{\frac{9}{10}.11900.3316 sen.19^\circ sen.25^\circ}{\frac{9}{10}.11900.3316 se.40^\circ se.19. + \frac{9}{10}.11900.294 cos.40^\circ cos.19^\circ + 20.3316.294}$$

$= \frac{489}{2874}$V, ó proxîmamente $u = \frac{17}{100}$V. Si corriese, pues, el viento 35 pies por segundo, andaria el Navío $5\frac{95}{100}$, que equivalen á $3\frac{57}{100}$ millas por hora: y si corriese aquel 40, andaria el Navío $6\frac{4}{5}$, que equivalen á $4\frac{8}{100}$ millas por hora. Quedando con las dos Mayores, es A^2 (§.280) $= 6130$, lo que da $u = \frac{103}{1000}$V: con que si corriese el viento los mismos 40 pies por segundo, andaria el Navío á $4\frac{12}{100}$, que equivalen á $2\frac{1}{2}$ millas por hora. (*a*)

Po-

(*a*) Las velocidades del viento no pueden ser muy apartadas de las que asignamos: lo que fuera preciso para sostener el systema antiguo de las resistencias. *Mr. Mariotte* (*Traité du mouvement des eaux*, part.1. disc.3.) asegura haber medido la velocidad del viento, y dice: que el que corre 24 pies por segundo es bastante violento, de suerte que cuesta trabajo caminar contra él. *Mr. Clare* de la Sociedad Real de Londres (*The motion of fluids*, pap.261.) dice lo propio, aun hablando de pies Ingleses. *Mr. Derham*, de la misma Sociedad, que tambien hizo varias experiencias, dice (*Trans. Philos.* n.313.) que el que corre 66 pies Ingleses, es ya una tempestad fuerte, y si mas, un uracan. Yo hice con este motivo varias experiencias en Cadiz, acom-

353 Podemos escusar por ahora indagar la velocidad lateral v, y aun la obliqua w, por diferenciarse muy poco de la directa: basta para el conocimiento de lo uno y de lo otro, hallar el valor del ángulo de la deriva θ por la equacion (§.340) $tang.\theta = \frac{r}{R\,tang.(\beta-\delta)}$. A Popa es cero, y á un largo es despreciable, quando β es grande. A bolina es $\beta = 40^\circ$, y con viento sua-

acompañado de algunos Oficiales, arrojando plumas muy delicadas, y en muchas ocasiones confirmé lo que dice *Mr.Mariotte*. Siempre hallé que el viento, que corre 20 pies Ingleses por segundo, es bastante fuerte, y que los Navíos, iendo de bolina, apenas pueden con él sostener sus Gabias enteramente arriba; pues los veía al mismo tiempo entrar y salir en la Bahía: estaban entonces al abrigo de la Mar; de lo contrario se hubieran visto precisados á disminuirlas. Los Barcos del *Puerto* que pasan á *Cadiz*, siempre observé, que no se atreven á salir corriendo el viento con dicha velocidad: es, pues, demasiada para ellos, y la que toman en su navegacion ha de ser precisamente con menos viento. El regular de las brisas de Verano, que observé diariamente en aquella Ciudad, es de 10 á 15 pies Ingleses por segundo.

Mr.Bouguer, en el Cap. 1. sec. 2. lib. 3. de su *Tratado del Navío*, inquiere la relacion entre las velocidades del viento, y la que toma el Navío, baxo el supuesto de ser las resistencias de los fluidos, como hasta aqui se han creido; y halla, que en caso de ir en Popa ó viento largo, es $u = \frac{100V}{336}$; esto es, que la velocidad del Navío no es ni aun el tercio de la del viento, y esto aplicado el caso á los Navíos mas veleros. El cálculo no resulta sin embargo, sino suponiendo la densidad del agua solamente 576 veces mayor que la del ayre: suponiendola 1100 ma-

suave $\delta = 8^\circ\ 20'$: luego en el Navío de 60 Cañones será $tang.\theta = \frac{294}{3316 tang.(31^\circ\ 40')} = ,1442$, ó $\theta = 8^\circ\ 12'\frac{1}{2}$. Con viento fuerte es $\delta = 21^\circ$: luego será $tang.\theta = \frac{294}{3316 tang.(19^\circ)} = ,25758$, ú $\theta = 14^\circ\ 27'\frac{1}{3}$: bien entendido que esto es, no incluyendo el efecto de los golpes de Mar, que aumentan mucho estos ángulos, par-

mayor, resulta $u = \frac{100V}{419}$: esto es, la velocidad del Navío ni aun la quarta parte de la del viento. Si tomamos, pues, la densidad como la supusimos en nuestro cálculo, para combinar uno con otro, resulta con corta diferencia $u = \frac{1}{4}V$; cuya velocidad equivale á $\frac{3}{20}V$ millas por hora. Supongamos, pues, que este Navío, siendo tan velero como se supone, ande 10 millas por hora con viento largo, lo que es bien regular y ordinario, porque llegan á 11 y mas, y tendremos $\frac{3}{20}V = 10$: lo que dá $V = \frac{200}{3} = 66,6$: de suerte, que para andar el Navío las 10 millas, resulta que el viento ha de correr 66,6 pies por segundo, ó que ha de ser un uracan, como asegura *Mr. Derham*; conseqüencia que se opone á todas las experiencias, y aun al hecho de llevar el Navío nada menos que 15474 pies Franceses quadrados de velámen, que equivalen 17506 Ingleses, los que fuera imposible soportase con tan violento viento.

A mas de las expresadas experiencias, practiqué otras, confrontandolas con el andar de las Embarcaciones. Mientras se media en tierra la velocidad del viento, que se halló de $10\frac{1}{2}$ á 11 pies por segundo: un Bote, con sus dos Velas, y á viento largo, navegó en 30 minutos desde el Muelle de *Cadiz*, hasta ponerse por el traves del Castillo de *Santa Cathalina del Puerto*; cuya distancia, deducida por un Plano exácto de la Bahia, es de 16600 pies In-



particularmente el último, pues el viento fuerte es el que engruesa la Mar, y suele aumentar θ hasta 50 y 60 grados. Este efecto práctico hizo incurrir á un Geómetra á culpar sin motivo la mala disposicion que dió á su aparejo un Marinero.

354 Por otro lado, faltando en estos el conocimiento perfecto de las causas que pueden alterar el ángulo de la deriva, se han persuadido á creer que las Velas altas son mas propias para tener el Navío á barlovento que las baxas, pues efectivamente observan

que

Ingleses : lo que da haber andado el Bote $9 \frac{2}{9}$ pies por segundo : esto es, la velocidad del Bote fue á la del viento, proxîmamente, como 21 á 25, ó 21 á 23 : relacion bien distante de la que resulta por el systhema antiguo ; pero muy conforme con el que ahora seguimos. Esta misma experiencia se ve repetida todos los dias : desde *Cadiz* al *Puerto* hay 5 millas, y este transito le hacen diariamente los Barcos en 3 á 5 quartos de hora con el viento que corre de 10 á 15 pies por segundo : la velocidad que toman corresponde á $6 \frac{2}{3}$ ó $11 \frac{1}{9}$ pies por segundo, y es $\frac{2}{3}$ ó $\frac{20}{27}$ de la del viento ; cuya relacion está asimismo bien apartada de la que resulta por el systhema antiguo. La fórmula que determina la velocidad del Navío baxo de este systhema, se halla en el Art. 13 de las Obras posthumas de *Jacobo Bernoulli*, que hizo atencion á no ser infinita la velocidad del viento, respecto á la del Navío ; lo que sus predecesores, y aun despues otros muchos, no admitieron. Pero como este Autor supuso que siempre heria el viento la Vela perpendicularmente, podemos añadir la fórmula general por los principios que ya tenemos. Esta velocidad perpendicular la hallamos (§. 338) $= V sen.\alpha - u sen.\beta - v cos.\beta$: con que siendo, segun dicho systhema, la fuerza perpendicular de la Vela, como su area A^2, multiplicada por el quadrado de la velocidad - - - - - $(V sen.\alpha - u sen.\beta - v cos.\beta)^2$, y por la densidad del ayre

que asi sucede ; pero el §. precedente manifiesta con claridad , visto que las Velas baxas son las que solamente permanecen con viento fuerte, que el efecto solo nace de lo mas violento del viento , ó mayor curvidad que entonces tienen las Velas , y no de su distinta colocacion en altura : añadiendose á esto , que á las Velas baxas, como mas anchas, corresponde mayor curvidad (§. 267), y por consiguiente mayor valor de δ.

355 La velocidad con que se sale á barlovento es (§.

(§. 258) $\frac{m}{1030}$, será esta fuerza como --------- $\frac{mA^2}{1030}(V sen.\alpha - u sen.\beta - v cos.\beta)^2$: y la fuerza en la direccion directa $\frac{mA^2 sen.\beta}{1030}(V sen.\alpha - u sen.\beta - v cos.\beta)^2$. Pero si a^2 denota la superficie plana que , movida perpendicularmente , resistiera lo mismo que la Proa , es la fuerza ó resistencia de esta , segun el mismo systhema, ma^2u^2 : luego en el máximo andar del Navío es ---- $\frac{mA^2 sen.\beta}{1030}(V sen.\alpha - u sen.\beta - v cos.\beta)^2 = ma^2u^2$. Por la misma razon , si a^2 expresa la superficie plana que , movida perpendicularmente , resistiera lo mismo que el costado del Navío, será $\frac{mA^2 cos.\beta}{1030}(M se.\alpha - u se.\beta - v cos.\beta)^2 = ma^2v^2$.

De la primera equacion resulta $V sen.\alpha - u sen.\beta - \frac{(1030)^{\frac{1}{2}} au}{A sen.\beta^{\frac{1}{2}}} = v cos.\beta$; cuyo valor substituido en la segunda , la reduce á $\frac{a^2u^2 cos.\beta}{sen.\beta} = a^2v^2 =$ ------ $\frac{a^2}{cos.\beta^2}\left(V sen.\alpha - u sen.\beta - \frac{(1030)^{\frac{1}{2}} au}{A sen.\beta^{\frac{1}{2}}}\right)^2$, que da $u =$

Aa

(§.342) $W = \frac{GA^2 V sen.\alpha(R cos.\gamma sen.(\beta-\delta) - r sen.\gamma cos.(\beta-\delta))}{GA^2 R se.\beta se.(\beta-\delta) + GA^2 r cos.\beta cos.(\beta-\delta) + 20Rr}$:
y de esta misma equacion deduximos (§.347) que para que se pueda ganar barlovento, es preciso que sea - - -
$tang.(\beta-\delta) > \frac{r}{R} tang.\gamma$; pero es (§§. 275 y 352)
$\gamma = 65^\circ$: luego para que se pueda ganar barlovento en la práctica de los Marineros, es preciso que sea $tang.(\beta-\delta) > ,18712$, ó $\beta-\delta > 10^\circ\ 19'$. Con viento

$\frac{AaV sen.\alpha sen.\beta^{\frac{1}{2}}}{A(a sen.\beta^{\frac{3}{2}} + a cos.\beta^{\frac{3}{2}}) + (1030)^{\frac{1}{2}} aa} = \frac{av sen.\beta^{\frac{1}{2}}}{a cos.\beta^{\frac{1}{2}}}$: por lo
que es $v = \frac{AaV sen.\alpha cos.\beta^{\frac{1}{2}}}{A(a sen.\beta^{\frac{3}{2}} + a cos.\beta^{\frac{3}{2}}) + (1030)^{\frac{1}{2}} aa}$: y la velocidad obliqua $w = \frac{AV sen.\alpha(a^2 sen.\beta + a^2 cos.\beta)^{\frac{1}{2}}}{A(a sen.\beta^{\frac{3}{2}} + a cos.\beta^{\frac{3}{2}}) + (1030)^{\frac{1}{2}} aa}$.

El area de la Quaderna maestra del Navío de 60, que nos sirvió de exemplo: esto es, de la parte que queda sumergida en el fluido, es con corta diferencia de 620 pies quadrados: y suponiendo que el Navío sea medianamente velero, debemos tomar a^2 entre septimo y octavo de 620, ó $a^2 = 81$, que da $a = 9$. La resistencia del costado, siendo tambien con corta diferencia, once veces mayor que la de la Proa, será $a^2 = 900$, y $a = 30$. A mas de esto, la raiz de 1030 es, sin error sensible, $= 32$: con que, substituyendo estos valores, será para el Navío de 60, $u = \frac{30AV sen.\alpha sen.\beta^{\frac{1}{2}}}{A(30 sen.\beta^{\frac{3}{2}} + cos.\beta^{\frac{3}{2}}) + 8640}$. En el caso de ir á Popa es $sen.\alpha = 1$, $sen.\beta = 1$, y $cos.\beta = 0$: luego quedará $u = \frac{30AV}{30A + 8640} = \frac{AV}{A + 288}$. Si colocamos ahora (§. 350) $A^2 = 12950$, como corresponde á viento sua-

to fuerte es $\delta = 21^\circ$, y poniendo $\beta = 40^\circ$, queda $\beta - \delta = 19^\circ$: luego, aun con viento fuerte, debiera ganar barlovento el Navío, segun la práctica de los Marineros, si no fuese por los golpes de Mar que le obligan á perder mucho mas. Substituyendo en W los valores hallados (§.352), tubieramos la velocidad con que se sale á barlovento ; pero mas facilmente podemos deducir este valor, si hacemos atencion á que por las fórmulas es $u : W = R fe.(\beta - \delta) : R cof.\gamma fe.(\beta - \delta) - r fe.\gamma cof.(\beta - \delta)$, ó

suave, respecto de suponer $G = 1$, ó la Vela plana, será proxîmamente $A = 114$; lo que da $u = \frac{114V}{402}$, ó con corta diferencia $u = \frac{28}{100}V$: de suerte, que la velocidad del Navío será poco mas de la quarta parte de la que tubiere el viento. Si este corriese, pues, 10 pies por segundo, andaria el Navío $2\frac{4}{9}$, que equivalen á $1\frac{68}{100}$ millas por hora : y si corriese aquel 15, andaria el Navío $4\frac{1}{5}$, que equivalen á $2\frac{52}{100}$ millas por hora. Aumentando el viento, disminuye G, y podemos suponer $u = \frac{1}{4}V$; pero por repetidisimas experiencias un Navío saca con todo el aparejo 6 á 7 millas por hora, que resultan de la velocidad 10 á 13 pies por segundo : luego debiera ser $12 = \frac{1}{4}V$, y $V = 48$, pies que deberia correr el viento para dar semejante velocidad al Navío ; lo que no conviene con las experiencias. Quedando con solo el Trinquete, es $A = 2610$, y $A = 51$: con que será $u = \frac{51V}{51 + 288} = \frac{51}{339}V$; pero con este aparejo suele andar el Navío 9 millas, y es $u = 15 = \frac{51}{339}V$: luego $V = 100$ proxîmamente, velocidad de un uracan, que fuera imposible aguantar el Trinquete. A bolina con todas Velas, ó $A^2 = 23050$, $\alpha = 25^\circ$, y $\beta = 40^\circ$, será $u = \frac{131}{1000}V$: de suerte, que aunque corriese el viento 20 pies por segundo, no andaria el Navío sino poco mas de milla y media por hora.

ó $W = \frac{u(R\,cos.\gamma\,sen.(\beta-\delta) - r\,sen.\gamma\,cos.(\beta-\delta))}{R\,sen.(\beta-\delta)} = u\left(cos.\gamma - \frac{r\,sen.\gamma}{R\,tang.(\beta-\delta)}\right)$. Poniendo, pues, para el Navío de 60, $\gamma = 65°$, $\beta = 40°$, $r = 294$, y $R = 3316$, será $W = u\left(,4226 - \frac{,0834}{tang.(40° - \delta)}\right)$. Con viento suave y todo el aparejo largo, hallamos (§. 352) $u = \frac{335}{1000}V$, y $\delta = 8° 20'$: con que será $W = \frac{335}{1000}V\left(,4226 - \frac{,0834}{tang.(31° 40')}\right) = \frac{96279}{1000000}V$, ó próximamente $= \frac{96}{1000}V$. Si el viento corriese, pues, 10 pies por segundo, saldria el Navío á barlovento con la velocidad de $\frac{96}{100}$ de pie, que equivalen á $\frac{576}{1000}$ de milla por hora: de suerte, que en 5 horas se pusiera el Navio $2\frac{88}{100}$ millas á barlovento: y si corriese aquel 15 pies por segundo, se pusiera, en las mismas 5 horas, $4\frac{32}{100}$ millas á barlovento. En el otro caso, que solo quedaron 17765 pies quadrados de velámen, y que supusimos (§. 352) $\delta = 15°$, será $W = u\left(4226 - \frac{,0834}{tang.25°}\right)$, ó porque se halló $u = \frac{26}{100}V$, será $W = \frac{26}{100}V(4226 - 1789) = \frac{63362}{1000000}V$. Si el viento corriese, pues, 20 pies por segundo, saldrá el Navío á barlovento con la velocidad de $1\frac{267}{1000}$, que equivale á $\frac{76}{100}$ de milla por hora: de suerte, que en 5 horas se pusiera $3\frac{4}{5}$ millas á barlovento: y si corriese el viento 25 pies, se pusiera $4\frac{3}{4}$ millas á barlovento en las mismas horas. Ultimamente, en el otro caso, en que solo quedaron 11900 pies de velámen, siendo $\delta = 21°$, se halló $u = \frac{17}{100}V$: luego será $W = \frac{17}{100}V\left(4226 - \frac{,0834}{tang.19°}\right) = \frac{30668}{1000000}V$. Si el vien-

to corriese, pues, 35 pies por segundo, saldria el Navío á barlovento con la velocidad de $1\frac{37}{1000}$, que equivale á $\frac{644}{1000}$ de milla por hora; de suerte, que en 5 horas se pusiera $3\frac{22}{100}$ millas á barlovento: y si corriese el viento 40 píes, se pusiera en el mismo tiempo $3\frac{68}{100}$ millas á barlovento: todo esto, bien entendido, que es sin hacer atencion á los golpes de Mar, que en estos ultimos casos son de grandisimo efecto: y asimismo, á la *ventola*, que llaman los Marineros al impulso ó fuerza con que el viento actua sobre el casco y aparejo del Navío, que tambien causa bastante atraso.

356 En el §.347 diximos, que quando mayor fuere la relacion $\frac{R}{r}$ mayor será la velocidad directa u; pero sin embargo de tan cierta conclusion, es menester limitarla al caso en que se trate de comparar distintos Navíos, en que dicha relacion varie mucho; no al del mismo, quando por calarle ó sumergirle mas ó menos en el agua, puede variar $\frac{R}{r}$. Para convencerse basta reflexionar, que quando menos sumergido esté el Navío, mayor será la relacion $\frac{R}{r}$, pues en el de 60, supuesto 6 pulgadas mas elevado, hallamos (§. 185) $\frac{R}{r} = \frac{3198}{282}$, en lugar de $\frac{3316}{294}$, que antes empleamos. Sin embargo, puesto este ultimo valor en el caso de bolina con todo el aparejo, da solamente $\frac{1}{200}$ de aumento al valor de u, que equivale á $\frac{3}{1000}$ de milla por hora, cantidad imperceptible en la práctica, y de la qual aun se debe perder mucho, por la mayor inclinacion que padecerá el Navío, sumergiendo con ella mayores redondos por sotavento, de que debe resultar mayor valor de r.

Re-

357 Reducido á serie el valor de la velocidad directa u, se halla $u =$

$$\frac{V fe.\alpha}{fen.\beta}\left(1 - \frac{r(A^2 cof.\beta cof.(\beta-\delta)+20R)}{A^2 R fen.\beta fen.(\beta-\delta)} + \frac{r^2(A^2 co.\beta co.(\beta-\delta)+20R)^2}{(A^2 R fen.\beta fen.(\beta-\delta))^2} - \&c\right)$$

donde se ve, que no solo por disminuir la relacion $\frac{r}{R}$ aumenta dicha velocidad, sino por disminuir las mismas cantidades r y R, aunque sea una y otra en la propia razon, porque efectivamente disminuye siempre el valor $\frac{20rR}{A^2 R fen.\beta fen.(\beta-\delta)} = \frac{20r}{A^2 fen.\beta fen.(\beta-\delta)}$.

358 Las cantidades de esta serie pueden servirnos tambien para exâminar y fixar la razon en que deberán estar las principales medidas de un Navío, como Eslora, Manga y Puntal, para que tenga el mayor andar: supuesto constante su Buque, ó que disminuya una en la misma razon que otra aumente. Para esto, sea e la Eslora, m la Manga, y p el Puntal; y respecto que la resistencia que padecen las quadrículas es (§.176) como su ancho, multiplicado por su alto, por la raiz de su profundidad, y por el seno del ángulo de incidencia: esto es, como $m.p.p^{\frac{1}{2}}.\frac{m}{\sqrt{e^2+m^2}} = \frac{m^2 p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{e^2+m^2}}$ para Proa, y como $e.p.p^{\frac{1}{2}}.\frac{e}{\sqrt{e^2+m^2}} = \frac{e^2 p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{e^2+m^2}}$ para el costado; tendremos $\frac{rm^2 p^{\frac{3}{2}}}{b\sqrt{e^2+m^2}}$, que expresará la nueva resistencia de Proa, el Navío alterado de medidas, siendo r la anterior resistencia, y b la expresion $\frac{m^2 p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{e^2+m^2}}$ de las anteriores ó primitivas medidas: y de

la misma suerte $\frac{Re^2 p^{\frac{3}{2}}}{H\sqrt{e^2+m^2}}$ la nueva resistencia lateral. Substituidas estas cantidades en lugar de r y R solas en el segundo termino de la serie $\frac{r(A^2 cos.\beta cos.(\beta-\delta)+20R)}{A^2 R sen.\beta sen.(\beta-\delta)}$ se reduce á

$$\frac{\frac{rm^2}{h}\left(A^2 cos.\beta cos.(\beta-\delta)+\frac{20Re^2p^{\frac{3}{2}}}{H\sqrt{e^2+m^2}}\right)}{\frac{A^2Re^2}{H}sen.\beta sen.(\beta-\delta)}$$

; ó suponiendo, con los Marineros, que los velámenes sean como las mangas, substituiremos $\frac{m^2A^2}{M^2}$ por A^2 sola, expresando M la manga antes de alterar el Navío, ó en su primitiva medida, y quedará la expresion en

$$\frac{r}{hsen.\beta sen.(\beta-\delta)}\left(\frac{Hm^2cos.\beta cos.(\beta-\delta)}{Re^2}+\frac{20p^{\frac{3}{2}}M^2}{A^2\sqrt{e^2+m^2}}\right),$$

la qual ha de ser un mínimo para que el Navío tenga el mayor andar posible. Este mínimo se consigue, como manifiesta la expresion, aumentando la Eslora e hasta el infinito, y disminuyendo el Puntal p: luego quanto mas se alargue el Navío, y á proporcion se le dé menos puntal, mas y mas velero será. Del mismo modo se consigue el mínimo, aumentando e, y disminuyendo la Manga m, pues aun la expresion $\frac{p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{e^2+m^2}}$ disminuye, por ser $e > m$: luego igualmente será mas velero el Navío aumentando la Eslora y disminuyendo la Manga. Ultimamente, suponiendo la Eslora e constante, y variando la Manga m, y el Puntal p, se vé, que en caso de ser $cos.\beta = 0$, ú de ir á Popa, quanto mayor fuere la Manga, y menor el Puntal, mas

velero será el Navío; (*a*) pero al contrario á bolina buscando el mínimo valor de m, se halla, con corta diferencia, que solo ha de ser de dos pies, cantidad cortísima: y asi para vientos largos es bueno que el Navío tenga mas Manga, y menos Puntal; y para mas escasos, al contrario. De esta solucion resulta, que es mas conveniente para el andar, atenerse á Mangas y Puntales cortos, alargando lo que posible fuere las Esloras: pues aun en el caso de ir á Popa es corta la alteracion que puede resultar del aumento de la m en $\sqrt{e^2+m^2}$; pero á mas de que esto fuera perjudicialisimo para el quebranto, lo es mucho mas en los valances y cabezadas, como se verá mas adelante.

359 Tambien resultan otras variaciones en el andar de los Navíos, que los Marineros han notado, sin llegar á conocer la causa, ni que tampoco se la hayan manifestado hasta ahora los Geómetras. Las resistencias r y R en Navíos semejantes son (§. 188) como las rai-

(*a*) La expresion correspondiente á esta, que se deduce del antiguo systhema de las resistencias es, segun la fórmula de la velocidad de la pag. 253 reducida á serie,

$$\frac{a}{b\,sen.\beta^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{Hm^2 cos.\beta^{\frac{3}{2}}}{ae^2}+\frac{(1030)^{\frac{1}{2}}mMp}{A\sqrt{e^2+m^2}}\right),$$ donde se vé, que siendo $cos.\beta=0$, solo queda la segunda cantidad, cuyo numerador Mp queda constante variando la Manga m, y el Puntal p, y que solo tiene alguna diferencia por la variacion de m en el denominador, que en la práctica es casi insensible, á causa de lo mucho mayor que es e, respecto de m. En nuestro systhema de resistencias, ya se vió que el numerador de la cantidad es $20\,p^{\frac{3}{2}}M^2$, y que disminuye por la $p^{\frac{3}{2}}$: lo que se hace muy sensible en la práctica, como realmente se observa.

raices quadradas de las quintas potestades de las Mangas: ó siendo estas M y m, como $M^{\frac{5}{2}}$ á $m^{\frac{5}{2}}$; pero el velámen es, como M^2 á m^2: luego si estos valores se substituyen, en lugar de sus equivalentes, en la segunda cantidad de la serie, quedará esta para el primer Navío,

$$=\frac{M^{\frac{5}{2}}(M\,cos.\beta cos.(\beta-\delta)+2oM^{\frac{5}{2}})}{M^2.M^{\frac{5}{2}}sen.\beta sen.(\beta-\delta)}=\frac{cos.\beta cos.(\beta-\delta)+2oM^{\frac{1}{2}}}{sen.\beta sen.(\beta-\delta)},$$

y para el segundo $=\frac{cos.\beta cos.(\beta-\delta)+2om^{\frac{1}{2}}}{sen.\beta sen.(\beta-\delta)}$: donde se ve que es menor en el menor Navío, y consiguientemente que, por esta razon, ha de andar este mas. Acordemonos ahora, que en toda la theórica de este Capítulo no hemos hecho atencion á la resistencia que procede de la desnivelacion del fluido, por resultar despreciable con vientos cortos, y en Navíos grandes: esta resistencia es en Buques semejantes solo como las simples Mangas M y m: con que substituyendo estos valores por r y R en la segunda cantidad de la serie, con M^2 por A^2, quedará para el primer Navío $=$

$$\frac{M(M^2cos.\beta cos.(\beta-\delta)+2oM)}{M^3sen.\beta sen.(\beta-\delta)}=\frac{Mcos.\beta cos.(\beta-\delta)+2o}{Msen.\beta sen.(\beta-\delta)},$$

y para el segundo $=\frac{mcos.\beta cos.(\beta-\delta)+2o}{msen.\beta sen.(\beta-\delta)}$; donde se ve que es mayor en el menor Navío: y consiguientemente que, por esta razon, este ha de andar menos. De ambas razones combinadas resulta, que con vientos cortos han de andar mas los Buques pequeños, como Fragatas y otros, y con violentos los grandes.

Hasta aqui hemos tratado esta theórica, suponiendo siempre el Navío de nivel, ó sin cabezadas, ó rotacion sobre un exe: de esta suerte calculamos las resistencias de que nos hemos servido; pero luego que el Navío cabecéa, es claro que aquellas resistencias se al-

alteran, no existen ya mas : y por consiguiente, tampoco se conservan las velocidades asignadas : que tanto disminuirán, quanto dichas cabezadas sean mayores, pues con ellas presentará mayor superficie que resista, y por lo general herida con senos mayores de incidencia. A su tiempo se verá, que en Proas agudas pueden ser estas cabezadas una, dos, y tres veces mayores que en otras algo mas llenas : por consiguiente, no porque aquellas padezcan menos resistencia en caso de la tranquilidad, les sucederá lo propio en caso de la agitacion. En este sube á ser muchas veces mayor, porque hiere el agua superficies mucho mas amplias, y con ángulos casi rectos : luego en caso de la agitacion, segun esta fuere mayor ó menor, puede el Navío de Proa mas llena andar mas. Es el motivo porque no podemos admitir para la Navegacion la Proa de menor resistencia, como han pretendido hasta ahora los Geómetras, pues siendo sumamente aguda, dexará de ser menos resistente en la agitacion.

CAPITULO 2.

De los ángulos que deben formar las Velas, y el viento con la Quilla, para conseguir el máximo andar.

360 ASegurados ya de la puntualidad de nuestras fórmulas, y de su exácta conformidad con la práctica, se hace preciso especularlas enteramente, y sacar de ellas las ventajas posibles: es lo que unicamente puede enseñarnos la buena theórica, y que no podrian deducir los Marineros aun con infinitos siglos de práctica. Si en el valor de $u =$ ---------
GA²

$$\frac{GA^2RV\,sen.\alpha\,sen.(\beta-\delta)}{GA^2(R-r)\,se.\beta\,se.(\beta-\delta)+r(GA^2\,cos.\delta+2oR)}$$ substituimos $sen.(\beta-\delta)=o$: esto es, si colocamos la Vela de suerte que su accion sea perpendicular á la Quilla, viene $u=o$. Asimismo si suponemos $sen.\alpha=o$: esto es, si colocamos la Vela coincidente con el viento, tambien resulta $u=o$. En qualquiera de las situaciones intermedias que se coloque la Vela, es cierto que tiene valor la u; por consiguiente, desde el valor cero, que procede de colocar $sen.(\beta-\delta)=o$, irá tomandole mayor al paso que aumente $sen.(\beta-\delta)$, y esto hasta cierto punto, que será el máxîmo, desde el qual, aumentando mas $sen.(\beta-\delta)$, disminuirá u. Este máxîmo ya sabemos que resulta, igualando la diferencial de la equacion á cero. Puestos, pues, $Q=GA^2(R-r)$, $F=r(GA^2cos.\delta+2oR)$, $sen.\alpha=sen.\gamma\,cos.\beta-cos.\delta\,sen.\beta$, y $sen.(\beta-\delta)=se.\beta\,cos.\delta-cos.\beta\,se.\delta$, se reducirá la equacion á $u=\dfrac{GA^2RV(se.\gamma\,cos.\beta-cos.\gamma\,se.\beta)(se.\beta\,cos.\delta-cos.\beta\,se.\delta)}{Q\,sen.\beta(sen.\beta\,cos.\delta-cos.\beta\,sen.\delta)+F}$:

y tendremos, supuesta la δ constante en el caso del máxîmo andar, ó máxîma u, $(Q\,se.\beta(se.\beta\,co.\delta-se.\delta\,cos.\beta)+F)$ $(sen.(\gamma+\delta)cos.\beta^2-sen.(\gamma+\delta)\,sen.\beta^2-2cos.(\gamma-\delta)sen.\beta\,cos.\beta)=$ $se.\alpha\,se.(\beta-\delta)(2Q\,cos.\delta\,se.\beta\,cos.\beta-Q\,se.\delta\,co.\beta^2+Q\,se.\delta\,se.\beta^2)$, ó despejando $Q\,se.\gamma(se.\delta^2-2se.\delta\,co.\delta\,tan.\beta+tan.\beta^2-2se.\delta\,co.\delta\,tan.\beta^3+cos.\delta^2\,tang.\beta^4)$ $=\frac{F}{cos.\beta^2}\left(sen.(\gamma+\delta)-sen.(\gamma+\delta)tang.\beta^2-2cos.(\gamma+\delta)tang.\beta\right)$: ó lo que es lo mismo, $Q\,sen.\gamma(sen.\delta^2-2sen.\delta\,tang.\beta+cos.\delta^2\,tang.\beta^2)=$ $F(sen.(\gamma+\delta)-sen.(\gamma+\delta)tang.\beta^2\,2cos.(\gamma+\delta)tang.\beta)$: que dá $tang.\beta=$ $\dfrac{Q\,sen.\gamma\,sen.\delta\,cos.\delta\pm F\,cos.(\gamma+\delta)+\sqrt{F^2+QF\,sen.\gamma\,sen.(\gamma-\delta)}:}{Q\,sen.\gamma\,cos.\delta^2+F\,sen(\gamma+\delta)}$ (a) es la tan-

(a) *Mr. John Muller*, en el 8º Tomo de sus Obras, intitulado *Appendix, or supplement to the Treatise of Artillery* pag. 87. busca los ángulos mas ventajosos que debe formar el Navío, viento y Velas, para lograr el mayor andar,

tangente del ángulo , que ha de formar la Vela con la Quilla para que el Navío ande lo mas que sea posible, supuestos dados y constantes los ángulos γ y δ: el signo positivo para quando sea $\gamma > 90^\circ$, ó se vaya á viento largo, y el negativo para quando sea $\gamma < 90^\circ$, ó se vaya á bolina.

361 El primer conocimiento que nos ofrece esta fórmula es, que el valor de β no es constante, como han creído hasta ahora los Geómetras; pues depende de las cantidades $Q = GA^2(R - r)$, $F = r(GA^2 \cos.\delta + 2oR)$, y δ: esto es, de la relacion entre las resistencias de la Proa y costado, de la cantidad de Vela A^2, y de la curvidad de esta: de suerte, que quanto menor sea $\frac{r}{R}$, menor debe ser β; y asimismo, quanto menor sea δ, y mayor A^2. Si fuere por exemplo la resistencia de la Proa infinitamente pequeña, respecto á la del cos-

dar. Su conclusion es muy distinta de la que da *Juan Bernoulli* en sus Obras (Tom. 2. pag. 32.) sin embargo que ambos partieron del mismo principio erroneo de las resistencias. Esta diferencia procede de que *Juan Bernoulli*, como aquí lo executamos, supuso constante el ángulo que forma el Navío con el viento, y variable el del Navío con la Vela, como debe ser, porque el ángulo del rumbo es el dado; y al contrario *Mr. Muller* supone este ángulo variable, y constante el del Navío con la Vela. Por este motivo ya no es $s\sqrt{1 - x^2} - xy$ la diferencial que se debe igualar á cero, segun dice *Mr. Muller*, sino $x^2(2s^2 - y^2)^2 = 9y^2s^2(1 - x^2)$, ó $y^4 - y^2(1 + \frac{1}{3}x^2) + \frac{4}{9}x^2 = 0$, que es la misma equacion que dá *Juan Bernoulli*. Dado el caso, como lo supone aquel, esto es, dado constante el ángulo que forme la Vela con el Navío ó Quilla, no puede dudarse que el viento que caiga perpendicularmente sobre la Vela será el mas ventajoso, puesto que será el que mas fuerza haga sobre aquella: cuya resulta es la misma que deduce *Mr. Muller*.

costado, será F$=$o, y $tang.\beta = \frac{sen.\delta}{cos.\delta} = tang.\delta$, ó $\beta = \delta$: esto es, la direccion de la Vela ha de ser perpendicular á la Quilla; al contrario, siendo $r = R$, ó la resistencia de la Proa igual á la del costado, será $Q = 0$, y $tang.\beta = \frac{1 - cos.(\gamma + \delta)}{sen.(\gamma + \delta)} = cosec.(\gamma + \delta) - cotang.(\gamma + \delta) = tang.\left(\frac{\gamma + \delta}{2}\right)$, ó $\beta = \frac{\gamma + \delta}{2}$. Del mismo modo siendo $A^2 = 0$, es $Q = 0$, y por consiguiente $\beta = \frac{\gamma + \delta}{2}$: y si fuere $A^2 = \infty$, como es, en tal caso, Q muchas veces mayor que F, se pueden despreciar en la fórmula todas las cantidades donde se halle la F con la Q, y quedará $tang.\beta = tang.\delta + \left(\frac{F sen.(\gamma + \delta)}{Q\, sen.\gamma cos.\delta^4}\right)^{\frac{1}{2}}$, ó porque en este mismo caso ha de ser $\delta = 0$, $tang.\beta = \sqrt{\frac{F}{Q}}$: donde se ve que solo quando fuere γ corta, ó $\gamma = 2\sqrt{\frac{F}{Q}}$ puede tener β el mismo valor en ambos casos; de lo contrario siempre será menor quando mayor fuere A^2.

362 Navegando en Popa es $sen.\gamma = 0$, y $\delta = 0$: luego quedará $tang.\beta = \infty$, ó $\beta = 90^\circ$: esto es, debe colocarse la Vela formando ángulos rectos con la Quilla, como ya practican los Marineros; y por consiguiente la velocidad máxima es la misma que la que se logra en la práctica.

363 A viento largo ya no es lo mismo: exâminemos el caso (§. 351.) en que supusimos $\gamma = 134^\circ$, y en que con viento suave es $\delta = 1^\circ\, 37'$, $G = \frac{4}{7}$, $A^2 = 17680$, $r = 294$, y $R = 3316$, en el qual colocan los Marineros $\beta = 70^\circ$. El valor de Q es $= 42743168$, y el de $F = 23654753$: con que será $tang.\beta =$ ---------------------------

$$\frac{42743168 se.\gamma\, se.\delta\, cos.\delta + 23654753 co.(\gamma+\delta) + \sqrt{(2365753)^2 + (42743168)(2365753) se.\gamma\, se.(\gamma-\delta)}}{42743168 sen.\gamma\, cos.\delta^2 + 23654753 sen.(\gamma+\delta)}$$

$$= \frac{867098 + 16905477 + 33117589}{30722390 + 16545436} = \frac{56695905}{47267826};$$ ó

$\beta = 50^\circ\ 11'$, $19^\circ\ 49'$ menor de lo que los Marineros estilan usarlo. Si colocamos ahora este valor de β, y el que resulta de $\alpha = 83^\circ\ 49'$, en lugar de $\beta = 70^\circ$, y $\alpha = 64^\circ$ que usamos (§. 351) para hallar el valor de u, tendremos

$$u = \frac{\frac{4}{5}.17680.3316.V sen.(48^\circ 34') sen.(83^\circ 49')}{\frac{4}{5}.17680.3316 se(48^\circ 34') se(50^\circ 11') + \frac{4}{5}.17680.29 co.(48^\circ 34') co.(50^\circ 11') + 20.3316.29 +}$$

$= \frac{3495872}{4926895}V$, ó proxîmamente $u = \frac{71}{100}V$: de suerte, que con estos ángulos ventajosos andaria el Navío $\frac{71}{100}V$, en lugar de $\frac{64}{100}V$, que se halló (§. 351) debia andar con los que usan los Marineros: esto es, $\frac{7}{100}V$ mas de lo que hoy se anda: y asi, si el viento corriese 15 pies por segundo, andaria el Navío $\frac{9}{20}$ de milla mas por hora, que con las $5\frac{76}{100}$ que antes andaba, harán $6\frac{21}{100}$: y si corriese aquel 25 andaria el Navío $\frac{3}{4}$ de milla mas por hora, que con las $9\frac{48}{100}$ que antes andaba, harán $10\frac{23}{100}$. En caso de ser el viento fuerte es $\delta = 4^\circ\ 40'$, y $G = \frac{78}{100}$: con que suponiendo que el Navío navegue con solas las Mayores, será (§. 351) $A^2 = 5200$, que da $Q = \frac{78}{100}.5200(3316-294) = 12257232$, $F = 294(\frac{78}{100}.5200 cos.(4^\circ 40') + 20.3316) = 20681130$, y

$$tang.\beta = \frac{12257232 se\,\gamma\, se.\delta\, cos.\delta + 20681130 co.(\gamma+\delta) + \sqrt{20681130(20681130 + 12257232 se.\gamma\, se.(\gamma-\delta))}}{12257232 sen.\gamma\, cos.\delta^2 + 20681130 sen.(\gamma+\delta)}$$

$$= \frac{714971 + 13108305 + 23412361}{8787882 + 15996270} = \frac{37235637}{24784152}:$$ ó

$\beta = 56^\circ\ 21'$; solo $6^\circ\ 10'$ mayor de la que hallamos antes: de suerte, que de navegar el Navío con todo su aparejo, á navegar con solas las dos Mayores, no resulta en el ángulo β, en este caso de $\gamma = 134^\circ$, sino

la corta diferencia de los $6^\circ\ 10'$. Si colocamos este nuevo valor de β, con el que resulta de $\alpha = 77^\circ\ 39'$, $G\ \frac{78}{100}$, $A^2 = 5200$, y $\delta = 4^\circ\ 40'$, en el de u, será

$$u = \frac{\frac{78}{100}.5200.3316 V \operatorname{sen.}(77^\circ 39') \operatorname{sen}(51^\circ 41')}{\frac{78}{100}.5200.3316.\operatorname{se.}(56^\circ 21') \operatorname{se.}(51^\circ 41') + \frac{78}{100}.5200.294 \operatorname{cos.}(56^\circ 21') \operatorname{cos.}(51^\circ 41') + 20.3816.294}$$

$= \frac{10308383}{28692121} V$: ó proxîmamente $u = \frac{36}{100} V$; solo $\frac{1}{100} V$ mas de lo que hallamos antes (§. 351): de suerte, que aunque corriese el viento 50 pies por segundo, solo se grangearian $\frac{3}{10}$ de milla por hora, que con las $10\frac{1}{2}$ que segun el estilo de los Marineros anda el Navío, fueran $10\frac{4}{5}$ las que anduviera con el ángulo ventajoso.

364 Aunque á bolina está en los Navíos terminado el ángulo β, y se dificulta poderle variar en mucho, hay sin embargo medios para disminuirle en parte si necesario fuese: y en otras Embarcaciones cabe qualquiera enmienda; con que debemos inquirir el ángulo β que mayor velocidad produce dado el $\gamma = 65^\circ$: nos valdremos de los mismos exemplos dados (§. 352). Con viento suave hallamos en él, despreciando quebrados, $\delta = 8^\circ\ 20'$, $G = \frac{96}{100}$, y $A^2 = 23050$: lo que da $Q = \frac{96}{100}.23050(3316 - 294) = 66870816$, $F = 294(\frac{96}{100}\ 23050 \operatorname{cos.}(8^\circ 20') + 20.3316) = 25937987$, y

$$\operatorname{tang.}\beta = \frac{66870816 \operatorname{se.}\gamma \operatorname{se.}\delta \operatorname{cos.}\delta - 25937987 \operatorname{co.}(\gamma+\delta) + \sqrt{26937987(25937987 + 66870816 \operatorname{se.}\gamma \operatorname{se.}(\gamma-\delta))}}{66870816 \operatorname{sen.}\gamma \operatorname{cos.}\delta^2 + 25937987 \operatorname{sen.}(\gamma-\delta)}$$

$$= \frac{9028113 - 7439096 + 44563459}{59191247 + 24848320} = \frac{46152475}{84039567};$$ ó $\beta = 28^\circ\ 47'$: es el ángulo que debe formar la Verga con la Quilla, dado el de $\gamma = 65^\circ$, y $A^2 = 23050$ para conseguir el mayor andar. En los Navíos no es dable lograrlo, á menos que no se varíe el aparejo; pero con la Vela latina es facil disponerlo. Si colocamos, pues, este nuevo valor de β, con el que resulta $\alpha = 36^\circ\ 13'$, $G = \frac{96}{100}$, $A^2 = 23050$, y $\delta = 8^\circ\ 20'$, en el

el de u (§.352), será $u = \frac{\frac{96}{100}.23050.3316V\,sen.(36^\circ 13')\,sen.(20^\circ 07')}{\frac{96}{100}23050.3316\,se.(28^\circ 47')\,se.(20^\circ 7') + \frac{96}{100}23050.294\,cos.(28^\circ 47')\,cos.(20^\circ 7') + 20.3316.294}$

$= \frac{14910784.V}{12151977+5353993+19498080}$; ó proxîmamente $u = \frac{403}{1000} : \frac{68}{1000}V$ mas de lo que resultó (§. 352), usando del ángulo $\beta = 40^\circ$, segun regla de los Marineros: de suerte, que si corriese el viento 15 pies por segundo, auduviera el Navio $\frac{612}{1000}$ de milla mas con el ángulo $\beta = 28^\circ 47'$; que con las $2\frac{1}{10}$ que con el primero andaba, resultarian $2\frac{86}{100}$, que debiera andar con el segundo. Con viento fuerte es (§.352) $\delta = 21^\circ 04'$, y $G = \frac{9}{10}$, con que suponiendo que el Navío lleve las dos Mayores, será (§. 280) $A^2 = 6130$, que da $Q = \frac{9}{10}.6130(3316-294) = 16672375$, $F = 294(\frac{9}{10}.6130\,cos.(21^\circ 04') + 20.3316) = 21011668$, y

$tang.\beta = \frac{16672375\,se.\gamma\,se.\delta\,cos\,\delta - 21011668\,co.(\gamma+\delta) + \sqrt{21011668(21011668 + 16672375\,se.\gamma.2\,s(\gamma-\delta))}}{16672375\,sen.\gamma\,cos.\delta^2 + 21011668\,sen.(\gamma+\delta)}$

$= \frac{5068435 - 1441309 + 25724943}{13157942 + 20962169} = \frac{29352069}{34120111}$; ó proxîmamente $\beta = 40^\circ 42' : 12^\circ 55'$ mayor de lo que antes se halló para quando se lleve todo el velámen, y proxîmamente el mismo ángulo que estilan los Marineros. Si colocamos este nuevo valor de β, con el que resulta $\alpha = 24^\circ 18'$, $G = \frac{9}{10}$, $A^2 = 6130$, y $\delta = 21^\circ 04'$ en el de u, será $u = \frac{\frac{9}{10}.6130.3316.V\,sen.(24^\circ 18')\,sen.(19^\circ 38')}{\frac{9}{10}.6130.3316\,se.(40^\circ 42')\,se(19^\circ 38') + \frac{9}{10}.6130.294\,co.(40^\circ 41')\,co(19^\circ 38') + 20.3316.294}$

$= \frac{2529537.V}{4008383 + 1158201 + 19498080}$; ó proxîmamente $u = \frac{103}{1000}V$, lo mismo que se halló (§. 352) segun el

uso de los Marineros, y como debe resultar respecto á ser casi el mismo ángulo β el que ellos estilan en los Navíos.

365 Habiendo ya resuelto los ángulos ventajosos β que conviene usar, falta que resolvamos el γ que podrá hacer andar el Navío lo mas que es posible, y será el máximo de máximos. Es punto que extrañarán algunos, pues aunque siempre se ha creido que el viento largo es el que mas ventaja dá, ha sido fundandose en que de esta suerte portan mas Velas, ó no se cubren el viento las unas á las otras, como sucede en Popa, pues ya vimos (§.350) que de esta suerte solo es $A^2 = 12950$, quando á viento largo es (§.351) $= 17680$, y mas largo (§.352) $= 23050$; no por haber imaginado que aun con la misma Vela, ó cantidad de Velas que portan, pueda dar mayor andar el viento largo, como en efecto sucede. Podemos verificarnos de ello sin pasar mas adelante, solo con aplicar el valor de la velocidad u, al caso en que se coloque constante la α, ó que sea $sen.\alpha = 1$, pues siendo por ello $\delta = 0$. tendremos $u = \frac{GA^2RV sen.\beta}{GA^2R sen.\beta^2 + GA^2 r cos.\beta^2 + 20Rr}$: por lo que la velocidad á viento largo será á la velocidad en Popa, como $\frac{sen.\beta}{GA^2R sen.\beta^2 + GA^2 r cos.\beta^2 + 20Rr}$ á $\frac{1}{GA^2R + 20Rr}$, ó como $\frac{(GA^2R + 20Rr) sen.\beta}{GA^2R se.\beta^2 + GA^2 r cos.\beta^2 + 20Rr}$ á la unidad; ó substituyendo $GA^2 = 12000$, $R = 3300$, y $r = 300$, como $\frac{(12.33 + 2.33.3) sen.\beta}{(12.33) sen.\beta^2 + 12.3 sen.\beta^2 + 2.33.3}$ á la unidad: esto es, reduciendo, como $\frac{33 sen.\beta}{20 sen.\beta^2 + 13}$ á la unidad: de suerte, que siempre que sea $\frac{33 sen\beta}{20 se.\beta^2 + 13}$ mayor que la unidad, andará mas el Navío á viento lar-

largo que en Popa, y esto con la misma Vela que porte GA^2; pero substituyendo $sen.\beta = \frac{4}{5}$, es - - - -
$\frac{33 sen.\beta}{20 sen.\beta^2 + 13} = \frac{26\frac{2}{5}}{25\frac{4}{5}}$: luego á viento largo siendo $\alpha = 90^\circ$, $sen.\beta = \frac{4}{5}$, y $GA^2 = 12000$, andará el Navío mas que en Popa.

366 Sabemos, pues, que hay cierta disposicion de viento con que el Navío andará lo mas que es posible. Para hallarla, diferenciemos el valor de $u =$ - - - - - -
$\frac{GA^2 RV sen.(\beta-\delta)(sen.\gamma cos.\beta - cos.\gamma sen.\beta)}{GA^2 R sen.\beta se.(\beta-\delta) + GA^2 r cos.\beta cos.(\beta-\delta) + 20Rr}$, suponiendo β constante, y solo γ variable; é igualando la diferencial á cero, será $cos.\gamma cos.\beta + sen.\gamma sen.\beta = 0$, ó $cos.(\gamma-\beta) = cos.\alpha = 0$; y $sen.\alpha = 1$: lo que ya manifiesta que el viento mas favorable es aquel que cae perpendicularmente sobre la Verga, segun lo supusimos en el §. precedente: y que por consiguiente es en el caso $\delta = 0$. De la misma equacion $cos.\gamma cos.\beta + sen.\gamma sen.\beta = 0$, resulta tambien $1 = -tang.\gamma tang.\beta$; ó $tang.\beta = -\frac{cos.\gamma}{sen.\gamma}$, cuyo valor substituido en la equacion que da la β ventajosa (§. 360) con $\delta = 0$, será $-\frac{cos.\gamma}{sen.\gamma} = \frac{-F cos.\gamma + \sqrt{F^2 + QF sen.\gamma^2}}{Q sen.\gamma + F sen.\gamma}$; ó $-Q cos.\gamma = \sqrt{F^2 + QF sen.\gamma^2}$: y quadrando $Q^2 cos.\gamma^2 =$ - - - - $F^2 + QF sen.\gamma^2 = F^2 cos.\gamma^2 + (F^2 + QF) sen.\gamma^2$; ó - - $(Q^2 - F^2) cos.\gamma^2 = (F^2 + QF) sen.\gamma^2$, que da $tang.\gamma^2 = \frac{Q-F}{F}$: es el quadrado de la tangente del verdadero ángulo γ que debe formar el viento con la Quilla, para que ande el Navío lo mas que sea posible; ó si en lugar de Q y de F substituimos sus valores (§. 360), será $tang.\gamma^2 = \frac{GA^2(R-r)}{(GA^2 + 20R)r} - 1$.

Este

367 Este valor no es pues constante, depende de las cantidades R, r, A^2 y G: con que no solo varia en los distintos Navíos ó Embarcaciones, sino tambien en el propio, quando altera su Velámen, ó quando varia la fuerza del viento: de suerte, que quanto menor sea la resistencia r de la Proa, respecto á la del costado R, mas abierto ó mayor será el ángulo ventajoso; y lo mismo quanto mayores sean A^2 ó G: esto es, quanta mas Vela largue el Navío, ó menor sea el viento. De esta suerte, para saber quando el viento en Popa será mas ventajoso, supondremos $tang.\gamma = 0 = \frac{GA^2(R-r)}{(GA^2+20R)r} - 1$, y será para este caso $GA^2(R-r) = (GA^2+20R)r$, que da $GA^2 = \frac{20Rr}{R-2r}$: de suerte, que quando fuere $GA^2 = \frac{20Rr}{R-2r}$, será el viento en Popa con el que andará el Navío, lo mas que es posible: y al paso que aumente mas y mas Vela, será otro viento mas y mas abierto el que le haga andar mas. En el Navío de 60 Cañones de nuestro exemplo, en que es $R = 3316$, y $r = 294$, será $\frac{20Rr}{R-2r} = \frac{19498080}{2728} = 7147$: y poniendo (§. 351) $G = \frac{4}{5}$, tendremos $A^2 = 8934$, es el velámen que debe llevar para que el viento en Popa le sea el mas ventajoso. Luego que lleve mas, será otro mas abierto: y para hallar el caso en que le necesite lo mas abierto, pongamos $A^2 = 17680$ (§. 351), que és todo el velámen que á viento largo porta, en la equacion $tang.\gamma^2 = \frac{GA^2(R-r)}{(GA^2+20R)r} - 1$, con $G = \frac{4}{5}$, $R = 3316$, y $r = 294$, y será $tang.\gamma^2 = \frac{\frac{4}{5}.17680(3022)}{\frac{4}{5}.17680.294+19498080} - 1$. ó proxîmamente $\gamma = 138° 04'$: de suerte, que el viento

to debe abrir por la Popa de $41^\circ\ 56'$ para que le sea el mas ventajoso llevando todo el aparejo, ó $A^2 = 17680$. Llevando solo 8934, acabamos de decir que será el viento en Popa, ó $\gamma = 180^\circ$: con que todos los ángulos intermedios entre 180° y $138^\circ\ 04'$ corresponden á los velámenes intermedios entre 8934, y 17680. Con menores velámenes que el 8934 es asimismo el viento en Popa, pues en tal caso *tang.*γ es imaginario, por ser en la equacion $tang.\gamma^2 = \frac{GA^2(R-r)}{(GA^2+20R)r} - 1$, $\frac{GA^2(R-r)}{(GA^2+20R)r} < 1$.

368 Teniendo el ángulo γ mas ventajoso, podemos hallar la velocidad máxima de máximas, substituyendo en el valor de u los correspondientes á α y β. α, ó *sen.*α, ya diximos (§.366) que es $= 1$; y en el mismo §. hallamos $tang.\beta = -\frac{1}{tang.\gamma}$, ó $tang.\beta^2 = \frac{1}{tan.\gamma^2} = \frac{F}{Q-F}$: luego $\frac{sen.\beta^2}{cof.\beta^2} = \frac{F}{Q-F}$, que da $sen.\beta = \sqrt{\frac{F}{Q}}$, y $cof.\beta = \left(\frac{Q-F}{F}\right)^{\frac{1}{2}}$. Será, pues, con esto la máxima de máximas $u = \frac{GA^2RV.\sqrt{\frac{F}{Q}}}{GA^2R.\frac{F}{Q}+GA^2r.\frac{Q-F}{Q}+20Rr} = \frac{GA^2RV\sqrt{QF}}{GA^2RF+GA^2r(Q-F)+20Rr}$. Poniendo ahora en el Navío de 60 Cañones $G = \frac{4}{5}$, $A^2 = 17680$, $R = 3316$, $r = 294$, $Q = GA^2(R-r)$, y $F = GA^2r+20Rr$, será el máximo de máximos $u = \frac{34891360}{47411745}V$; ó proximamente $u = \frac{74}{100}V$, diez centésimos mas de lo que hallamos (§.351) casi con el mismo viento, por haber colocado allí, segun estilo de los Marineros, $\beta = 70^\circ$,

y

y $\alpha = 64^\circ$, quando aquí fueron $\beta = 48^\circ\ 04'$, y $\alpha = 90^\circ$. Si el viento corriese, pues, 15 pies por segundo, andaría el Navío $11\frac{1}{10}$, que equivalen á $6\frac{66}{100}$ millas por hora, $\frac{9}{10}$ de milla mas que lo hallado antes (§. 351). Pero no es en el Navío donde se nota mayor esta diferencia, que se hace mas sensible al paso que es mayor la relacion $\frac{R}{r}$. En un Xabeque es (§. 348) $A^2 = 9000$, $R = 700$, $r = 60$, y poniendo $G = \frac{4}{5}$, se halla $\beta = 26^\circ\ 41'$, $\gamma = 116^\circ\ 41'$, y la máxîma de máxîmas $u = \frac{16865496}{10319998}V$, ó proxîmamente $u = \frac{163}{100}V$; esto es, la velocidad del Xaveque una vez, y cerca de dos tercios tanta como la del viento. Si este corriese, pues, 15 pies por segundo, andaría el Xaveque $24\frac{45}{100}$, que equivalen á $14\frac{67}{106}$ millas por hora. Si al contrario se coloca $\beta = 60$, y $\alpha = 56^\circ\ 41'$, como ordinariamente hacen los Marineros, resulta $u = \frac{99}{100}V$; cuyo andar equivale, corriendo el viento 15 por segundo, á $8\frac{1}{4}$ millas por hora, $6\frac{2}{5}$ millas menos que antes. Esta diferencia es tan considerable que merece la mayor atencion del buen Marinero: es verdad que el ángulo $\beta = 26^\circ\ 41'$ que se necesita formar es bien agudo; pero con la Vela latina ninguna dificultad hay de conseguirle, y quando la hubiese se debiera procurar aproxîmarse á él quanto fuera dable.

369 El exâmen de la velocidad lateral $v = \frac{GA^2 rV cos.(\beta-\delta)(sen.\gamma cos.\beta - cos.\gamma sen.\beta)}{GAR sen.(\beta-\delta) sen.\beta + GA^2 r cos.(\beta-\delta) cos.\beta + 20Rr}$, en quanto á la alteracion que en ella puede producir la variacion del ángulo β, no necesita tanta detencion, pues la misma fórmula manifiesta, que quanto menor sea dicho ángulo, mayor será la velocidad, puesto que con ello aumenta en el numerador $sen.\gamma cos.\beta cos.(\beta-\delta)$, dis-

disminuye mas $cos.\gamma sen.\beta cos.(\beta-\delta)$ en los ángulos agudos, que son los que en esto nos importan, y disminuye el denominador. De esto se sigue, que con los ángulos ventajosos derivará mas que con los usados por los Marineros; pero esta diferencia no es tan grande que merezca la mayor alteracion en aquellos: basta para persuadirse indagar en ambos casos el valor de $tang.\theta$ (§.353) $= \frac{r}{R\,tang.(\beta-\delta)}$. Colocando, pues, el ángulo ventajoso (§.364) $\beta = 28^\circ\, 47'$, con $\delta = 8^\circ\, 20'$, será $tang.\theta = \frac{294}{3316\,tang.(20^\circ\, 27')}$, ó $\theta = 13^\circ\, 22'\tfrac{1}{2}$; pero este mismo ángulo se halló (§.353), segun los Marineros, $= 8^\circ\, 12'\tfrac{1}{2}$: luego la diferencia se reduce á $5^\circ\, 10'$: cantidad despreciable, sobre todo quando no se trata de ganar barlovento.

370 En la velocidad obliqua tampoco necesitamos detenernos, pues de ella á la directa hay poca diferencia, para que nos obligue á extendernos mas en el asunto.

371 Nos queda solo por ultimo que especular la velocidad con que se sale á barlovento, y las ventajas que sobre ello nos puede dar la disposicion de las Velas. La fórmula es (§.343) W = ----------

$$\frac{GA^2V(R\,cos.\gamma se.(\beta-\delta)-r\,sen.\gamma cos.(\beta-\delta))(se.\gamma cos.\beta-cos.\gamma se.\beta)}{GA^2R\,sen.\beta sen.(\beta-\delta)+GA^2r\,cos.\beta cos.(\beta-\delta)+2QRr}:$$

que diferenciada, suponiendo la β variable, y γ constante, á fin de hallar la ventajosa β, resulta -----

$$\big(R\,co.\gamma co.(\beta-\delta)+r\,se.\gamma se.(\beta-\delta)\big)(se.\gamma co.\beta-co.\gamma se.\beta)(Q\,se.\beta se.(\beta-\delta)+F)$$

$$-(se.\gamma se.\beta+co.\gamma co.\beta)\big(R\,co.\gamma se(\beta-\delta)-r\,se\gamma co.(\beta-\delta)\big)(Q\,se\beta se(\beta-\delta)+F)$$

$$-Q(co.\beta se.(\beta-\delta)+se.\beta co.(\beta-\delta)\big(R\,cos.\gamma se.(\beta-\delta)-r\,se.\gamma cos.(\beta-\delta)\big)$$

$(se.\gamma cos.\beta-cos.\gamma se.\beta)=0$, suponiendo, como antes,

$GA^2(R-r)=Q$, y $F=GA^2 r\cos.\delta+20Rr$: de donde se deduce despues de despejar - - - - - - - - - - -

$$\left.\begin{array}{l} Q\left\{\begin{array}{l} R\,tan.\gamma \\ -r\,ta.\gamma^2 ta.\delta \\ r\,tan.\gamma \\ r\,tan.\gamma\,tan.\delta^2 \end{array}\right. \\ F\left\{\begin{array}{l} R\,tan.\gamma \\ R\,tan.\delta \\ r\,tan.\gamma \\ r\,tan.\gamma^2 ta.\delta^2 \end{array}\right. \end{array}\right\} tan.\beta^2 \quad \left.\begin{array}{l} Q\left\{\begin{array}{l} -2R\,tan.\gamma\,tan.\delta \\ -2r\,tan.\gamma^2 \end{array}\right. \\ F\left\{\begin{array}{l} -R\,tan.\gamma\,tan.\delta \\ +2R \\ -2r\,tan.\gamma \\ -2r\,tan.\gamma\,tan.\delta \end{array}\right. \end{array}\right\} tan.\beta \quad \left.\begin{array}{l} Q\left\{\begin{array}{l} R\,tan.\gamma\,ta.\delta^2 \\ r\,tan.\gamma^2 tan.\delta \end{array}\right. \\ F\left\{\begin{array}{l} -R\,tan.\gamma \\ -R\,tan.\delta \\ -r\,tan.\gamma \\ r\,tan.\gamma^2 tan.\delta \end{array}\right. \end{array}\right\} = 0$$

Es la equacion que dará el mas ventajoso valor de β, dado constante el de γ, con que se quiere navegar. Pero sin detenernos en tentativas ó exemplos sobre esta equacion, bien se ve, que no solo del valor de β depende la ventaja de ganar el barlovento. Si se supone $tan.\gamma=\infty$, ó se navega sobre la perpendicular del viento, bien es cierto que no se gana, antes se pierde barlovento, puesto que el valor de W viene negativo: y del mismo modo si suponemos $\gamma=0$; por lo que hay tambien un valor de γ que dá el máximo andar, ó salir á barlovento. Para hallarle, volveremos á diferenciar la fórmula, suponiendo β constante, y γ variable; lo que hecho dá - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$(\cos.\gamma\cos.\beta+\sin.\gamma\sin.\beta)\big(R\cos.\gamma\sin.(\beta-\delta)-r\sin.\gamma\cos.(\beta-\delta)\big)$$
$$-\big(R\sin.\gamma\sin.(\beta-\delta)+r\cos.\gamma\cos.(\beta-\delta)\big)(\sin.\gamma\cos.\beta-\cos.\gamma\sin.\beta)=0:$$

de que, despues de haber despejado; resulta - - - - - -

$$tan.\beta^2+\frac{(R+r)(1-ta.\gamma^2-2ta.\gamma ta.\delta)}{2R\,tan.\gamma+r\,tan.\delta(1-tan.\gamma^2)}ta.\beta-\frac{R\,ta.\delta(1-ta.\gamma^2)+2r\,ta.\gamma}{2R\,ta.\gamma+r\,ta.\delta(1-ta.\gamma^2)}=0.$$

Si en esta equacion se substituye el valor de β hallado por

por la antecedente, dará de resulta el de γ, y serán los dos ventajosos con que se ganará lo mas que es posible el barlovento. Omitimos la substitucion por ser dilatadísima la equacion que resulta para que la incluyamos, y porque qualquiera puede executarlo, dadas ya las dos equaciones.

372 Para llegar al perfecto conocimiento de lo que nos enseña esta theórica, debemos aplicarla en el Navío á los dos casos extremos de poco viento con toda la Vela, y de mucho viento con poca Vela. En el primero podemos poner $\delta = 0$, y quedarán las dos equaciones en $tan.\beta^2 + \frac{(R+r)(1-tan.\gamma^2)}{2R\,tan.\gamma}\,tan.\beta - \frac{r}{R} = 0$, y $tan.\beta^2 + \frac{2(FR-r(Q+F)tan.\gamma^2)}{(Q+F)(R+r)tan.\gamma}\,tan.\beta - \frac{F\,tan.\gamma}{Q+F} = 0$; ó substituyendo los valores de Q (§.360) $= GA^2(R-r)$, $F = r(GA^2 cos.\delta + 20R)$, $G = 1$, $A^2 =$ (§.352) 23059, $R = 3316$, y $r = 294$, quedarán en $tan\beta^2 + \frac{3610(1-tan.\gamma^2)}{2.3316\,tan.\gamma}\,tan.\beta - \frac{294}{3316} = 0$, y $tang.\beta^2 + \frac{2.294(8937-2893\,tan.\gamma^2)}{3610.2893\,tan.\gamma}\,tan.\beta - \frac{294.8937\,tan.\gamma}{3316.2893} = 0$: que resueltas dan $\gamma = 56°$, y $\beta = 30°\,33'$: son los ángulos ventajosos que han de formar viento y Vergas con la Quilla, para que el Navío gane lo mas que es posible á barlovento; supuesto que lleve todo el aparejo, y que el viento sea muy poco. El primer ángulo es menor que el que estilan los Marineros (§.275) de 9°, y el segundo de 9° 27'.

373 Para el segundo caso extremo pondremos (§.352) $\delta = 21°$, ó $tan.\delta = ,383864$, $G = \frac{9}{10}$, y $A^2 = 6130$, y quedarán las dos equaciones en - - - - - - -
$$tang.\beta^2 + \frac{3610(1-,767728\,tan.\gamma - tan.\gamma^2)}{112,856(1-tan.\gamma^2)+6632\,tan.\gamma}\,tang.\beta - -$$

$$\frac{1272{,}89(1-tang.\gamma^2)+588tang.\gamma}{112{,}856(1-tan.\gamma^2)+6632tang.\gamma}=0 \text{, y} \text{------}$$

$$tang.\beta^2-\frac{2(32089tang.\gamma^2+18784tan.\gamma-33690)}{99823tan.\gamma+tan.\gamma^2}+$$

$$\frac{2057tan.\gamma^2-32740tang.\gamma-12932}{99823tan.\gamma+tang.\gamma^2}=0$$

; que resueltas, dan $\gamma = 84^\circ\, 44'$, y $\beta = 82^\circ\, 14'$ son los ángulos ventajosos que han de formar viento y Vergas con la Quilla, para que el Navío gane lo mas que es posible á barlovento; supuesto que lleve siempre las dos Mayores, y que el viento sea muy fuerte. El primer ángulo es mayor que el que estílan los Marineros de $19^\circ\, 16'$, y el segundo de $42^\circ\, 14'$, ó es, con corta diferencia, duplo del que se practica. Este ángulo ventajoso no conviene, sin emborgo, ponerle en uso por razones que mas adelante se exponen.

374 Los dos exemplos antecedentes resuelven los dos casos extremos en que cabe la mayor diferencia en los ángulos γ y β; pero se hallan complicados con las resultas que producen la vela y el viento: para hallar la que de sola la alteracion de la Vela cabe, podemos resolver las dos equaciones, suponiendo, como en el primer caso, el viento corto, ó $\delta = 0$; pero con sola la Vela del segundo $A^2 = 6130$. En este tercer caso será asimismo $G = 1$: con que se reducirán las dos equaciones á $tan.\beta^2 + \frac{3610(1-tan.\gamma^2)}{2.3316tan.\gamma}tan.\beta - \frac{294}{3316} = 0$, y

$$tan.\beta^2+\frac{2.294(7245-1201tan.\gamma^2)}{3316.1201tan.\gamma}tan.\beta-\frac{294.7245ta.\gamma}{3316.1201}=0;$$

que resueltas dan $\gamma = 66^\circ\, 13'$, y $\beta = 47^\circ 20'$: son los ángulos ventajosos que deben formar el viento y Vergas con la Quilla, para ganar lo mas que es posible á barlovento, supuesto el viento poquisimo, y la Vela sólo 6130 pies quadrados.

375 De llevar toda la Vela, á no llevar sino poca,

va de diferencia en los ángulos, siendo el viento corto, desde $56°$, y $30° 33'$, á $66° 13'$, y $47° 20'$: esto es, $10° 13'$ en el ángulo del viento, y $16° 47'$ en el de las Vergas. Y de poco á mucho viento, ambos casos con poca Vela, va de diferencia desde $66° 13'$, y $47° 20'$ á $84° 44'$, y $82° 14'$: esto es, $18° 31'$ en el ángulo del viento, y $34° 54'$ en el de las Vergas: donde se ve que al paso que aumente el viento, y disminuyan las Velas, deben aumentar los ángulos, siendo los extremos los dos primeros casos asignados.

376 Para hacer patente ahora la ventaja que nos pueden producir estos ángulos, hallaremos la velocidad W con que se sale á barlovento; tanto usando de estos mismos ángulos, como de los que se sirven los Marineros: y para mayor facilidad reduciremos el caso al de toda la Vela y poco viento, ó $\delta = 0$, y $G = 1$, en que la fórmula (§. 342) se reduce á $W = \frac{A^2 V sen.\alpha(R cos.\gamma sen.\beta - r sen.\gamma cos.\beta)}{A^2 R sen.\beta^2 + A^2 r cos.\beta^2 + 20 R r}$; ó substituyendo (§.352) $A^2 = 23050$, $R = 3316$, y $r = 294$, á $W = \frac{23050.V sen.\alpha(R cos.\gamma sen.\beta - r sen.\gamma cos.\beta)}{23050.3316 sen.\beta^2 + 23050,294 cos.\beta^2 + 19498080}$. Poniendo, pues, en esta los ángulos ventajosos (§.372) $\gamma = 56°$, y $\beta = 30° 33'$, se reduce á $W = \frac{725649}{4427128} V$; ó proxîmamente $W = \frac{164}{1000} V$: y poniendo, segun los Marineros, $\gamma = 65°$, y $\beta = 40°$, se reduce á $W = \frac{678467}{5505534} V$; ó proxîmamente $W = \frac{125}{1000} V$: de suerte, que con los ángulos ventajosos se puede ganar casi una tercera parte mas á barlovento de lo que hoy se consigue.

377 Esto parece que debe bastar, para que los Marineros procuren disminuir los ángulos, ya sea por me-

medio de trozas, ya sea arriando los Obenques proeles de sotavento; pues como solo en caso de poco viento se necesitan formar estos ángulos tan agudos, da lugar esta casualidad para poder sujetar de nuevo Obenques y Vergas, quando el viento aumente, sin que por ello se dexen de formar los ángulos ventajosos mas crecidos que se necesitaren. Con Velas latinas son aun mas agudos los mismos ángulos, respecto á que las Embarcaciones que las usan tienen mayor la razon $\frac{R}{r}$; pero dan lugar sus Vergas á que se formen segun se requieren.

378 El valor de β hallado para ganar barlovento, bien se ve que no es el mismo que el hallado (§.366) que da la máxima velocidad directa, puesto que ambos resultaron de tan diversas equaciones; por cuyo motivo no se debe usar del primero, aunque se vaya á bolina, sino en caso de ganar barlovento: quando solo se trate de andar, será el segundo el que se deba poner en práctica.

CAPITULO 3.

De la inclinacion que toma el Navío, obligado de la fuerza que hace el viento en las Velas.

379 YA dimos (*Lib. 2. Cap. 6.*) el aguante ó momentos con que el costado del Navío resiste la inclinacion, que es legitimamente lo que debe llamarse aguante de Vela; y quando procede de resulta de la fuerza con que esta actúa. Dimos tambien (§.281) los momentos de la Vela, y por los principios dados debe haber equilibrio en la inclinacion, quando ambos momentos se igualan: de suerte, que formando

con

con ellos una equacion, dará esta el valor de la inclinacion. Si los momentos del costado fueran infinitos, respecto á los de la Vela, fuera la inclinacion cero; pero como la Manga del Navío no puede ser muy grande, han de ser aquellos limitados, y por consiguiente precisa la inclinacion. Pudiera tambien disminuir esta, disminuyendo los momentos de la Vela, ó baxando mucho el centro de las fuerzas de ellas (§.281); pero tambien esto tiene inconvenientes invencibles en la práctica, particularmente del Mar: y así no podemos remediar absolutamente este inconveniente, que en ocasiones puede ser fatal.

380 Los momentos con que el costado actua son (§.205. 215) $= mKU\,se.\Delta + \frac{2}{3}\left(mvkR + \frac{1}{2}mv\int chx^{\frac{1}{2}}y - \frac{1}{2}mv\int fgx^{\frac{3}{2}}\right)$ suponiendo que Δ es el angulo de la inclinacion, m la densidad del agua, U el volúmen de fluido que desocupa el Navío, y v su velocidad, que en este caso es la lateral.

381 Los momentos con que la Vela actua se hallaron (§.281) $= \frac{1}{20}nmVGA^2 sen.\alpha$, expresando n la altura del centro de las fuerzas de las Velas sobre el exe de la rotacion; pero estos momentos son segun la direccion en que actua la Vela, y en caso en que, siendo V la velocidad del viento, esté la Vela parada, ó el Navío sin movimiento alguno. Es preciso reducirlos á laterales, y al caso en que el Navío ande, y que no actue toda la fuerza del viento sobre la Vela. La velocidad con que esta actua perpendicularmente la hallamos (§.338) $= V sen.\alpha - u sen.\beta - v cos.\beta$, y es la cantidad que debemos substituir en lugar de $V sen.\alpha$ solo: y asimismo la fuerza en que actua la Vela, es á la lateral (§.338), como la unidad á $cos.(\beta - \delta)$; con que para reducir aquella á esta, no hay sino multiplicar por $cos.(\beta - \delta)$: serán, pues, los momentos laterales, que padece la Vela $= \frac{1}{20}nmGA^2 cos.(\beta - \delta)(V se.\alpha - u se.\beta - v cos.\beta)$.

Las

382 Las cantidades u y v denotan las velocidades directa y lateral que el Navío toma. La primera se halló (§.339) $= \frac{GA^2RV fen.\alpha fen.(\beta-\delta)}{GA^2R fe.\beta fe.(\beta-\delta)+GA^2 r cof.\beta cof.(\beta-\delta)+2oRr}$, y la segunda $= \frac{GA^2 r V fen.\alpha cof.(\beta-\delta)}{GA^2R fe.\beta fe.(\beta-\delta)+GA^2 r cof.\beta cof.(\beta-\delta)+2oRr}$: substituidas en la expresion ó fórmula de los momentos laterales, quedan estos $= \frac{1}{20} nm GA^2 co(\beta-\delta)\left(V fe.\alpha - \frac{GA^2 fen.\alpha(R fen.\beta fen.(\beta-\delta)+r cof.\beta cof.(\beta-\delta))}{GA^2R fe.\beta fe.(\beta-\delta)+GA^2 rco.\beta co.(\beta-\delta)+2oRr}\right)$ $= \frac{nm GA^2 VRr fen.\alpha cof.(\beta-\delta)}{GA^2R fen.\beta fen.(\beta-\delta)+GA^2 r cof.\beta cof.(\beta-\delta)+2oRr}$: que (§.215) se reduce á $\frac{\frac{2}{3} nm GA^2 VRr fen.\alpha cof.(\beta-\delta)}{GA^2R fen.\beta fen.(\beta-\delta)+GA^2 r cof.\beta cof.(\beta-\delta)+2oRr}$. Igualando ahora estos á los que padece el costado del Navío, partiendo unos y otros por m, tendremos la equacion $KU fen.\Delta + \frac{2}{3}\left(ukR + \frac{1}{2}v\int cbx^{\frac{1}{2}}y - \frac{1}{2}v\int fgx^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\frac{2}{3} n GA^2 VRr fen.\alpha cof.(\beta-\delta)}{GA^2R fe.\beta fe.(\beta-\delta)+GA^2 r cof.\beta cof.(\beta-\delta)+2oRr}$, que da el seno de la inclinacion del Navío $fen.\Delta = \frac{\frac{\frac{2}{3} n GA^2 VRr fen.\alpha cof.(\beta-\delta)}{GA^2R fe.\beta fe.(\beta-\delta)+GA^2 rco.\beta co(\beta-\delta)+2oRr} - \frac{2}{3}v\left(kR + \frac{1}{2}\int cbx^{\frac{1}{2}}y - \frac{1}{2}\int fgx^{\frac{3}{2}}\right)}{KU}$.

383 Esta fórmula se puede simplificar mucho por otro medio, pues los momentos laterales de las Velas $\frac{n GA^2 VRr fen.\alpha cof.(\beta-\delta)}{GA^2R fen.\beta fen.(\beta-\delta)+GA^2 r cof.\beta co.(\beta-\delta)+2oRr}$ no son sino el producto de la velocidad lateral $v = \frac{GA^2 r V fen.\alpha cof.(\beta-\delta)}{GA^2R fe.\beta fe.(\beta-\delta)+GA^2 r cof.\beta cof.(\beta-\delta)+2oRr}$ multiplicada por nR: con que substituyendo este valor, tambien

bien será $sen.\Delta = \frac{\frac{2}{3}v\left(nR - kR - \frac{1}{2}\int chx^{\frac{1}{2}}y + \frac{1}{2}\int fgx^{\frac{3}{2}}\right)}{KU}$

porque es (§.340) $v = \frac{ru}{Rtang.(\beta - \delta)}$, será asimismo

$sen.\Delta = \frac{\frac{2}{3}ru\left(nR - kR - \frac{1}{2}\int chx^{\frac{1}{2}}y + \frac{1}{2}\int fgx^{\frac{3}{2}}\right)}{KURtang.(\beta - \delta)}$; ó si despreciamos las tres ultimas cantidades del numerador, como han hecho hasta aquí todos los Autores, será

$sen.\Delta = \frac{\frac{2}{3}nru}{KUtang.(\beta - \delta)} = \frac{\frac{2}{3}nRv}{KU}$.

384 Esta fórmula nos manifiesta no solo lo que importa que el centro de fuerzas de las Velas esté baxo, ó que disminuya la n, sino tambien que no sean muy curvas aquellas para que no aumente δ, pues quanto mas aumentare esta cantidad, ó tubieren mayor curvidad las Velas, tanto mayor será la inclinacion. (*a*)

Pa-

(*a*) *Mr. Bouguer* en su Tratado (*de la Mature des Vaiseaux*) solicitó el modo de evitar enteramente la inclinacion de los Navíos, por medio de baxar el centro de las Velas, ú de disminuir el valor de n: y llamó *Punto vélico* á aquel donde debe colocarse dicho centro, para que efectivamente carezca de inclinacion el Navío. Nuestra fórmula facilita la determinacion de este punto: para ello no hay sino igualar á cero su numerador; esto es, formar esta igualacion $nR - kR - \frac{1}{2}\int chx^{\frac{1}{2}}y + \frac{1}{2}\int fgx^{\frac{3}{2}} = 0$: pues da $n = k + \frac{1}{2}\left(\frac{\int chx^{\frac{1}{2}}y - \int fgx^{\frac{3}{2}}}{R}\right)$: es la altura que debe tener el centro de las fuerzas de las Velas, ó punto vélico sobre el centro de gravedad, para que el Navío quede

385 Para el Navío de 60 Cañones, con todo el Velámen que puede servir á bolina, se halló (§.282) $n = 70\frac{1}{2}$, r (§.187) $= 294$, K (§.166) $= 9\frac{1}{8}$, U (§.112) $= 68650$, y (§.352) $tang.(\beta - \delta) = tan.(31^\circ 40')$ $= ,6168$: luego será $sen.\Delta = \frac{\frac{1}{3}.70\frac{1}{2}.294.u}{9\frac{1}{8}.68650.6168} = \frac{331622}{9273321}u$. Si la velocidad del viento fuese, pues, de 10 pies por segundo, será (§.352) $u = \frac{335}{100}$, y $sen.\Delta = \frac{11109337}{92733210}$, ó proxîmamente el ángulo de la inclinacion $\Delta = 6^\circ 53'$: y si la velocidad del viento fuese de 15 pies por segundo, será (§.352) $u = \frac{21}{4}$, y $sen.\Delta = \frac{6964062}{37093284}$, ó proxîmamente el ángulo de la inclinacion $\Delta = 10^\circ 49'$.

Las

perfectamente derecho, sin embargo que el viento sea ó no violento, y que haya ú no mucha Vela; pero respecto que k denota la altura desde el centro de gravedad, hasta la superficie del fluido $\frac{\int chx^{\frac{1}{2}}y - \int fgx^{\frac{3}{2}}}{2R}$, será lo que el punto vélico debe estar elevado sobre la superficie del agua. En el Navío de 60 Cañones de nuestro exemplo, es (§.204) $\frac{1}{2}\int chx^{\frac{1}{2}}y = 25398$, $\frac{1}{2}\int fgx^{\frac{3}{2}}$ (§200) $= 40626$, y R $= 3316$; luego será $n = \frac{25398 - 40626}{3316} = -4\frac{1764}{3316}$: esto es, el punto vélico estubiera $4\frac{1}{2}$ pies debaxo de la superficie del agua: lo que prueba la imposibilidad del proyecto. *M. Bouguer* ya conoció esta dificultad, particularmente en las inclinaciones laterales (Sec.2 cap.3 §.3) y recurrió á disponer las Velas obliquas ó inclinadas al horizonte, apartando del Palo su canto baxo con botalones.

386 Las tres cantidades que omitimos de la fórmula, disminuyen estas inclinaciones; pero en el Navío de 60 de nuestro exemplo, se hacen despreciables; pues substituyendo sus valores (§. 205) es *sen.* $\Delta =$

$$\frac{\frac{2}{3}.294.u(70\frac{1}{2}.3316-4\frac{19}{24}.3316-25398+40626)}{9\frac{1}{8}.68650.3316.6168} =$$

$$\frac{\frac{2}{3}.294.u(70\frac{1}{2}.3316-661)}{9\frac{1}{8}.68650.3316.6168}$$: donde se ve que la segunda cantidad, que nace de las tres omitidas, no es sino $\frac{1}{353}$ de la primera; y por consiguiente no puede disminuir las antecedentes inclinaciones, sino de $\frac{1}{353}$: esto es, la primera de poco mas de un minuto, y la segunda de cerca de dos, cantidades despreciables. Por tanto, en este y otros Navíos semejantes, podemos admitir en

ge-

nes. Omitiremos, por no dilatarnos, el cúmulo de dificultades y riesgos á que esto estaria expuesto, asi como la pretension (Sec. 1 cap. 9 §. 4) de aumentar la longitud de las Vergas hasta dos, ó dos y media veces la que hoy se estila, pues esto no hay Marinero que á primera vista no lo perciba. El mismo *Mr. Bouguer* confiesa que las Vergas baxas estubieran expuestas á los golpes de Mar, y por lo tanto acorta las que debieran ponerse sobre la misma borda del Navío: lo mismo creo hubiera dicho de las otras, á saber que hay Navío que mete los penoles ó extremos de las que hoy se estilan debaxo del agua; y esto sin embargo de estar de dos á dos y media veces mas altas de lo que quisiera colocarlas nuestro Autor. Pero podemos hacerle la justicia (Sec. 1 cap. 9. §. 4) de que ya encarga que no se dén mas largos á las Vergas que los que permitan el poder orientar las Velas con comodidad: es lo bastante para que con otros reparos que omitimos, y se verán mas adelante, sobre la imposibilidad de conseguirse buen govierno, queden en el estado en que hoy se hallan.

general $sen.\Delta = \frac{\frac{2}{3}nru}{KU tang.(\beta-\delta)}$: que en el Navío de 60 se reduce á $sen.\Delta = \frac{784nu}{2505725.tang.(\beta-\delta)}$. En otros Navíos de Quadernas menos llenas en sus fondos, puede ser negativa la diferencia de las tres cantidades omitidas, y contribuir á aumentar la inclinacion, con mas exceso al paso que fueren aquellas mas agudas.

387 Volviendo, pues, á los exemplos, y supuestas aferradas todas las Velas menudas, Juanetes, y aun tomado un rizo á las Gabias, se halló (§.352) $G = \frac{93}{100}$, $\delta = 15°$, y $u = \frac{9785}{37753}V$: y siendo (§.282) $n = 63$, será $sen.\Delta = \frac{784.63.9785.V}{2505725.tang.(25°).37753} =$,010958V: de suerte, que si corriese el viento 20 pies por segundo, segun diximos (§.352), será $sen.\Delta = \frac{21917}{100000}$, ó proxîmamente el ángulo de la inclinacion $\Delta = 12° 40'$: y si corriese el viento 25 pies por segundo, será $sen.\Delta = \frac{273963}{1000000}$, ó proxîmamente el ángulo de la inclinacion $\Delta = 15° 54'$. Esta inclinacion parece excesiva, pues llegará con ella el agua un pie mas arriba que el canto baxo de las portas baxas: por cuyo motivo el aparejo que se supone, es demasiado para el viento que corra 25 pies por segundo. (a)

Si-

(a) Las inclinaciones de los Navíos nos dan motivo ahora para exponer otro absurdo muy evidente, que resulta del antiguo, ó hasta ahora creido systhema de las resistencias de los fluidos, como asimismo de las experiencias practicadas por *Mr. Mariotte*, de que hablamos en el

388 Siguiendo, pues, los exemplos (§.352), y supuesto que el Navío quede con las dos Mayores, Gabias tomados todos los rizos, Mesana y Contrafoque, siendo $G = \frac{2}{10}$, y $\delta = 21^\circ$, de que resultó $u = -\frac{489}{2874}V$, tendremos, por ser (§.282) $n = 55$,

sen.

el Escol. de la Prop. 36. Lib. 2. Tom. 1. Pero para que en ello no pueda quedar escrúpulo, no nos valdremos de nada que resulte del nuevamente propuesto. En la Nota que dimos al § 352 para el caso de ir de bolina con todo el Velamen 23050 pies quadrados, hallamos esta equacion $u = \frac{131}{1000}V$, y es la que resulta del mismo systhema creido. Demos, pues, que el Navío, con este aparejo, pueda andar 6 millas por hora: es algo dificil; pero es preciso suponer lo mas ventajoso, para que no quepa disculpa despues de la conseqüencia. En este caso será $u = 10 = \frac{131}{1000}V$, y tendremos $V = \frac{10000}{131}$, ó proxîmamente la velocidad del viento, que debe dar la supuesta al Navío, $= 76\frac{1}{3}$: velocidad espantosa; pero supongase asi por un instante á beneficio del systhema. En un andar tan particular de bolina, bien saben los Marineros que el Navío se debe inclinar considerablemente, quizas hasta estar al canto de las portas baxas en el agua, ó lo que es lo mismo, con un ángulo, cuyo seno sea $= \frac{1}{4}$; pero demos que solo sea $= \frac{1}{6}$, ó proxîmamente de solos $9\frac{1}{2}$ grados. Para el momento que en este caso padece el costado del Navío tomaremos esta expresion mKU*sen.*Δ, despreciando las demas cantidades, á fin de que todo vaya favorable al systhema: y siendo proxîmamente $m = 64$ libras, ó $\frac{64}{100}$ quintales, se reduce el momento á $\frac{64}{100}.9\frac{1}{8}.68650.\frac{1}{6}$. Este momento debe ser igual al que resulta de las Velas, y es el producto de la fuerza que estas hagan, por la distancia

des-

$sen.\Delta = \frac{784.55.489.V}{2505725.2874.tang.(19^\circ)}$ = proxîmamente $\frac{85V}{10000}$: de suerte, que si corriese el viento 25 pies por segundo, fuera $sen.\Delta = ,2125$, ó el ángulo de la inclinacion $= 12^\circ\ 16'$: y si corriese aquel 30, fuera
sen.

desde su centro de ellas, hasta el exe de la rotacion del Navío, que hallamos $= 70\frac{1}{2}$. Si llamamos, pues, F la fuerza que hicieren las Velas será $F.70\frac{1}{2} = \frac{64}{100}.9\frac{1}{8}.68650.\frac{1}{6}$ y $F = \frac{400916}{948}$: esto es, la fuerza de ellas equivalente al peso de 948 quintales. *Mr. Mariotte*, como diximos en la Nota citada, halló por sus experiencias que la fuerza que hace una superficie de medio pie Francés quadrado, expuesto á la corriente del Río de $3\frac{1}{4}$ pies por segundo, es de 9 onzas; ó siguiendo el systhema de que las resistencias son como los quadrados de las velocidades, de $\frac{16.9}{25}$ onzas en una corriente de un pie por segundo, ó siendo la superficie de un pie quadrado, de $\frac{4.16.9}{25}$ onzas: lo que conviene con lo que nos dice *Mr. Bouguer* (*Trat. del Navío*, lib. 3. sec. 1. cap. 2. pag. 357.), que da esta fuerza de 23 onzas. Reduciendo todo á medida Inglesa tendremos proxîmamente 18 onzas por la fuerza que hará la superficie de un pie quadrado expuesta á la corriente asimismo de un pie: y expuesta al viento, de $\frac{18}{1000}$ onzas, puesto que la densidad del agua dulce es á la del ayre, como 1000 á la unidad; pero el viento chocaba á las Velas con la velocidad de $76\frac{1}{3}$ pies: luego aumentando aquella cantidad en la razon del quadrado de esta, será proxîmamente 105 onzas la fuerza que suportará cada pie quadrado de Velamen, y esto sin descontar nada por el

aba-

sen.$\Delta = 2550$, ó el ángulo de la inclinacion $\Delta = 14^{\circ}46'$, de conformidad que con ella llegará el agua al canto inferior de las portas baxas. Ultimamente, supuesto que el Navío quede con solas las dos Mayores, y con los

abatimiento del Navío que disminuye la velocidad del viento: por consiguiente los 23050 pies quadrados suportarán la fuerza de 105.23050 onzas. Esta fuerza es en el caso de que cayera el viento perpendicularmente sobre la Vela, y de que se hiciese en direccion perpendicular á ella: para reducirla á fuerza lateral la hemos de multiplicar por *sen.αsen.βcos.β.*, ó proxîmamente por $\frac{208}{1000}$: será, pues, la fuerza lateral de las Velas $= 503412$ onzas, ó partiendo por 1600 onzas que tiene un quintal, será la misma fuerza proxîmamente de 315 quintales: cantidad bien apartada de los 948 que antes hallamos, siendo esta tres veces mayor. No puede decirse que esto haya dependido de la inclinacion que supusimos al Navío de $\frac{1}{6}$, ú de $9\frac{1}{2}$ grados, pues bastante corta es respective á la violencia del viento, ú del andar exorbitante de 6 millas á bolina con todo el aparejo ó velámen tendido: y mas si se atiende á que para conseguir la conformidad fuera preciso disminuir la inclinacion á la tercera parte: esto es, á solos $3^{\circ}\ 11'$; hecho manifiestamente imposible. No puede tampoco atribuirse á las velocidades supuestas en el viento y el Navío; porque para igual conformidad fuera necesario aumentarlas en la razon de 4 á 7: esto es, aquella suponerla de $133\frac{1}{2}$ pies por segundo, y esta de $18\frac{1}{2}$; pero en este caso el Navío debiera andar cerca de 11 millas por hora. De todo lo qual se sigue, que el defecto depende del erroneo principio seguido de las resistencias de los fluidos, y de las experiencias absolutamente equivocadas de *Mr. Mariotte*, que nos afirma igualmente *Mr. Bouguer*.

los mismos valores de G y δ, es (§.352) $u = \frac{103}{1000}V$, y (§.282) $n = 43$, con que será $\mathit{sen}.\Delta = \frac{784.43.103.V}{2505725.1000.\mathit{tang}.(19^\circ)}$, ó proxîmamente, $= \frac{4}{1000}V$: de suerte, que si el viento fuese de 30 pies por segundo, será la inclinacion $\Delta = 6^\circ\ 54'$: si de 40, $\Delta = 9^\circ\ 13'$: si de 50, $\Delta = 11^\circ\ 33'$; y si de 60, $\Delta = 13^\circ\ 54'$: por lo que el Navío, con las dos Velas mayores, es capaz de sufrir vientos violentisimos, con tal que las Velas ó los Palos no lo padezcan. Todos estos exemplos pueden variar segun el valor que se diere á δ; pero podemos persuadirnos á que la hemos supuesto algo crecida, particularmente en los exemplos de estos dos últimos parrafos, á excepcion del último, en que quedaron las dos Velas mayores solas; por lo qual las inclinaciones serán aun menores que las deducidas.

389 Por la fórmula dada (§.386) $\mathit{sen}.\Delta = \frac{784nu}{2505725\mathit{tang}.(\beta-\delta)}$ se puede inferir el Viento que pueden aguantar los Palos, Vergas, y Velas con un determinado aparejo. Supongamos que con todo él se haya observado que puede aguantar la arboladura hasta inclinarse el Navío de 12°, y tendremos $\mathit{sen}.12^\circ = \frac{784nu}{2505725\mathit{tan}.(\beta-\delta)}$; ó porque en este caso es (§.382) $n = 70\frac{1}{2}$, y $\mathit{tan}.(\beta-\delta) = \mathit{tan}.(31^\circ\ 40')$, con u (§.352) $= \frac{335}{1000}V$, será $\mathit{sen}.12^\circ = \frac{70\frac{1}{2}.784.335.V}{1000.2505725\mathit{tan}.(31^\circ 40')}$, y $V = \frac{1000.2505725\mathit{sen}.(12^\circ)\mathit{tan}.(31^\circ 40')}{70\frac{1}{2}.784.335}$: esto es, proxîmamente $V = 21\frac{85}{100}$ pies: velocidad de viento que á bolina puede aguantar el Navío con todo el aparejo largo. De la misma suerte se puede hallar en todos los demas casos.

No

390 No necesitamos indagar la inclinacion, navegando á viento largo, porque en este caso es *tan.*$(\beta - \delta)$ mayor, y por consiguiente menor la inclinacion. Pero no debemos pasar en silencio otro, que es el terror de los Marineros, que ha hecho perecer muchas Embarcaciones, y que, por falta de conocimiento perfecto, aun no se teme bastante: es lo que los Marineros llaman ***tomar por la alua.*** Redúcese el caso á que navegando con viento fuerte, sease por descuido del Timonel, ó porque el viento se mude de repente, llegan á tomar las *Velas en facha*: esto es, viene á impelerlas el viento por la parte opuesta de Proa ú de sotavento. En este caso *sen.*α es negativo, asi como la cantidad

$$\frac{\frac{2}{3}nGA^2VRr\,sen.\alpha\,cos.(\beta-\delta)}{GA^2R\,sen.\beta\,sen.(\beta-\delta)+GA^2r\,cos.\beta\,cos.(\beta-\delta)+20Rr}$$

por lo que la igualacion, ó valor del seno de la inclinacion, se reduce á

$$-sen.\Delta = \frac{\frac{2}{3}nGA^2VRr\,sen.\alpha\,cos.(\beta-\delta)}{KU(GA^2R\,sen.\beta\,sen(\beta-\delta)+GA^2r\,cos.\beta\,cos.(\beta-\delta)+20Rr)}$$

$$+\frac{2v}{3KU}\left(kR+\tfrac{1}{2}\int cbx^{\frac{1}{2}}y-\tfrac{1}{2}\int fgx^{\frac{3}{2}}\right),$$ no significando el signo negativo sino que la inclinacion es por el lado opuesto, como es notorio. Las dos cantidades tienen ahora el mismo signo, la segunda debe añadirse á la primera, lo que antes debia substraerse; pero no es esto aun lo mas particular: la primera, que parece del mismo valor que antes, ya no lo es, porque varía el valor de α, á causa de que el viento puede aumentar el ángulo que forme con las Velas, segun la *guiñada*, lo que el Navío abata, ó varíe el viento: de suerte, que puede llegar á ser *sen.*$\alpha = 1$; pero como quiera, la primera cantidad

$$\frac{\frac{2}{3}nru}{KU\,tang.(\beta-\delta)}$$

á que antes se reduxo la fórmula, será á la que ahora buscamos, en el caso de la aluada,

como *sen.*(25°) valor de *sen.α* quando se navega á bolína, á *sen.α* en el caso de la aluada, esto es, al seno del ángulo que formare el viento con las Velas en el caso de la aluada: de suerte, que si fuere este $=1$, tendremos para este caso $-sen.\Delta = \frac{\frac{2}{3}nru}{KU tan.(\beta-\delta) se.(25^\circ)}$: y así, para hallar estas inclinaciones, no hay sino partir las antecedentes por *sen.*(25°). En la ocasion de llevar las dos Mayores, hallamos (§. 388) $sen.\Delta = -\frac{4}{1000}V$: con que si en este caso aluase el Navio, será $-sen.\Delta = \frac{4V}{1000 sen.(25^\circ)}$, ó proxîmamente $= \frac{95}{10000}V$: de modo, que si el viento corriese 60 pies por segundo, sería $-\Delta = 34^\circ.41'$: inclinacion en que llegaria el agua un pie mas arriba que el canto baxo de las portas altas: el Combes se llenára de agua, y las mares pasaran por encima del bordo. Si á este infeliz estado se le agregara la mayor desgracia, que fuera arreciar el viento, aumentara la inclinacion, y se seguiria la precisa perdicion; si por fortuna no se hicieran antes pedazos las Velas ó los Palos. No se puede, por consiguiente, encargar mucho á los Marineros el cuidado que deben tener en lances tan arriesgados; es menester precaberlos para no verse en semejantes conflictos.

391 Si en la equacion (§. 383) $sen.\Delta = \frac{\frac{2}{3}nRv}{KU}$ substituimos el valor de K (§. 197) $= -H + \frac{se^3c}{12U}$, será tambien $sen.\Delta = \frac{\frac{2}{3}nRv}{-HU + \frac{1}{12}se^3c}$, ó colocando (§. 167) por H, su equivalente $\frac{HU-gw}{U+w}$, y por U la correspondiente $U+w$, será $sen.\Delta = \frac{\frac{2}{3}nRv}{-HU+gw+\frac{1}{12}se^3c}$

$= \frac{\frac{2}{3} nru}{(-HU + gw + \frac{1}{12} \int e^3 c) tan.(\beta - \delta)}$, en cuya equacion se tendrá presente, que U expresa el volúmen primitivo que el Navío tenia sumergido en el fluido, H la primitiva distancia vertical desde el centro de volúmen al de gravedad, w el volúmen aumentado ú disminuido, y g la distancia vertical desde el centro de este volúmen, hasta el del peso que se hubiere añadido ó substraido.

392 Esta equacion manifiesta, que si se añade lastre al Navío, el denominador aumenta de la cantidad gw, producto del volúmen que el Navío sumergiese de mas, por la distancia g desde el centro de este volúmen al centro del lastre; y por consiguiente, quanto mas baxo se pusiere el lastre ó peso, mayor será el producto, y menor la inclinacion: ó en general, siempre que se pusiere el peso mas baxo que la línea del agua, será positivo el producto, y mayor quanto se apartare de ella; y negativo si se pusiere encima de la línea del agua: en el primer caso será menor la inclinacion, y mayor en el segundo. Al contrario de esto debe suceder si se quitare el peso, porque w será negativo.

393 La cansidad $\int e^3 c$ depende, como vimos en el Tratado del Metacentro, en el largo y anchuras del Navío, y hallamos (§.153) $\frac{\int e^3 c}{12U} = 10\frac{1}{3}$: lo que da $\int e^3 c = 124U$. Si el Navío fuera compuesto de dos prismas triangulares, conservando el mismo volúmen, tubiera de profundidad cerca de $20\frac{7}{8}$ pies, y fuera $\int e^3 c = 45U$; y si fuera un paralelepípedo rectángulo con 11 pies de profundidad, se hallara $\int e^3 c = 180U$: donde se ve que el Navío toma un medio entre estas dos figuras, lo que puede servir de guia para proporcionar las amplitudes que convengan, quando se haga alguna alteracion: pues bien se

ve que con el mismo largo, ancho, y volúmen, el valor de $\int e^3 c$ en el Navío, es algo mas que los dos tercios del que resulta en el paralelepípedo, ú de los ocho tercios de los que resultan en los prismas.

394 La cantidad HU en Navíos semejantes es proxîmamente como las quartas potestades de las dimensiones lineares, y lo mismo $\int e^3 c$; pero nR es solo como los cubos: luego los senos de las inclinaciones en Navíos semejantes, será proxîmamente en razon inversa de las dimensiones lineares.

395 Concluída la theórica de las inclinaciones laterales del Navío, debemos dar algunas luces sobre las directas, ú de Popa á Proa; pues aunque por la suma longitud de la Embarcacion se hacen casi insensibles, es bueno tener conocimiento del grado y calidad de ellas, porque varian segun las circunstancias y fábrica, haciendose esencialisimo que de qualquiera especie que sean, no lleguen á ser considerables, no solo porque el Navío no altere la situacion horizontal que el Constructor premeditó le convenia, sino por otros fines que mas adelante se manifiestan.

396 La fuerza directa del Navío es (§. 339) $= mru$, é igual á la misma directa que hacen las Velas: con que siendo n la altura que tiene el centro de estas sobre el de gravedad, ó exe de rotacion, $\frac{2}{3}mnru$ será el momento directo de las mismas Velas. El de la Proa del Navío es (§§. 200 y 215) $= m\text{KU}\,sen.\Delta + \frac{2}{3}mu\left(kr + \frac{1}{2}\int cbx^{\frac{1}{2}}y - \frac{1}{2}\int fgx^{\frac{3}{2}}\right)$: luego en el equilibrio de aquellos, y estos momentos, será $\frac{2}{3}nmru = m\text{KU}\,sen.\Delta + \frac{2}{3}mu\left(kr + \frac{1}{2}\int cbx^{\frac{1}{2}}y - \frac{1}{2}\int fgx^{\frac{3}{2}}\right)$, que da $sen.\Delta = \dfrac{\frac{2}{3}u\left(nr - kr - \frac{1}{2}\int cbx^{\frac{1}{2}}y + \frac{1}{2}\int fgx^{\frac{3}{2}}\right)}{\text{KU}}$: donde se ve que esta inclinacion en ninguna manera depende de los ángulos

gulos que puedan formar las Velas con la Quilla, sino de la velocidad u á que es proporcional, venga esta por el medio que se quisiere. Para el Navío de 60 Cañones hallamos (§.206) $K = 114\frac{9}{24}$, $kr = 1409$, $\frac{1}{2}\int cbx^{\frac{1}{2}}y = 26970$, y $\frac{1}{2}\int fgx^{\frac{3}{2}} = 2568$: cuyos valores substituidos en la fórmula con $n = 70\frac{1}{2}$, y $U = 68650$, resulta $sen.\Delta = \frac{\frac{2}{3}u(70\frac{1}{2}.294 - 1409 - 26970 + 2568)}{114\frac{9}{24}.68650} = -\frac{3391u}{7851843}$: donde se ve, que en quantos casos se ofrecieren será siempre negativa la inclinacion Δ : lo que prueba que el Navío de nuestro exemplo, en lugar de inclinarse sumergiendo su Proa, la levanta mas y mas á medida que es mayor su velocidad u, y menor la elevacion del centro de las fuerzas de las Velas; pero aun en el caso extremo es cortisima, pues aunque se substituya $n = 70\frac{1}{2}$, y $u = 20$, ó el andar del Navío de 12 millas por hora, resulta $\Delta = 29' 41''$: inclinacion que no llega á medio grado, y por consiguiente se hace despreciable, aunque equivalga á suspenderse la Proa sobre el agua de 8 pulgadas. Otros Navíos que tengan sus Proas mas emparedadas, ó los costados que las forman, mas verticales, ó en forma de cuña, tendran otro suceso distinto, porque $\frac{1}{2}\int cbx^{\frac{1}{2}}y$ será en ellos mucho menor.

CA-

CAPITULO 4.

Del govierno del Navío.

397 DEspues de haber descripto exâctamente el Timon, con su figura, y mas ventajosas circunstancias, parece que ya no quedaba motivo que obligase á mayores especulaciones sobre el govierno; pero si bien se premeditan las fuerzas que actuan para el efecto, se verá, que aquel no es mas que uno de los agentes que contribuyen, y quizas no el mas eficáz.

398 Ya se dixo (§.297) que el Navío debe girar sobre un exe vertical, que pasa por su centro de gravedad, y que (§.216) dividido su movimiento horizontal en dos, uno directo y otro lateral, no resulta en el govierno ó rotacion efecto alguno por aquel: pues las fuerzas que se exercitan en ambos lados son iguales, y se destruyen mutuamente. No es lo propio por lo que toca al movimiento lateral: el centro de estas fuerzas se halló (§.224) en el Navío de 60 Cañones 11 $\frac{1}{2}$ pies mas á Popa que el centro de gravedad, y los momentos que resultan tienden continuamente á hacer arribar al Navío.

399 Para equilibrar estos no conocemos mas potencia que la de las Velas: si sus momentos obligan al Navío á orzar con igual fuerza, se conservará este sin girar, dirigiendose siempre al mismo rumbo, que es en lo que consiste el perfecto govierno: y como la fuerza lateral de las Velas es igual á la resistencia del costado, es preciso, para que ambos momentos sean iguales, que ambos centros concurran en el mismo punto.

400 Este es el modo de discurrir que ha conducido

cido

cido hasta ahora á todos los Geómetras. Si fuese E la Proa, F la Popa, C el centro de gravedad del Navío, G el de las resistencias laterales, y IG la direccion media de la fuerza resistente, compuesta de las dos lateral y directa, ú de la Proa, es preciso que el centro de las fuerzas de las Velas se halle asimismo en G, á fin de equilibrar las otras; pues dirigiendose tambien por GI, será el modo para que resulten los momentos iguales. Con esto se creyó haber hecho un particular descubrimiento (*a*); y se encargó que el punto G era el ventajoso para colocar el Palo, á no ser sino una sola Vela, ó el centro de todas á ser muchas. Sin embargo, este centro, muy lexos de hallarse en G, está (§. 285), llevando todo el aparejo en B, 12 pies mas á Proa que el centro de gravedad C: con que por aquella ilacion, seria preciso concluir, que el Navío debiera arribar con grandisima fuerza; pues no solo la potencia, ó fuerzas del costado contribuyen á ello, sino tambien la de las Velas. Con todo el Navío, muy lexos de arribar como persuade lo expresado, es de ordinario mas propenso á orzar, y consiste en lo que se sigue. Lam. 9. Fig. 48.

401 Sin embargo que el centro de las Velas se crea en B, por medio de la curvidad de las mismas se transfiere (§. 273) á D, siendo BD (§. 276) desde cero hasta $\frac{217}{1000}h$, y h la anchura de las mismas Velas; pero no es aun esto lo que causa el mayor efecto, pues para ello se hace preciso que D cayga mas á Popa que G. El Navío se inclina por la parte de sotavento, y con este movimiento, el centro de las Velas en D, se transfiere á K; de suerte, que K es su verdadero centro, y la direccion con que actuan LK, paralela á

(*a*) *Juan Bernoulli, Nueva Theórica de la maniobra de los Navíos*, cap. 12. §§. 1. 2. y 3.
Mr. Bouguer, Trat. del Navío, Lib. 3. sec. 3. cap. 1. pag. 473.

á GI: de modo, que descompuestas sus fuerzas en dos, unas laterales, y otras directas, las primeras se dirigen por DK, y las segundas por K paralelamente á GB: de suerte que el centro de aquellas se puede suponer en D, y el de las segundas en K.

402 Con esto se ve ya claramente, que el govierno del Navío depende de la combinacion de las tres fuerzas en G, D, y K: la primera lateral en G, que tiende á hacer arribar al Navío: la última en K, que tiende á hacerle orzar: y la lateral, situada en D, que puede hacerle orzar ó arribar, segun que el punto D cayga á la parte de Popa ú de Proa del centro de gravedad C: siendo las directas mayores ó menores, segun que el punto K se aparte de D, ó segun lo que el Navío se incline; de modo, que quanto mayor fuese su inclinacion, mas orzará, ó como dicen los Marineros, mas *partirá al puño*.

403 No menos dependen estas fuerzas de la altu-
Fig. 49. ra á que estuviere el centro K de las Velas, pues conservandose la misma inclinacion DCK, quanto mayor fuere CK, será mayor DK, ó la distancia á que se aparte el centro de las Velas del plano vertical que coincide con el exe de rotacion.

404 La inconstancia en el govierno del Navío, es pues evidente: si aumenta el viento, aumenta la velocidad de aquel, y su inclinacion, y con ella no solo
Fig. 48. las fuerzas, sino lo que se aparta de D el punto K,
y 49. donde actuan, y por consiguiente debe orzar; y al contrario arribar si el viento disminuye: es lo que los Marineros experimentan todos los dias. En qualquier parte donde se coloque el centro de las fuerzas de las Velas, se tendrá la misma inconstancia; y su mejor situacion dependerá en colocarle de suerte, que ya por variar el número de las Velas, adelantando ó atrasando el punto B, ó ya por medio del Timon, se consiga el equilibrio en los momentos: bien entendido, que

la

la fuerza de este no debe, sino en la necesidad, actuar con perjuicio del andar del Navío, sino solo al socorro de qualquiera de los otros momentos que flaquee. Dexamos aparte por ahora otra fuerza, que es la de los golpes del Mar, ú de las olas, aunque tambien muy considerable, porque esta no tiene instante fixo en su actuacion: y por consiguiente solo puede vencerla el Timon, como mas pronto á acudir al remedio.

405 Las fuerzas ó resistencias laterales del costado son (§§.339 y 215) $=\frac{2}{3}m\mathrm{R}v$, ó por que es (§.340) $v=\frac{ru}{\mathrm{R}tang.(\beta-\delta)}$, serán $=\frac{\frac{2}{3}mru}{tang.(\beta-\delta)}$. Si hacemos, pues, GC $=b=$ (§.224) $11\frac{1}{2}$, distancia horizontal desde el centro de las resistencias G, al de gravedad C, será el momento de estas $=\frac{\frac{2}{3}mbru}{tan.(\beta-\delta)}$.

406 Del mismo modo, puesto CD $=e$, distancia horizontal desde el centro de gravedad C, hasta el de las Vélas D, que lo es quando el Navío no está inclinado: siendo la fuerza lateral de las Velas igual á la del costado del Navío, será tambien aquella $=\frac{\frac{2}{3}mru}{tang.(\beta-\delta)}$, y su momento $=\frac{\frac{2}{3}meru}{tang.(\beta-\delta)}$, que sumado con el del parrafo precedente, serán los momentos para aribar $\frac{\frac{2}{3}mru}{tang.(\beta-\delta)}(b+e)$: de cuyas cantidades e, que la hemos tomado positiva, puede ser negativa.

407 El seno de la inclinacion del Navío es (§.383)

$$sen\Delta=\frac{\frac{2}{3}ru\left(n\mathrm{R}-k\mathrm{R}-\frac{1}{2}\int cbx^{\frac{1}{2}}y+\frac{1}{2}\int fgx^{\frac{3}{2}}\right)}{\mathrm{KUR}tang.(\beta-\delta)}$$, y n la altura vertical desde el centro de gravedad C hasta el centro de las Velas K, por lo que será DK $=$ - - - - - - -

$\frac{\frac{2}{3}nru\left(nR - kR - \frac{1}{2}\int cbx^{\frac{1}{2}}y + \frac{1}{2}\int fgx^{\frac{3}{2}}\right)}{KURtang.(\beta-\delta)}$, distancia horizontal desde el centro de las mismas Velas hasta el plano vertical, coincidente con el exe de rotacion: y por ser $\frac{2}{3}mru$ las resistencias directas de la Proa, ó la fuerza de las Velas, será el momento directo, ó para orzar, $=$ $\frac{\frac{4}{9}mnr^2u^2\left(nR - kR - \frac{1}{2}\int cbx^{\frac{1}{2}}y + \frac{1}{2}\int fgx^{\frac{3}{2}}\right)}{KURtang.(\beta-\delta)}$: ó tomando de él solo la primera cantidad, por lo dicho (§.386), será $= \frac{\frac{4}{9}mn^2r^2u^2}{KUtan.(\beta-\delta)}$.

408 Para que se verifique, pues, un buen govierno, ó no necesite actuar el Timon, habrá de ser $\frac{\frac{4}{9}mn^2r^2u^2}{KUtan.(\beta-\delta)} = \frac{\frac{2}{3}mru}{tan.(\beta-\delta)}(b+e)$: ó partiendo ambos momentos por $\frac{\frac{2}{3}mru}{tan.(\beta-\delta)}$, habrá de verificarse esta equacion $\frac{\frac{2}{3}n^2ru}{KU} = b+e$. El primer miembro de ella es (§.407) $= DKtang.(\beta-\delta)$, y el segundo $= DG$: luego para que se verifique el buen govierno, ha de ser $DKtang.(\beta-\delta) = DG$, ó $tang.(\beta-\delta) : 1 = DG : DK$; pero siendo el ángulo $DIG = \beta-\delta$, será tambien $tang.(\beta-\delta) : 1 = DG : DI$; luego $DK = DI$: esto es, para que se verifique el buen govierno, ha de caer el centro de las Velas K sobre I, ó han de concurrir las paralelas LK, GI, que es lo mismo que se deseó: de suerte que, sin embargo que se coloca el Palo en B, el centro de la Vela se traslada á I; y al contrario, si el Palo se hubiera colocado en G, hubiera sido imposible el buen govierno.

409 Si la equacion no se verificare, y fuese el primer miembro de ella mayor que el segundo, ó DK ma-

mayor que DI, el Navío orzará; y al contrario arribará si fuere menor, habiendo de suplir la diferencia de los momentos, bien sea el Timon, ó el aumentar, ó disminuir Velas en el parage que corresponda, á fin de trasladar el punto D donde convenga.

410 Si navegando con las mismas Velas, disposicion y altura de ellas, aumentara la velocidad del viento, aumentara asimismo la *u*, y disminuyera la *e*, porque aumentara BD: luego por dupla razon creciera el primer miembro, con que el Navío orzara; y al contrario, arribara si disminuyese el viento.

411 Alargando este, aumenta asimismo la *u*; pero aumentará tambien la *e*, á causa que disminuye δ, y con ella BD: luego el efecto ha de nacer de la diferencia entre estos dos aumentos de *u* y de *e*.

412 La cantidad *n* varia segun la altura de las Velas; y asi el Navío que tubiere mas *guinda* partirá mas al puño: y con igual cantidad de Vela, la alta hará partir mas al puño que la baxa.

413 Sobrecargando el Navío, aumenta la *r*, ó resistencia de la Proa, en mayor razon que el volúmen U, á causa de los mayores redondos que fuera del agua tiene la Proa, y que sobrecargandola se han de sumergir: y asimismo disminuye la *b*, á causa de que el centro de las resistencias laterales de la parte del costado que de nuevo se sumerge, está mucho mas hacia Proa que el punto G: luego por este duplo motivo, sobrecargando el Navío, debe orzar, y arribar aliviandole.

414 Si se metiere el Navío mas de Popa, y menos de Proa, por llevar el centro de gravedad C mas hacia Popa, tambien el centro de las resistencias G pasará mas á Popa; y no variando por esto ninguno de los B, D y K, será DG mayor respective á DK: luego el Navío arribará; y al contrario, si el Navío se metiere de Proa, orzará.

415 El golpe de Mar, ó la ola que choca al Navío, es una potencia que produce mayor ó menor momento, segun el parage y distancia horizontal, desde su direccion al centro de gravedad del Navío. Si choca por barlovento la Proa, ó por sotavento la Popa, le hace arribar; y orzar si choca por sotavento la Proa, y por barlovento la Popa. En qualquiera de estas acciones hay la dicha de que concurre la misma equacion ó valores de ella al remedio: porque si arriba, el aumento del ángulo α, y por consiguiente el de la u, obliga al Navío á orzar; y si orza, la disminucion de las mismas cantidades le obligan á arribar. Por este motivo, una Embarcacion bien equilibrada, yendo de bolina, casi no necesita que se le toque al Timon.

416 Todas estas conseqüencias son peculiares del Marinero, que debe tener presente para remediar los inconvenientes que puedan ocurrir en las ocasiones. Haylas tambien que pertenecen al Constructor, pues debe cuidar de que los valores de b y de e, ú de los centros de las resistencias, y de las Velas, estén situados de forma que con facilidad se pueda verificar la equacion: lo que se puede conseguir de varios modos.

417 La b es variable por medio de aumentar ú disminuir los lanzamentos del Navío: de suerte, que quanto mayor sea el de la Proa, respecto al de Popa, mas á Popa se llevará el punto G, ó mayor será la b, y el Navío será menos propenso á orzar; y al contrario.

418 La e es variable mudando los palos, ó colocandolos de forma que el centro comun de las Velas se reuna mas á Popa ó Proa: y asimismo dando mas ó menos longitud á las Vergas, pues con ello aumenta ú disminuye la b (§.273), y con ella la BD.

419 Para el Navío de 60 Cañones de nuestro exemplo, hallamos (§.285) llevando todas las Velas BC = 12 pies, y (§.276) BD = $\frac{173}{1000}h$, siendo h la am-

amplitud de las Velas, que á la altura del centro de las fuerzas de ellas K, es de 80 pies: por lo que es $BD = \frac{173.80}{1000} = 13\frac{84}{100}$ pies; y $CB - DB = e = -1\frac{84}{100}$: lo que da $b + e = 11\frac{1}{2} - 1\frac{84}{100} = 9\frac{66}{100}$ pies. Para hallar el valor de $\frac{\frac{2}{3}n^2 ru}{KU}$, tenemos (§.382) $n = 70\frac{1}{2}$, $r = 294$, $K = 9\frac{1}{8}$, $U = 68650$, y (§.352) $u = \frac{1628}{4850}V$, lo que da $\frac{\frac{2}{3}n^2 ru}{KU} = \frac{\frac{2}{3}.70\frac{1}{2}.70\frac{1}{2}.294.1628V}{9\frac{1}{8}.68650.4850} = \frac{522}{1000}V$: con que para verificarse el buen govierno ha de ser en este caso $\frac{522}{1000}V = 9\frac{66}{100}$: y asì siendo $V = \frac{9690}{522}$, ó proxîmamente, $= 18\frac{1}{2}$ pies, el Navío governará bien con todo el aparejo asignado, ó no necesitará que actue el Tìmon: si aumentare V, orzará, y para mantener equilibrio será preciso que lo remedie el Tìmon, ó aferrar Velas de Popa; al contrario, si disminuye V, el Navío arribará, y habrá de acudir el Timon al remedio, ó se habran de quitar Velas de Proa. Como el viento en este caso (§§.352, y 389) puede correr hasta 10 15 y 20 pies, el Navío con los primeros estará propenso á arribar, y con estos á orzar.

420 Supongamos que el Navío quede con solas las Mayores, Gabias tomadas las tres andanas de rizos, Mesana y Contrafoque: en este caso es BC (§. 286) $= 11$ pies, y BD (§.276) $= \frac{217}{1000}b = \frac{217.81}{1000}$: lo que da $BC - BD = CD = 11 - \frac{1758}{100} = -6\frac{58}{100}$ pies, y $b + e = 11\frac{1}{2} - 6\frac{58}{100} = 4\frac{92}{100}$ pies. El valor de n en este mismo caso, es (§.282) $= 56\frac{1}{2}$ pies, y el

de

de u (§.352) $= \frac{17}{100}V$, cuyos valores substituidos en la equacion, dan $\frac{\frac{2}{3}n^2 ru}{KU} = \frac{\frac{2}{3}.56\frac{1}{2}.56\frac{1}{2}.294.17V}{9\frac{1}{8}.68650.100}$, ó proxîmamente $= \frac{17}{100}V$: con que para que se verifique el buen govierno, ha de ser $\frac{17}{100}V = 4\frac{92}{100}$: se verificará, pues, el buen govierno si fuere $V = \frac{492}{17} = 28\frac{14}{17}$ pies. El viento correrá con este aparejo (§.352) desde 35 á 40 pies por segundo: luego con él estará siempre el Navío propenso á orzar: debiera, si necesario fuere, cargarle la Mesana, pues debe atenderse á los golpes de Mar, que, segun su mayor ó menor fuerza, obligan al Navío á arribar mas.

421 Si el Navío quedare con las dos Mayores, será CB (§.286) $= 16\frac{15}{100}$, á lo que, añadiendo BD $= -\frac{217}{1000}b$, será CD $= e = -1\frac{43}{100}$, y GD $= b+e = 11\frac{1}{2} - 1\frac{43}{100} = 10\frac{7}{100}$. n es en este caso (§.282) $= 41\frac{1}{2}$, y u (§.352) $= \frac{103}{1000}V$: con que será $\frac{\frac{2}{3}n^2 ru}{KU} = \frac{\frac{2}{3}.\frac{83}{2}.\frac{83}{2}.294.103V}{9\frac{1}{8}.68650.1000}$, ó proxîmamente $= \frac{42}{1000}V$: y para verificarse el buen govierno hubiera de ser $\frac{42}{100}V = \frac{1007}{100}$: esto es, $V = 240$, viento exorbitante. El Navío no governara, pues, con este aparejo yendo de bolina: fuera preciso cazarle la Mesana. Con esto fuera CB $= 2\frac{94}{100}$, á lo que, añadiendo BD $= -17\frac{58}{100}$, quedará GD $= e = -14\frac{64}{100}$, y $b+e = 11\frac{1}{2} - 14\frac{64}{100} = -3\frac{14}{100}$. El Navío orzará bastante con esto, y si necesario fuere, se le podrá largar el Contrafoque.

422 Si el Navío quedare con sola la Mayor, será CB

CB (§.286) $= -12\frac{71}{100}$, á los que añadiendo BD $= -\frac{217}{1000}b = -\frac{1758}{100}$, será CD $= e = -\frac{3029}{100}$, y GD $= b+e = 11\frac{1}{2} - \frac{3029}{100} = -\frac{1879}{100}$: esto es, el punto D caerá á Popa de G de la misma cantidad, indicando el signo negativo que el momento, resultante de los dos laterales, es negativo, ó para orzar: y siendolo tambien el directo en K, es preciso que el Navío orze con fuerza, que es lo que se pide en este caso de estar á la capa, pues las mares obligan al Navío á arribar con grande impetu.

423. Todos estos casos están muy bien equilibrados; solo en el primero, con poco viento pudiera caber duda, pues hallamos, que para el perfecto govierno debiera ser $\frac{522}{1000} = 9\frac{66}{100}$: y siendo corta V, se hace dudable si el Timon podria vencer la arribada del Navío. El momento de aquel es (§. 297) $= - - - (D+z)\frac{1}{15}mua^{\frac{1}{2}}(4A^2+ga)sen.(\lambda\pm\varepsilon)cos.\lambda$, ó substituyendo $D+z = 78$, $a = 21$, $A^2 = 336$, $g = 5$, $\lambda =$ (§. 296) $35°$, y $\varepsilon = 5°$, será $= 5160.\frac{533}{1000}mu$, que partido por $\frac{\frac{2}{3}mru}{tan.(\beta-\delta)} = 233mu$, como hicimos con los otros momentos (§.408), quedan $\frac{118}{10}$: por lo que la equacion que se habrá de verificar será $\frac{118}{10} + \frac{522}{1000}v = 9\frac{66}{100}$; donde se ve, que ya sobra fuerza en el Timon para sujetar el Navío.

424. Para los casos de viento largo y á Popa, ó en general para toda especie de casos, podemos formar la igualacion de momentos, incluyendo los del Timon. Que sean estos $Qmusen.(\lambda\pm\varepsilon)cos.\lambda$, y tendremos, para

para que se verifique el buen govierno

$$\frac{\frac{4}{9}mn^2r^2u^2}{KU\,tan.(\beta-\delta)} - \frac{\frac{2}{3}mru(b+e)}{tan.(\beta-\delta)} = \pm Qmu\,se.(\lambda \pm \varepsilon)\,cos.\lambda:$$

ó partiendo por $\frac{mu}{tan.(\beta-\delta)}$, $\frac{\frac{4}{9}n^2r^2u}{KU} - \frac{2}{3}r(b+e) =$
$\pm Q\,sen.(\lambda \pm \varepsilon)\,cos.\lambda\,tan.(\beta-\delta)$.

425 A Popa es $tan.(\beta-\delta) = \infty$: luego todos los momentos son cero, respecto á los del Timon, y por consiguiente con corto ángulo λ que forme este, tiene suficiente para sujetar al Navío, ó para hacerle girar con la mayor velocidad. Es lo que los Marineros experimentan diariamente, pues no siendo el Timonel hábil, acudiendo con el Timon ya á la derecha, ya á la izquierda, sin el reposo necesario, lleva al Navío, como dicen los Marineros, *loco*.

426 A viento largo es $tan.(\beta-\delta)$ bastantemente grande, respecto á las otras cantidades, con que tambien tiene mucha fuerza el Timon: lo unico que debe advertirse es, que como todas las cantidades quedan constantes, á excepcion de la u, quanta mas velocidad tubiere el Navío, ó mas fuerte estubiere el viento, mas propenso estará aquel para orzar, y mayor ángulo λ deberá formar el Timon para sujetarle.

CAPITULO 5.

Del Balance y Cabezada.

427 LLaman los Marineros *Balance* á la rotacion del Navío sobre un exe horizontal, coincidente con la Roda y Codaste: y *Cabezada* á igual rotacion sobre un exe horizontal perpendicular al primero. Son acciones puramente perjudiciales, porque de

de ellas no redundan muchas veces, sino pérdidas de Xarcias, Vergas, Palos, y aun de los mismos Buques: y otras inundaciones de agua, ú de golpes de mar, que pasan por encima del Navío. El modo de evitarlos fuera beneficio de los mas importantes; pero no es dable sin experimentar con exceso unos ú otros daños: debemos contentarnos con dar reglas convenientes para moderar unos y otros, haciendolos menos perjudiciales, pues los mas respetables Autores (*a*) no han tratado hasta ahora el Balance sino como una accion que depende precisamente de la disposicion y hechura del Navío, sin atender á las Mares que lo causan: y toda su consideracion se ha reducido á medir el tiempo en que lo executan, persuadidos á que en su aumento consiste unicamente el beneficio; pero á mas de que en esto se gana poco, los medios que proponen para lograrlo, son en gran manera perjudiciales.

428 Puede suponerse el Balance, el acto de reponerse el Navío, quando despues de haberle inclinado un poco, se dexa en libertad. En este caso se reducirá á la suma, ó integral, de las velocidades con que hace su rotacion el Navío, siendo estas (*Prop.*83.*Lib.*2.*Tom.* 1.) $V = \frac{dt\int p\pi dt}{S}$. Hay en esta fórmula quatro objetos á que atender, y todos muy importantes: el tiempo en que se cumple el Balance: su velocidad: su magnitud; y la accion que sufren cada una de las partes del Navío.

429 Supongamos, pues, que manteniendose la superficie del Mar de nivel, el Navío se incline de una cantidad infinitamente pequeña, y que despues se dexe en libertad para que forme su Balance. En este caso el momento de la potencia $p\pi$ que actuará, será (§.

(*a*) *Leonardo Eulero, Ciencia Naval*, Tom. 1. Cap. 4. Prop.48. *Mr. Bouguer, Tratado del Navío*, Lib. 2. Sec. 3.

(§. 197) $= 32\mathrm{KP}\,\mathit{sen}.\Delta$, puesto 32P (*Cor.*3. *Princ.*3. *Libr.*1. *Tom.*1.) $= \pi$, con mas el valor de las resistencias (§.237) $= \frac{\mathrm{GV}}{dt}$, expresando G una constante: esto es, será el momento que actuará $= 32\mathrm{KP}\,\mathit{sen}.\Delta - \frac{\mathrm{GV}}{dt}$: el mismo con que deducimos toda la theórica del *Cap.*13. *Lib.*2. *Tom.*1; por cuyo motivo las fórmulas allí expuestas son aplicables á este caso.

430 El tiempo en que se executa el balance, baxo las expresadas suposiciones, será pues (*Corol.* 2. *Prop.* 84. *Libr.* 2. *Tom.*1.) $\mathrm{T} = \left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{KP}l} + \frac{\mathrm{G}^2}{64\mathrm{L}^2\mathrm{P}^2 l} \pm \left(\left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{KP}l} + \frac{\mathrm{G}^2}{64\mathrm{K}^2\mathrm{P}^2 l}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{KP}l}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$, expresando T el tiempo en segundos que dura el mismo Balance, P el peso del Buque, K la distancia desde el centro de gravedad al metacentro, S los momentos de inercia que producen las partes del mismo Buque, G los momentos resistentes del mismo fluido, causados en el costado, y l la longitud del Péndulo simple que vibra los segundos, que próximamente es de 39 pulgadas, ú de $3\frac{1}{4}$ pies. Segun esto, el tiempo que dura el Balance, depende de las quatro cantidades S, G, K y P: las dos primeras están en el numerador de la fórmula, y por consiguiente, por su aumento aumentará el tiempo en que se execute el Balance; al contrario, aumentando las dos segundas que están en el denominador, disminuirá el mismo tiempo.

431 Podemos, no obstante, despejar en parte de la fórmula, el peso P del Navío, porque los momentos de inercia S, se pueden expresar por $x^2\mathrm{P}$, denotando x la distancia desde el exe de rotacion hasta el punto donde se supongan como reunidos todos los cuerpos ó partes del Navío, donde de estarlo produxeran los mismos momentos de inercia S, siendo la cantidad x

ma-

mayor ó menor, segun que las partes ó pesos que componen el todo del Navío, disten mas ó menos del exe de rotacion, que pasa por el centro de gravedad. Substituyendo, pues, $x^2P = S$, quedará el tiempo en que se execute el Balance $T = $ ─────────

$$\left(\frac{x^2}{Kl} + \frac{G^2}{64K^2P^2l} + \left(\left(\frac{x^2}{Kl} + \frac{G^2}{64K^2P^2l}\right) - \left(\frac{x^2}{Kl}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} : \text{ó}$$

suponiendo $G = 0$, como hicieron los Autores citados, $T = \left(\frac{x^2}{Kl}\right)^{\frac{1}{2}}$.

432 No hay duda, segun esta expresion ó fórmula, que si no se trata mas que de aumentar el tiempo en que se execute el Balance, se puede conseguir, aumentando la cantidad x: esto es, separando mas del exe de rotacion, ó centro de gravedad, los varios pesos de que se compone la carga del Navío: y asimismo disminuyendo la $K = $ (§. 297), $H + \frac{m}{nP}\int e^3 c$.

433 La cantidad G, que representa los momentos que producen las resistencias del fluido en el Balance, siempre conviene que se aumente, para dilatar el tiempo en que se cumple el Balance; no obstante, esta cantidad, como veremos, es corta, aunque se aumentará despues por otras razones que la hacen sensible en la práctica.

434 En el Navío de 60 Cañones, que nos sirve de exemplo, hemos hallado (§. 166) $K = 9\frac{1}{8}$, $P = 68650m$, $G = $ (§. 239) $554707m$: y si ponemos, á mas de esto, $x = 15$, con $l = 3\frac{1}{4}$, tendremos el tiempo en que cumple el Balance $T = \Bigg(\frac{15.15}{9\frac{1}{8}.3\frac{1}{4}} + \frac{(554707)^2}{64.3\frac{1}{4}(9\frac{1}{8})^2(68650)^2}$

$$+ \left(\left(\frac{15.15}{9\frac{1}{8}.3\frac{1}{4}} + \frac{(554707)^2}{64.3\frac{1}{4}(9\frac{1}{8})^2(68650)^2}\right) - \left(\frac{15.15}{9\frac{1}{8}.3\frac{1}{4}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg)^{\frac{1}{2}}, \text{ ó}$$

proximamente $T = 2''\frac{36}{100} + \frac{4}{100}$, resultando los $\frac{4}{100}$

 de

de segundo, de la resistencia G, que como se ve puede despreciarse. Por tanto, el tiempo en que haga su Balance el Navio puede reducirse á $T = \sqrt{\frac{S}{KPl}} = \sqrt{\frac{x^2}{Kl}}$.

435 De aqui se sigue, que quedando constante la K, los tiempos T serán como la x, distancia desde el centro de gravedad al punto donde se consideraren reunidas todas las partes del Navío: y en Navíos semejantes, serán estos tiempos como las raices quadradas de sus dimensiones lineares. (*a*)

436 La velocidad máxîma en el Balance es (*Prop.* 85. *Lib.* 2. *Tom.* 1.) $u = \frac{32K^2P\,sen.\Delta}{G}$, expresando u la velocidad del metacentro; pero el numerador de esta expresion es el producto del momento de la potencia que actua, y causa el Balance por K: luego la velocidad máxîma de este es en razon directa del mismo producto.

437 Quanto mayor fuere, pues, K^2, quadrado de la distancia del centro de gravedad al metacentro, y mayor $sen.\Delta$, ó la causa que produzca la inclinacion, mas veloz, fuerte, ó rigoroso deberá ser el Balance; sin que por alterar la ultima cantidad se altere el tiempo.

438 El aumento de P tambien parece que debiera au-

(*a*) *Mr. Bouguer* (*Trat. del Navío* pag. 332) dice: que la Fragata el Triton, de 180 toneladas, hacia sus balances en $4\frac{1}{2}$ segundos. Esta Fragata, segun nos la describe, tendria sus dimensiones lineares $\frac{4}{7}$ de las del Navío de nuestro exemplo: con que por la regla que se sigue, debiera hacer este sus Balances en 6 segundos. Mas adelante se verán motivos por los quales los balances pueden ser de mayor duracion: lo que quizás fue causa de la equivocacion del Autor: y asimismo se verán los inconvenientes que resultarian de ser esto cierto.

aumentar la velocidad máxîma; pero como es $K = H + \frac{m}{12P}\int e^3 c$, resulta el producto $K^2P = H^2P + \frac{Hm}{6}\int e^3 c + \frac{m^2}{144P}\left(\int e^3 c\right)^2$: y respecto que H es cantidad corta, el aumento de P, mas disminuye que aumenta dicho producto.

439 Si por su pequeñez suponemos $H = 0$, quedará $K^2P = \frac{m^2}{144P}\left(\int e^3 c\right)^2$: con que en Navíos semejantes serán las máxîmas velocidades proxîmamente como $\frac{(\int e^3 c)^2}{P}$: y siendo $\left(\int e^3 c\right)^2$ como las octavas potestades de las dimensiones lineares, y P como las terceras, quedarán dichas velocidades como las quintas potestades.

440 Ultimamente, la medida de la accion que padecen las fibras del Buque, se dixo (*Cor.* 1. *Prop.* 85. *Lib.*2. *Tom.*1.) que es proporcional á $K^2P\,sen.\Delta - Gu$: de suerte, que la máxîma, que sucede quando es $u = 0$; esto es, quando concluido el Balance, está el Navío parado, y para reponerse, es como $K^2P\,sen.\Delta$, ó como la velocidad máxîma. Las partes del Navío padecen en aquel instante los mayores esfuerzos: y por consiguiente, el mayor riesgo de romperse.

441 La accion que padecen los Palos, que son los mas expuestos, es (*Cor.*3. *Prop.*85. *Lib.*2. *Tom.*1.) $= \frac{SK^2P\,sen\Delta}{S} = \frac{SK^2\,sen.\Delta}{x^2}$, expresando x la distancia desde el exe de rotacion, hasta el punto donde esten como reunidos todos los cuerpos ó partes del Navío: por lo que, quanto mayor fuere esta distancia, menor será la accion que padezcan los Palos.

442 Es igualmente esta accion como K^2, ó como el quadrado de la altura del metacentro sobre el centro

de

de gravedad: por lo que, quando el Navío esté cargado de materia de mucha gravedad expecífica, puesta en el fondo del Navío, que le obligue á baxar el centro de gravedad, ó aumentar K, los Palos y demas partes del Navío padecerán en duplicada razon, y correrán el mayor riesgo.

443 Tambien es la misma accion como *S*: esto es, como los momentos de inercia que padezcan los mismos Palos: de suerte, que quanto mas pesados fueren estos, sus Xarcias y Velas, y particularmente quanto mas largos fueren, mucho mas padecerán.

444 En Navíos semejantes, y semejantemente aparejados, es la accion de los Palos (§.439) proximamente como las quintas potestades de sus dimensiones lineares: por lo que así el Buque, como la Arboladura y Xarcias de un Navío grande, padecen mucho mas que las de otro pequeño; puesto que sus resistencias, ó fuerzas son sólo (*Cor.*14. *Dif.*33.*Lib.*1.*Tom.*1) como los cubos de las mismas dimensiones.

445 Lo mismo que se ha dicho de los Palos, debe entenderse de qualquiera otra parte del Navío, como v.g. un pedazo de Costado ó número de Quadernas, parte de una cubierta, &c: la accion que padezca será igualmente $\frac{SK^2 sen.\Delta}{x^2}$, expresando *S* sus momentos de inercia: de suerte, que si se quiere que padezca menos, se puede conseguir por disminuir *S*, ó aliviarla de peso, ó por aumentar *x* en las demas partes que no padecen tanto.

446 Hasta aqui no nos hemos apartado de lo que los mas célebres Autores han producido: todas han sido conseqüencias de sus mismos principios, tratando el Balance, y aun la Cabezada, porque en nada se diferencia uno de otro, (*a*) como procedido de la pe-

que-

(*a*) No obstante lo que dice *Mr. Bouguer* (*Trat. del Navío*, Lib. 2. Sec.8. Cap 3. §.5.).

queña inclinacion que se le diere al Navío ; que precisamente es el que resulta despues de evaquado el golpe de Mar, que puso en agitacion ú oscilacion al Buque: esto es, los Balances ú oscilaciones que despues del primero se siguen ; pero en este la accion de la potencia no es enteramente semejante, ni del mismo valor. En la inclinacion del Navío sobre la superficie del agua nivelada, los dos momentos de los volúmenes LED y AEG (*Prop.66. Lib.2. Tom.* 1.) contribuyen á suportar el Buque, y son $= \frac{m}{12}\int e^3 c sen. \Delta$, una de las dos cantidades del valor del todo KP*sen.*Δ $= \left(HP + \frac{m}{12}\int e^3 c\right) sen. \Delta$; pero en el acto del golpe de Mar, el Navío se inclina y ocupa el espacio ABCDEA, en lugar del que antes ocupaba FDEF : de suerte, que es AIFA+HCDH = IHBI, por motivo de haber de ser constante el volúmen que ocupe. El Navío se eleva por la accion de los nuevos volúmenes ocupados HCDH y AIFA, y dexa el hueco IHB. Con esto se vé, que la accion del volúmen HCDH es, para la rotacion, positivo, asi como el IGBI ; y los dos AIFA y HGBH negativos : de suerte, que en esta rotacion hay una potencia positiva, y otra negativa ; en lugar que en la que antes consideramos ambas son positivas. A mas de esta diferencia se halla tambien la de que los momentos no deben considerarse como procedidos solamente de los volúmenes del fluido ocupado por los golpes de Mar, sino que estando estos en movimiento, y atendiendo á la velocidad con que actuan, ha de ser su fuerza vertical (*Corolar.9. Lem.* 1. *Tom.*1.) = ---- $\int m.db.de\left(a^2 \mp \frac{1}{2}u sen.\theta\right)$, lo que antes solo era $\int m.db.de.a$: de suerte, que segun fuere la velocidad del golpe de Mar, puede ser muchas veces mayor su fuerza, que la

Lam. 1. Fig. 31.

Lam. 9. Fig. 50. 51.

que

que resulta de su simple peso, que es á lo que antes solamente se atendió.

447 A mas de esto, para que nada dexemos en que no pongamos la atencion, debemos introducir otra potencia, que es la accion de las Velas. Si estando el Navío con qualquier inclinacion DCK, causada
Fig.49. por la fuerza del viento en las Velas, un golpe de Mar por barlovento le hace girar sobre el punto C, las Velas, con el movimiento giratorio que toman, huyen ó se apartan del viento; y la velocidad con que este las hiere, es respectiva: esto es, la del viento, menos la que toma la Vela; y al contrario, quando el Navío cae por barlovento, ó se repone, la velocidad respectiva es la del viento, mas la de la Vela. Esta diferencia de velocidad altera el momento con que actuan las Velas en el acto del Balance, y es efectivamente un momento resistente en ambos casos, de caer ó levantarse el Navío en el Balance: porque si se levanta, es manifiesta la resistencia, puesto que el momento se opone á la accion; y si cae, siendo aquel momento de menos que actua, es asimismo negativo ó resistente. Si fuere, pues, n la altura ú distancia desde el centro de las Velas al exe de rotacion, tendremos $K : u = n : \frac{nu}{K}$, velocidad lateral del mismo centro; y $\frac{nu}{K sen.\gamma}$, velocidad segun la direccion del viento. Esta velocidad debe producir la fuerza lateral en las Velas (§. 338) $= \frac{1}{2\,0} m A^2 G cos.(\beta-\delta)(V sen.\alpha - u sen.\beta - v cos.\beta)$, substituyendo $\frac{nu}{K sen.\gamma}$ por V sola, $u = o$, $v = o$, pues aquella velocidad no puede producir efecto en las velocidades del Navío. Será, pues, la fuerza lateral que en las Velas producirá el Balance $= \frac{1}{2\,0} m A^2 G cos.(\beta-\delta) . \frac{nu se.\alpha}{K se.\gamma}$;

ó

ó suponiendo $\frac{1}{10}m A^2 G cos.(\beta-\delta).\frac{sen.\alpha}{sen.\gamma}=Q$, será $=\frac{Qnu}{K}$, y el momento $=\frac{Qn^2u}{K}$: ó porque es (*Cor.* I. *Prop.*18. *Lib.*I. *Tom.*I.) $V=\frac{udt}{K}$, ó $u=\frac{KV}{dt}$, será $\frac{Qn^2V}{dt}$: de suerte, que en lugar de G solo, que antes colocamos en las fórmulas, y expresaba la constante, que multiplicaba las resistencias del costado, tendremos que substituir ahora la misma cantidad, con mas Qn^2: ó si G denotare aquel valor como antes, tendremos que substituir ahora, en lugar de G solo, $G+Qn^2$.

448 Si en el valor de $Q=\frac{1}{10}m A^2 G cos.(\beta-\delta).\frac{sen.\alpha}{sen.\gamma}$, substituímos los hallados (§.352) $A^2=23050$, $G=\frac{96}{100}$, $\beta=40^\circ$, $\delta=8^\circ\ 20'$, $\alpha=25^\circ$, se halla proximamente $Q=270\frac{9}{10}m$: y si esta cantidad se multiplica por (§.282) $n^2=70\frac{1}{2}.70\frac{1}{2}$, resulta $Qn^2=1346181.m$, á quien añadiendo $G=554707.m$, suman $1900888.m$, cantidad que hemos de substituir en lugar de $554707.m$ solo, en el cálculo del tiempo en que cumple el Balance el Navío; lo que hecho, dá $\frac{1}{10}$ de segundo de mas: de suerte, que en lugar de $2''\frac{76}{100}+\frac{4}{100}$ que antes hallamos, serán, con todas las Velas largas y á bolina, $2''\frac{76}{100}+\frac{4}{100}+\frac{10}{100}=2''\frac{90}{100}$. El $\frac{1}{10}$ de segundo es cantidad corta; pero con todo se hace sensible en la práctica del Mar, por percibirse claramente la diferencia de los Balances quando se aferran las Velas.

449 A mas de esto, tiene el tiempo en que se executa el Balance mayores particularidades á que atender, pues no puede resultar plenamente de sola la fórmula hallada, ó valor de la velocidad angular: se ha de sujetar tambien al tiempo en que pase la ola por debaxo del Navío, y este en nada se altera porque sean

ó no mayores los momentos de inercia S, ó qualquiera de las cantidades que contiene la fórmula dada (§. 430). La velocidad de la ola es (*Pro.62.Lib.2.Tom.*1) $= \frac{8b}{(a+b)^{\frac{1}{2}}c}$, expresando b la mitad de la amplitud de la ola, a su altura total, y c la semicircunferencia del círculo, cuyo radio es la unidad. Si en un segundo anda dicha cantidad, correrá la mitad de su amplitud b en $\frac{1}{8}c(a+b)^{\frac{1}{2}}$ segundos: tiempo que debe evaqurse desde el instante que empieza á subir el Navío por la ola, hasta que ya esté debaxo del costado su mayor elevacion; pero á este es preciso añadir el tiempo que ha de correr de mas la misma ola, para que su momento sea el máximo, que precisamente lo será en un punto, comprehendido entre el costado, y el medio del Navío: pues quando llega la mayor elevacion de la ola á lo mas ancho de la Manga, aun no ha llegado á los demas puntos del costado. Que diste aquel punto del mismo costado la cantidad h, y tendremos que para correr la cumbre de la ola esta cantidad, necesita el tiempo $\frac{hc}{8b}(a+b)^{\frac{1}{2}}$. El que empleará, pues, el Navío en dar el primer balance, por solo causa de la ola, será $t = \frac{1}{8}c\left(a+b\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{h}{b}\right)$: donde se ve que solo la cantidad h depende en parte del Navío; todo lo demas es la especie y magnitud de la obra quien lo determina. Si substituimos (*Esc.*1.*Pr.*62. *Lib.*2.*To.*1.) $b = a(1+\frac{1}{2}c)$, será tambien $t = \frac{1}{8}c\left(2a+\frac{1}{2}ac\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{h}{a(1+\frac{1}{2}c)}\right)$.

450 Colocando para el Navío de 60 Cañones de nuestro exemplo $h = 8$, se hallan los valores del tiempo en que debe dar el Balance por sola causa de la ola, como se expresa en la Tabla siguiente.

Al-

Alturas de las olas en pies.	Valores de t, ó del Balance.
$0\frac{1}{4}$	$5''$
1	$3\frac{5}{100}$
$3\frac{113}{1000}$	$2\frac{61}{100}$ mínimo
4	$2\frac{64}{100}$
9	3
16	$3\frac{55}{100}$
25	$4\frac{17}{100}$
36	$4\frac{84}{100}$
49	$5\frac{52}{100}$
64	$6\frac{22}{100}$

451 Los Balances ocasionados por la ola duran, pues, mucho, quando la ola es casi insensible: van disminuyendo al paso que aquella aumenta, hasta que llega al mínimo tiempo, y despues vuelve á aumentar. El mínimo se deduxo diferenciando la cantidad $a^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}c)}$, que da $a = \frac{b}{1+\frac{1}{2}c}$: de suerte, que el mínimo tiempo en que los Navíos deben dar los Balances por causa de la ola es $t = \frac{1}{4}c\left(\frac{2+\frac{1}{2}c}{1+\frac{1}{2}c}\right)^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$.

452 Estas olas son las que ya tomaron todo el incremento posible respecto del viento que las causó: en las que llaman de *leva* hay alguna variacion, segun fuere la relacion entre su altura y su amplitud; pero si despreciamos la primera, se reducirá el tiempo del Balance que de ellas resultará á $t = \frac{1}{8}c\left(b^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{b^{\frac{1}{2}}}\right)$. De esta suerte, á la ola de 64 pies de alto corresponde el ancho $b = 64(1+\frac{1}{2}c) = 163{,}08$; y $b^{\frac{1}{2}} = 12{,}77$; luego aun en caso que esta ola llegue á reducirse á muy poca altura, será el tiempo en que con ella deberá dar

su Balance el Navío $t = \frac{1}{8} \cdot 3{,}14\left(12{,}77 + \frac{8}{12{,}77}\right) = 5''\frac{26}{100}$. (a)

453 Estos tiempos debieran ser efectivamente los que emplearan los Navíos en sus Balances primeros, si por otro lado les fuesen iguales los que antes deduximos $T = \sqrt{\frac{S}{KPl}}$; no siendolo, es preciso que se causen mutua alteracion, y que el Navío tome un medio, variando la magnitud del Balance, sus velocidades y momentos. Si v.g. el tiempo t, en que corre la ola, fuere menor que T, la ola ganará sobre el costado, haciendo el mismo efecto que si aumentase el valor de K, cuya cantidad disminuirá el tiempo T, aproxîmandose al otro t: y asimismo no solo aumentará la velocidad máxîma del Balance $u = \frac{32K^2P sen.\Delta}{G}$, sino tambien los máxîmos momentos que padezca el Buque. En el Navío de 60 Cañones resultará, pues, este perjuicio solo en olas de 9 pies, ú de menores alturas, en que el Navío se halle precisado á balancear en menos de $2''\frac{90}{100}$. En olas mayores, el Navío cumplirá el Balance primero que la ola.

454 De esto puede ya inferirse el perjuicio tan grande que resultara de aumentar los momentos de inercia S, con solo el fin de aumentar el tiempo T, en en que el Navío por sí solo diera el Balance: pues no resultando de esto sino cortísima ventaja, se aumentaria

(a) Algun caso como este fue quizás el que hizo creer á *Mr. Bouguer* que la Fragata el Triton hacia sus balances en $4\frac{1}{2}$ segundos: en efecto, segun se explica en la pag. 332, escogió tiempo en que el Mar estaba poco agitado para hacer su experiencia: esto es, quando solo actuaban las regulares mares de leva.

ria con exceso la rapidéz del balance, su magnitud, los momentos que padece el Buque, y la elevacion de las aguas en el costado, que quizás pasarán por encima de la borda, como suelen pasar, anegando el Navío. Si v.g. fuera el tiempo $T = 5''$, las olas desde 10 hasta 36 pies de alto fueran muy propias para causar estos efectos; en lugar que siendo $T = 2'' \frac{90}{100}$, solo las olas de menos de 9 pies las puedan causar, y estas no pueden producir considerables daños.

455 Mas adequado fuera el methodo de dilatar el tiempo, disminuyendo la K, pues aunque la ventaja no fuera grande, disminuyera á lo menos la velocidad máxima, así como los momentos que padecia el Buque. No se impidiera, sin embargo, que los Balances no aumentasen, y que las olas no se elevasen mas sobre el costado, ó que el Navío embarcase muchisima agua por la borda; al contrario para remediar estos daños es preciso aumentar K.

456 Con esto se ve la necesidad de especular la theórica para proporcionar esta cantidad. Puesto que es $T^2 = \frac{S}{KPl}$, será tambien $t^2 = \frac{S}{zPl}$, expresando z la cantidad correspondiente á K, que necesitara hallarse en el Navío, para que oscilara isochronamente con la ola: luego $\frac{S}{Pl} = T^2K = t^2z$, y $z = \frac{T^2K}{t^2}$. El momento de la potencia que actua, pues, en el Navío, con el esfuerzo de la ola, es $= \frac{T^2KP\mathit{sen}.\Delta}{t^2}$; quando el que el Navío por sí solo emplea es $= KP\mathit{sen}.\Delta$. Estos dos momentos obran cada uno de por sí, como si tubiesen que vencer iguales momentos de inercia: lo que nos da el verdadero momento resultante $= \left(\frac{T^2 + t^2}{2t^2}\right)KP\mathit{sen}.\Delta$.

La

457 La cantidad $\left(\frac{T^2+t^2}{2t^2}\right)$ será, pues, la que realmente actuará en el Balance, en lugar de K solo que antes se supuso debiera actuar: y así, llamando Θ el verdadero tiempo en que dará el Navío el Balance, tendremos $\Theta = \sqrt{\frac{2t^2 S}{(T^2+t^2)KPl}} = \sqrt{\frac{2t^2 x^2}{x^2+t^2 Kl}}$.

458 Con esto podemos ver ya parte de lo que tenemos adelantado, pues el tiempo Θ, no solo toma un medio entre T y t, sino que es corta la diferencia que en él resulta aumentando S ó x, y disminuyendo K. Supongamos $x=15$, $K=9\frac{1}{8}$, $t=3$, y $l=3\frac{1}{12}$ y será $T=\sqrt{\frac{x^2}{Kl}}=2''\frac{3}{4}$, y $\Theta=2''\frac{6}{7}$. Pongamos $x=21$, y será $\Theta=3''\frac{1}{3}$: y $K=6$, y será $\Theta=3''\frac{18}{100}$. De esta suerte, el tiempo del Balance ni es de $3''$, ni de $2''\frac{3}{4}$, sino del medio $2''\frac{6}{7}$. Alargando x de 6 pies, solo aumentó Θ de $\frac{47}{100}$ de segundo, que cabe á $\frac{7\frac{1}{2}}{100}$ de segundo por pie; y acortando K de 3 pies, ó reduciendola á sus dos tercios, solo aumentó Θ de $\frac{32}{100}$ de segundo: cantidades todas que merecen muy poca atencion, respecto de los perjuicios que se siguen.

459 El que mas pronto se ofrece es la magnitud del Balance, pues aumenta esta, al paso que aumenta x y disminuye K. La inclinacion del Navío por sotavento es la justa medida ó magnitud del Balance, respecto que este procede de la mayor ó menor eficacia ó momento de la ola. Pongamos, pues, δ por esta inclinacion, y tendremos $KP\,sen.\,\delta = \left(\frac{T^2+t^2}{2t^2}\right)KP\,sen.\,\Delta$ que da $sen.\,\delta = \left(\frac{T^2+t^2}{2t^2}\right)sen.\,\Delta = \left(\frac{x^2+t^2 Kl}{2t^2 Kl}\right)sen.\,\Delta$. Al paso que aumente x, ó disminuya K, debe por con-

consiguiente aumentar la inclinacion δ. Pongamos como antes $x = 15$, $K = 9\frac{1}{8}$, $t = 3$, y $l = 3\frac{1}{4}$, y será $sen.\delta = \frac{874}{949} sen.\Delta$: y puesto $x = 21$, es $sen.\delta = \frac{1258}{949} sen.\Delta$; esto es, δ mas de dos quintas partes mayor de lo que fue antes, cantidad considerable: y puesto $K = 6$, es $sen.\delta = \frac{712}{624} sen.\Delta$, ó δ una quinta parte mayor de lo que fue antes: todas cantidades crecidas, respecto de la poca ventaja que se ganó en el tiempo.

460 Del mismo modo que substituimos en el tiempo $\left(\frac{T^2+t^2}{2t^2}\right)K$, por K solo, debemos substituirlo en la expresion de la velocidad máxima (§. 436) $= \frac{32K^2Psen.\Delta}{G}$ para obtener la verdadera, con que será esta $= \left(\frac{T^2+t^2}{2t^2}\right)^2 \frac{32K^2Psen.\Delta}{G} = \left(\frac{x^2+t^2Kl}{2t^2l}\right)^2 \frac{32Psen.\Delta}{G}$. Es pues mayor la velocidad máxima en el Balance, al paso que es mayor x ó S: y asimismo mayor, quanto mayor es K: de suerte, que conviene disminuir K para que disminuya la velocidad del Balance; pero no aumentar x ó S.

461 Aunque nos hayamos explayado sobre la theórica del tiempo, magnitud y velocidad del Balance, no son estos los puntos interesantes del Marinero. El Balance es accion perjudicial, y los perjuicios se reducen á los excesivos momentos que pueden padecer los Palos, y demas partes del Navío, de donde resultan roturas y pérdidas: y á las grandes elevaciones de las aguas en el costado, que inundan los Navíos. Como esto se enmiende, hace poco al caso que lo otro suceda como quiera: pues si los Autores mas respeta-

tables pusieron su cuidado sobre solo disminuir el tiempo del Balance, fue persuadidos á que de ello pendian los otros beneficios. Los momentos que padecen los Palos son (§.441) $\frac{SK^2P\,sen.\Delta}{S}$, ó substituyendo $\left(\frac{T^2+t^2}{2t^2}\right)K$, por K solo, son $=\left(\frac{T^2+t^2}{2t^2}\right)^2\frac{SK^2P\,sen.\Delta}{S}$ $=\left(\frac{T^2+t^2}{2t^2T}\right)^2\frac{SK\,sen.\Delta}{l}$. Esta expresion es infinita, si T es infinito, y lo es tambien si es $T=o$. Hay pues un valor de T, que dará la mínima accion en los Palos, y la da la igualacion á cero de la diferencial de $\left(\frac{T^2+t^2}{2t^2T}\right)^2$: esto es, $dT-\frac{t^2dT}{T^2}=o$, que da el valor de T, en el caso que padezcan los Palos la mínima accion, $T=t$: de suerte, que para que los Palos padezcan lo menos que es posible, debe ser el Navío isochrono con la ola, ó dar los balances, que por sí solo debiera dar, en el mismo tiempo que los que la ola produxera, como se expresó en la Tabla. Qualquier otro valor que se le dá á T, mayor ó menor, producirá mayores momentos en las Arboladuras: si T es mayor que t, el tiempo del Balance será mayor; pero tambien aumentará la velocidad máxima, de quien depende principalmente la accion de los Palos: y si es T menor que t, disminuye la velocidad y magnitud del Balance; pero aumenta el tiempo.

462 De esta inspeccion nos resulta hallar el ventajoso valor de S: porque si ha de ser $T=t$, y es $T=\sqrt{\frac{S}{KPl}}$, tendremos $t^2=\frac{S}{KPl}$, ó $S=t^2KPl$, y $x=tK^{\frac{1}{2}}l^{\frac{1}{2}}$ es el valor de S ú de x que hará que los Palos trabajen lo menos que es posible; pero el valor de t es indeterminado: cada ola lo produce distinto;

con

con que para lograr esta ventaja era preciso variar la S, ó la x, aumentandolas en las olas grandes, y disminuyendolas en las pequeñas: lo que no conviene en la práctica.

463 No obstante, se puede tomar un medio que no vaya muy apartado del mayor acierto, pues las olas chicas poco ó ningun perjuicio causan: puede reflexionarse sobre las que ya empiezan á ser perjudiciales, amenazando con riesgo la Arboladura, y tomarse un medio tiempo, ó valor de t, entre estas y las mayores. Supongamos que las primeras sean las de 9 pies de alto, y las últimas las de 36 ó 40, y tendremos un medio valor de $t = 4''$. Con esto será $S = x^2 P = 16KPl$: lo que da, substituyendo para el Navío de 60, $K = 9\frac{1}{8}$, y $l = 3\frac{1}{4}$, $x = 22$. Este valor de x es imposible conseguirse á menos que no sea sobrecargando de peso la Arboladura; lo que fuera fatal, porque el Navío solo tiene en su mayor anchura 42 pies, cuya mitad no excede de 21. Esto concluye, que lo mas que pueden separarse en este Navío los pesos del centro de gravedad, sin perjuicio de las partes que los hayan de suportar, será lo mas acomodado para la Arboladura.

464 Ya se habrá advertido que quando se tomó la diferencial de la expresion $\left(\frac{T^2+t^2}{2t^2T}\right)^2 \cdot \frac{SK\,sen.\Delta}{l}$, tratamos á K como constante, y solo la $T = \sqrt{\frac{S}{KPl}} = \sqrt{\frac{x^2}{Kl}}$ como variable: esto es, solo la S ó x fueron las variables; y así solo se deduxo el valor ventajoso que á estas corresponde en quanto á conseguir la menor accion en la Arboladura. Para hallar el que deba darsele á K, no hay sino introducir en la expresion el valor de $T = \sqrt{\frac{x^2}{Kl}}$, pues se reduce á $(x^2+t^2Kl)^2 \cdot \frac{S\,sen.\Delta}{4t^4x^2l^2}$: don-

de se vé que quanto mayor sea K mas padecerán las Arboladuras.

465 Esto nos persuade á que hayamos de reducir K á lo menos que sea posible ; pero la elevacion de las aguas en el costado, ó inundaciones del Mar, nos dan contraria determinacion. El momento de la potencia que actua en el Navío con el esfuerzo de la ola es (§. 456) $= \frac{T^2 KP sen.\Delta}{t^2}$, y con este mismo momento actuará el Navío solo, si se supusiese el cuerpo de este variado en la razon de K á $\frac{T^2 K}{t^2}$, quedando constante $sen.\Delta$; pero como no varia el cuerpo, aquella accion de la ola resultará del aumento ú disminucion de $sen.\Delta$: de suerte, que suponiendo θ la inclinacion, tendremos $\frac{T^2 KP sen.\Delta}{t^2} = KP sen.\theta$, ó $sen.\theta = \frac{T^2}{t^2} sen.\Delta$: esto es, los senos de las inclinaciones, ó las alturas del agua en el costado, serán como los quadrados de los tiempos en que se cumplen los Balances; pero este tiempo se halló (§.457) $= \left(\frac{2t^2 S}{(T^2+t^2)KPl}\right)^{\frac{1}{2}}$: luego las alturas de las aguas en el costado, serán como $\frac{t^2 S}{(T^2+t^2)KPl} = \frac{t^2 T^2}{T^2+t^2} = \frac{t^2 x^2}{x^2+t^2 Kl}$, donde se vé que quanto menor sea K, mayor será la altura del agua en el costado. Si se supone, pues, que sea α dicha altura, tendremos $\alpha = \frac{nt^2 T^2}{T^2+t^2}$, expresando n una constante. Pero en caso de suponerse el Navío firme ó sin movimiento, debe ser $\alpha = a$ toda la altura de la ola, y $T = \infty$: luego en este caso tendremos $a = nt^2$, donde substituyendo (§.449) $t^2 = \frac{1}{64} c^2 (a+b)\left(1+\frac{b}{b}\right)^2$, será $a =$
nc^2

$\frac{nc}{64}(a+b)\left(1+\frac{h}{b}\right)^2$, ó $n = \frac{64a}{c^2(a+b)\left(1+\frac{h}{b}\right)^2}$: ó porque no deseamos la altura de la ola en el punto donde se cumple el Balance, sino en el costado del Navío, en cuyo caso es $h = 0$, será $n = \frac{64a}{c^2(a+b)}$, cuyo valor, substituido en el de α, será $\alpha = \frac{64at^2\mathrm{T}^2}{c^2(a+b)(\mathrm{T}^2+t^2)}$: bien entendido, que t ya no debe expresar el tiempo en que el Navío dé el Balance, respecto de haberse supuesto $h = 0$, sino aquel en que la ola corre la mitad de su amplitud b: y asi para evitar confusion, llamando á este tiempo T, será $\alpha = \frac{64a\mathit{T}^2\mathrm{T}^2}{c^2(a+b)(\mathrm{T}^2+\mathit{T}^2)} = \frac{64a\mathit{T}^2x^2}{c^2(a+b)(x^2+\mathit{T}^2\mathrm{K}l)}$; ó substituyendo el valor de $\mathit{T} = \frac{1}{64}c^2(a+b)$, $\alpha = \frac{\mathrm{T}^2a}{\mathrm{T}^2+\frac{1}{64}c^2(a+b)} = \frac{x^2a}{x^2+\frac{1}{64}c^2\mathrm{K}l(a+b)}$, ó si suponemos para las olas que han tomado todo el incremento posible, respecto del viento que las causó (§.449) $b = a(1+\frac{1}{2}c)$, será en ellas $\alpha = \frac{\mathrm{T}^2a}{\mathrm{T}^2+\frac{1}{64}c^2a(2+\frac{1}{2}c)} = \frac{x^2a}{x^2+\frac{1}{64}c^2\mathrm{K}la(2+\frac{1}{2}c)}$, ó proxîmamente $\alpha = \frac{x^2a}{x^2+\frac{247}{192}\mathrm{K}a}$.

466 Las elevaciones del agua en el costado, no son, pues, solo mayores, quanto menor es K, altura desde el centro de gravedad al metacentro, sino tambien quanto mayor sea x, ó los momentos de inercia del Navío S; ó en una palabra, estas elevaciones, segun se dixo, son como los quadrados de los tiempos en que se hiciere el Balance: y asi, en el Navío de 60, supuesto $x = 15$, $\mathrm{K} = 9\frac{1}{8}$, y la altura de la ola $a = 36$,

se halla $\alpha = \frac{15.15.36}{15.15 + \frac{247}{192}.9\frac{1}{8}.36} = 12\frac{1}{2}$ pies; y si se supone $x = 21$, resulta $\alpha = 18\frac{1}{3}$, asi como suponiendo $K = 6$, $\alpha = 16$.

467 A estas elevaciones se debe agregar la desnivelacion ó alturas á que ascenderá la ola mas arriba, por causa de la velocidad con que chocará el costado del Navío, cuya altura es (*Pro.* 18. *Lib.* 2. *Tom.* I.) $= \frac{u^2}{64}$ expresando u la velocidad de la ola, que, como diximos (§. 449), es $u = \frac{8b}{(a+b)^{\frac{1}{2}}c}$: y así será dicha altura $\frac{u^2}{64} = \frac{b^2}{(a+b)c^2} = \frac{(1+\frac{1}{2}c)^2 a}{(2+\frac{1}{2}c)c^2}$, ó proxîmamente de $\frac{3}{16}a$: por lo que siendo la altura de la ola a que antes supusimos de 36 pies, será lo que se debe añadir á las precedentes elevaciones $\frac{3}{16}.36$ pies $= 6\frac{3}{4}$: y así serán de $19\frac{1}{4}$, $25\frac{1}{12}$, y $22\frac{3}{4}$. Pero esto no es sino en el solo caso en que la ola caiga exâctamente perpendicular sobre el costado: y por tanto es tan arriesgado que coxa asi al Navío, no quando caiga un poco obliquamente, como quando se va de bolina. En este caso es u^2 menor en la razon de 5 á 4, y así solo será la altura que deba añadirse de $5\frac{2}{5}$ pies, con lo que quedaran las elevaciones en $17\frac{9}{10}$, $23\frac{11}{15}$, y $21\frac{2}{5}$. Pero no es aun esta la mayor correccion que se debe practicar: el Navío no recibe la ola firme como si fuera una roca, sino que cede á su impulso, tomando asimismo parte de la velocidad, y de otra tanta debemos contar disminuida la u. Esta puede ser mayor ó menor, segun fuere la resistencia del costado; pero supuesto que se reduzca la u á sus $\frac{2}{3}$, tendremos que disminuir u^2 en la razon de 9 á 4: y asi los $5\frac{2}{5}$ pies quedaran en $2\frac{2}{5}$, y las elevaciones en $15\frac{1}{2}$, $21\frac{1}{3}$, y 19.

468 Con esto se ve ya claramente, que no teniendo

el

el Navío de elevacion en su medio sino de 16 á 17 pies, solo el primer caso en que supusimos $x = 15$, y $K = 9\frac{1}{8}$, es admisible; en los demas, ya sea poniendo $x = 21$, ó $K = 6$, el agua pasará por encima del bordo anegando el Navío: y así es menester renunciar á la ventajosa comodidad, ó poco trabajo de la Arboladura que pide $x = 22$. En sustancia, la elevacion de las aguas pide que sea T lo menor posible, y quando mas de 3 segundos: y la ventaja en las Arboladuras, que sea $T = t$, que en las olas grandes llega á ser de $5''$.

469 En las Embarcaciones menores se necesita que, á proporcion, sea T^2 menor para que no se anieguen de agua, pues siendo las alturas de los bordos proxîmamente como las dimensiones lineares de los Buques, necesita serlo igualmente $a = \frac{T_2 a}{T^2 + \frac{1}{64}c^2(a+b)} =$

$$\frac{T^2}{\frac{c^2}{64}(a+b)}\left(1 - \frac{T^2}{\frac{c^2 a}{64}(a+b)} + \frac{T^4}{\frac{c^4 a^2}{64^2}(a+b)} - \&c.\right)$$

: en cuya expresion se vé, que colocando T^2 en razon de las dimensiones lineares, es su valor menor que en la razon de dichas dimensiones; y por consiguiente, aumenta en las Embarcaciones menores. Pongamos por exemplo una Fragata en todo semejante al Navío de 60; pero de medidas ú dimensiones de la mitad del Navío, y tendremos en ella $a = \frac{x^2 a}{x^2 + \frac{247}{192}Ka} =$

$$\frac{\frac{15}{2}\cdot\frac{15}{2}a}{\frac{15}{2}\cdot\frac{15}{2} + \frac{247}{192}\cdot\frac{9\frac{1}{8}}{2}\cdot a} = \frac{15.15.a}{15.15. + \frac{247}{192}.9\frac{1}{8}.2a}$$

, y colocando

$$a = 36, = \frac{25.36}{25 + \frac{247}{192}.9\frac{1}{8}.8} = 7\frac{67}{119}$$

: esto es, $1\frac{37}{119}$ pies mas que la mitad de lo que se halló en el Navío (§.466) $12\frac{1}{2}$. De esta suerte, añadiendo á los $7\frac{67}{119}$, los

3 pies que resultaron por la desnivelacion, será la altura á que se elevará el agua en la Fragata $10\frac{67}{119}$ pies; pero la elevacion de su bordo es solo de 8 ú $8\frac{1}{2}$ pies: luego el agua la pasará por encima, con todo que al Navío construido proporcionalmente no le sucederia. Es, pues, preciso disminuir el valor de T^2 en la Fragata.

470 Si se quisiere que en ella no se eleve el agua mas que lo que se eleva proporcionalmente en el Navío: llamando por un instante t el tiempo en que cumpliera la Fragata una oscilacion, y $\frac{n}{1}$ la relacion entre las dimensiones lineares del Navío y Fragata, tendremos $\frac{T^2 a}{T^2 + \frac{c^2(a+b)}{64}} + 3 : \frac{t^2 a}{t^2 + \frac{c^2(a+b)}{64}} + 3 = n : 1$: que da el valor de

$$t^2 = \frac{\frac{1}{64}c^2(a+b)\left(\frac{T^2 a}{T^2 + \frac{1}{64}c^2(a+b)} - 3(n-1)\right)}{na + 3(n-1) - \frac{T^2 a}{T^2 + \frac{1}{64}c^2(a+b)}}.$$

Substituyendo ahora $n = 2$, porque se suponen las dimensiones lineares de la Fragata mitades de las del Navío, con los demás valores hallados, se tendrá $t^2 = \frac{\frac{36.11}{20}(12\frac{1}{2} - 3)}{72 + 3 - 12\frac{1}{2}}$, ó proxîmamente $= 3$; en lugar que, segun la proporcionalidad del Navío, debia ser $= 4\frac{9}{16}$. Substituyendo en conseqüencia $3 = T^2$ con $a = 36$ en $\alpha = \frac{T^2 a}{T^2 + \frac{1}{64}c^2(a+b)}$, se halla $\alpha = \frac{3.36}{3 + \frac{11.36}{20}} = 4\frac{14}{19}$, á que añadiendo los 3 pies de desnivelacion, son $7\frac{14}{19}$ á los que solamente ascenderá el agua.

agua. Este mismo valor de T^2 substituido en $T^2 = \frac{x^2}{Kl}$, con $x = \frac{15}{2}$, y $l = 3\frac{1}{4}$, dá $3 = \frac{15.15}{4K.3\frac{1}{4}}$, ó $K = \frac{15.15}{12.3\frac{1}{4}} = 5\frac{10}{13}$; es el valor que debe tener K, en lugar de $4\frac{9}{16}$, para que la ola de 36 pies no pase por encima de la Fragata.

471 Para la de 22 Cañones con $31\frac{1}{3}$ pies de Manga, hallamos (§.172) $K = 7\frac{3}{4}$: y este valor substituido en la equaciones, dá la elevacion del agua, con la ola de 36 pies de altura, de 14 pies, quando la Fragata no tiene sino 11; pero si á esta, que está con muchos llenos de Proa y Popa, la debe sobrepujar el agua con el exceso de 3 pies, ¿qué no debe suceder á otras que, sobre ser muy delgadas en los extremos, y por consiguiente tener menor valor la K, construyen algunos Constructores modernos, á persuacion de lo que, sin estas atenciones, escribieron los Geómetras, con solo $9\frac{1}{2}$ pies de altura? Precisamente deben pasar por encima de ellas, con semejante ola, 5 ó mas pies de agua: y por tanto, en igual ocasion, no pueden mantenerse contra la Mar; deben huir de ella arribando, á fin que disminuyendo la velocidad con que las choque, se rebaxen en la mayor parte los 3 pies de la desnivelacion, que aun no serán bastantes: añadiendose, que no en todos casos se puede arribar; el estar empeñados sobre una Costa obliga á mantenerse contra el grande ímpetu de las olas, y en semejante caso están en sumo grado expuestas estas Embarcaciones. Quando se quieran disminuir de altura, es preciso aumentarlas el valor de K como hemos visto; y sin ello por precision se han de seguir aquellos inconvenientes (a): es sin embargo todo al contrario lo que practican los tales Constructores.

Es

(a) Si fuera cierto, como dice *Mr. Bouguer* (*Trat. del Na-*

472 Es digno de reparo, á mas de lo dicho, el tercer Balance que dá el Navío. Si este no se efectua sino de resultas del segundo, ó caida por barlovento, precisamente ha de ser aquel menor; pero puede agregarsele la accion de nueva ola, y esta puede casualmente comunicar su efecto al tiempo que tambien comunicaba el Navío el suyo. En este caso se juntan, pues, dos potencias casi iguales, y por consiguiente tambien serán casi duplas la rapidez del Balance, su magnitud, y los momentos que padezcan Buque y Palos. Por lo ordinario no se verá sino rara vez esta casualidad; pero quando ocurra, es preciso que el Navío esté dispuesto con las mayores ventajas, para que resista sin fracaso lance tan fortuito.

473 La Cabezada ya diximos que en nada se diferencia del Balance. Es en aquella (§.159) $K = 117\frac{1}{2}$, (§.240) $G = 7851843.m$, y el valor de x, ú distancia desde el exe de rotacion hasta el punto donde se supongan como reunidos todos los cuerpos ó partes del Navío, se puede suponer $= 50$. Con esto, el tiempo en que el Navío executará por sí solo la Cabezada

Navío, pag. 332) que la Fragata el Triton hacia sus balances en $4''\frac{1}{2}$, tendriamos $\alpha = \frac{20a}{20+\frac{11}{20}a}$: substituyendo $a = 36$, $\alpha = \frac{5.36}{5+\frac{11.9}{20}}$, ó proxîmamente $a = 18$: á que añadiendo los 3 pies de desnivelacion, fueran 21 los que el agua se elevaria en el costado del Triton; quando no tendria este de altura sino solo 8 ó 9 pies: y así la pasaran 12 pies de agua por encima, lo que realmente no fue, porque la hubiera sido imposible navegar. Una ola solo de 12 pies elevaria el agua de $10\frac{1}{5}$, y con todo lo baxa que fuera la hubiera pasado por encima.

zada ó arfada, será $T = \left(\frac{50.50}{117\frac{1}{2}\cdot 3\frac{1}{4}} + \frac{(7851843)^2}{64(117\frac{1}{2})^2 3\frac{1}{4}(68650)} + \left(\left(\frac{50.50}{117\frac{1}{2}\cdot 3\frac{1}{4}} + \frac{(7852843)^2}{64(117\frac{1}{2})^2 3\frac{1}{4}(68650)^2} \right)^2 - \left(\frac{70.70}{117\frac{1}{2}\cdot 3\frac{1}{4}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}$: que se reduce proxîmamente á $T = 2\frac{56}{100} + \frac{20}{100}$, los $\frac{20}{100}$ resultantes del valor de G; por cuyo motivo se ve el poco efecto que hace ésta considerable resistencia, respecto del valor tan crecido de $K = 117\frac{1}{2}$: de donde debe inferirse el mucho menor que debe resultar por la accion de las Velas, que en efecto se hace despreciable.

474 Con esto parece que debiéramos concluir, que el efecto de la cabezada no puede ser menos favorable en el Navío de 60, que lo es el Balance, puesto que el tiempo que resulta es casi el mismo, pero aquí tenemos otra causa á que atender, que es la velocidad del Navío que busca la ola, y la choca con la velocidad respectiva, suma de ambas velocidades. La velocidad de la ola es (§.449) $= \frac{8b}{(a+b)^{\frac{1}{2}} c}$, ó si substituimos $b = a(1+\frac{1}{2}c)$, como hicimos (§. 449) será $= \frac{8a^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}c)}{c(2+\frac{1}{2}c)^{\frac{1}{2}}}$, y la velocidad con que choca la Proa $= \frac{8a^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}c)cof.\varepsilon}{c(2+\frac{1}{8}c)^{\frac{1}{2}}} + u$, expresando u la velocidad directa del Navío, y ε el ángulo con que la direccion de la ola corta la del Navío. Esta cantidad será, pues, á 1'', como $b = a(1+\frac{1}{2}c)$ á $T = \frac{ac(1+\frac{1}{2}c)(2+\frac{1}{2}c)^{\frac{1}{2}}}{8a^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}c)cof.\varepsilon + cu(2+\frac{1}{2}c)^{\frac{1}{2}}}$, tiempo en que pasará la mitad de la ola por debaxo de la Proa del Navío.

475 Para hallar el valor de t, tiempo en que el

Navío debiera dar la cabezada por causa de la ola, no hay sino añadir al precedente el tiempo en que la misma ola correrá la longitud h, que es $=$

$$\frac{hc(2+\frac{1}{2}c)^{\frac{1}{2}}}{8a^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}c)cos.\varepsilon+cu(2+\frac{1}{2}c)^{\frac{1}{2}}}$$

; y tendremos $t =$

$$\frac{c(2+\frac{1}{2}c)^{\frac{1}{2}}(a+\frac{1}{2}ac+h)}{8a^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}c)cos.\varepsilon+cu(2+\frac{1}{2}c)^{\frac{1}{2}}}$$

. Si para el Navío de 60 Cañones colocamos $h=17$, $a=9$, $u=10$, y $cos.\varepsilon=\frac{1}{2}$, resulta $t = 1\frac{59}{100}$.

476. El tiempo en que el Navío dará la cabezada, será pues, (§.457) $\Theta = \left(\frac{2t^2x^2}{x^2+t^2Kl}\right)^{\frac{1}{2}}$, ó substituyendo (§.473) $x=50$, $K=117\frac{1}{2}$, y $l=3\frac{1}{4}$, será $\Theta = \left(\frac{10000t^2}{5000+764t^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Quanto menor fuere t, menor será el tiempo en que el Navío dará la cabezada, pero t es menor quanto mayor sea la velocidad del Navío u: luego quanto mayor sea esta, menor será el tiempo en que dará la cabezada. Si colocamos el valor de $t = 1\frac{59}{100}$, como se halló (§.475) baxo el supuesto de $a=9$, $u=10$, y $cos.\varepsilon=\frac{1}{2}$, quedará $\Theta = 1\frac{89}{100}$: de suerte, que el Navío diera la cabezada $\frac{87}{100}$ mas pronto que la que por sí solo daria.

477 La magnitud de la cabezada fuera (§.459) $\delta = \left(\frac{x^2+t^2Kl}{2t^2Kl}\right) sen.\Delta = \left(\frac{T^2+t^2}{2t^2}\right) sen.\Delta$: donde se ve, que por solo ser T mucho mayor que t, aumenta con exceso esta cantidad. Si substituimos, como antes, $x=50$, $K=117\frac{1}{2}$, y $t=1\frac{59}{100}$, resulta $sen.\delta = 1\frac{84}{100} sen.\Delta$: de suerte, que esta cabezada fuera á la que diera el Navío, siendo $T=t$ en la razon de $1\frac{84}{100}$, á la unidad, ú de 46 á 25.

478. La velocidad máxima de la cabezada es (§.

(§.460) $= \left(\frac{T^2+t^2}{2t^2}\right)^2 \frac{32K^2P\mathit{sen.}\Delta}{G}$: con que es esta á la que resultara siendo $T=t$, como $(T^2+t^2)^2$ á $(2t^2)^2$, ó supuesto, como antes, $t = 1\frac{59}{100}$, como 33 á 16, razon fuertemente excesiva.

479 La accion que padecen los Palos es (§.461) $= \left(\frac{T^2+t^2}{2t^2T}\right)^2 \frac{SK\mathit{sen.}\Delta}{l}$: y la mínima sucede quando es $T=t$. Esto prueba la necesidad de reducir el valor de T hallado por la equacion (§.462) $S = t^2KPl$, ó $x^2 = t^2Kl$: en la qual colocando $K = 117\frac{1}{2}$, $l = 3\frac{1}{7}$, queda $x^2 = 381\frac{7}{8}.t^2$, ó $x = 19\frac{54}{100}.t$: de suerte, que si substituimos para el caso de $a=9$, y $u=10$, $t = 1\frac{59}{100}$, resulta $x = 31\frac{7}{100}$ pies. Para que el Navío cabezease, pues, con la mayor suavidad y alivio de los Palos, fuera preciso reducir x á menos de las dos terceras partes, ó S á la mitad; todo al contrario de lo que hallamos para el Balance, porque alli se halló (§.461) $T < t$, y aqui al contrario $T > t$. Por regla general, pues, se procura en los Navíos quitar peso de las Cabezas, y acercarlo quanto sea posible al medio. Con otra ola, y otra velocidad u, tuvieramos distinto valor de t; pero se ha tomado un caso de los algo expuestos, que son los que nos deben governar: en los suaves no se corre riesgo.

480 Tambien es la accion que padecen los Palos (§.464) $= \left(\frac{x^2+t^2Kl}{x}\right)^2 . \frac{S\mathit{sen.}\Delta}{4t^4l^2}$: y como en Navíos semejantes, y que sólo se diferencian en sus longitudes, es x como e, expresando esta la misma longitud, y K como $\frac{e^2}{p}$, expresando p la profundidad de los Buques; será en ellos la accion de los Palos como $\left(\frac{e^2+t^2l.\frac{e^2}{p}}{e}\right)^2$, ó como los quadrados de las longitudes;

 por

por cuyo motivo es expuesto el que se alarguen mucho los Buques, conforme practican muchos Constructores, sin mas mira que adelantar algo en su marcha.

481 Por lo ordinario no se podrá reducir la x, ó S tanto como se hace necesario, con que por lo dicho (§.464) fuera bueno disminuir K, para disminuir igualmente la accion de las Arboladuras, á no ser por las inundaciones, ó elevaciones del agua en la Proa, que aun son mas excesivas que las del costado, por causa de la velocidad u. El valor de estas es (§.465) $\alpha = \frac{x^2 a}{x^2 + \frac{247}{192}\mathrm{K}a} = \frac{\mathrm{T}^2 a}{\mathrm{T}^2 + \frac{1}{64}c^2 a(2+\frac{1}{2}c)}$, añadiendole la altura de la disnivelacion, que por ser la velocidad con que la ola choca la Proa (§.474) $= \frac{8a^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}c)cos.\varepsilon}{c(2+\frac{1}{2}c)^{\frac{1}{2}}} + u$, será dicha desnivelacion $= \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}c)cos.\varepsilon}{c(2+\frac{1}{2}c)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{8}u\right)^2$.

482 Estas expresiones manifiestan que quanto menor fuere K, mayores serán las elevaciones del agua en la Proa: y asimismo quanto mayor fuere u, velocidad directa del Navío. Para el Navío de 60 Cañones será $\alpha = \frac{762a}{762+55a}$: y la desnivelacion $= \left(\frac{43}{100}a^{\frac{1}{2}}cos.\varepsilon + \frac{1}{8}u\right)$; pero esta expresion varía segun los casos ó valores de u y ε. Si suponemos como en el §. 476 $a = 9$, $cos.\varepsilon = \frac{1}{2}$, y $u = 10$, que se reduce al caso de navegar á bolina, será la desnivelacion $= 3\frac{59}{100}$, y $\alpha = 5\frac{46}{100}$, cuya suma es $9\frac{5}{100}$ pies, altura á que ascenderá el agua en la Proa. Si la ola chocase al Navío estando parado, como quando está dado fondo, será

$u = 0$, y $cos.\varepsilon = 1$: la desnivelacion se reducirá á $\frac{3}{16}a$: y si colocamos $a = 36$, será aquella $= 6\frac{3}{4}$ pies, que añadidos á $\alpha = 10$, resultan $16\frac{3}{4}$ por la elevacion de las aguas en la Proa.

483 Esta determinacion basta para conocer que en esté último caso de grandes olas y viento, navegando el Navío, no debe ni puede llevar mucha Vela, como lo ha pretendido un Geómetra. (*a*). Supongamos que á mas de ser $a = 36$, y $cos.\varepsilon = \frac{1}{2}$, pudiera darse $u = 15$: en este caso fuera, como antes, $\alpha = 10$, y la desnivelacion $= (\frac{3}{4}\sqrt{3} + \frac{15}{8})^2$, ó proxîmamente $= 10\frac{7}{25}$; por lo que la elevacion de las aguas en la Proa, fuera $= 20\frac{4}{25}$, tres pies mayor que toda la elevacion del Navío. Por esto los Marineros han tocado con la práctica la necesidad de quitar Velas en estas ocasiones: en efecto la u disminuye, y con ella la desnivelacion de las aguas.

484 Chocando las olas por la parte de Popa, es u negativa, y disminuye mucho mas la desnivelacion: de suerte, que en el caso de correr á Popa, que es $cos.\varepsilon = 1$, poniendo $a = 36$, y $u = 15$, seria la desnivelacion $= (\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{15}{8})^2$, ó proxîmamente $= \frac{9}{16}$ pies, que añadidos á $\alpha = 10$ fuera la desnivelacion de las aguas solo $= 10\frac{9}{16}$ pies: y si se largase mas Vela, á fin de aumentar la velocidad u, como hasta 20 pies, fuera la desnivelacion $= (\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{20}{8})^2$, ó proxîmamente $= \frac{1}{64}$, que dá la elevacion de las aguas $= 10\frac{1}{64}$, solo $\frac{35}{64}$ menos que antes: por cuyo motivo se ve lo escusado que es este último aumento de Vela, y que es suficiente la velocidad de 15 pies por segundo para evitar casi al último grado los perjuicios que acarrean los grandes golpes de Mar en la Popa.

485 La substitucion que hemos usado de $K = 117\frac{1}{2}$ no corresponde, por lo dicho (§.446), sino en el

(*a*) *Mr. Bouguer, De la mature des Vaiseaux*, Sec. 2. Conclusion., pag. 118.

el caso de ser las dos partes de Proa y Popa, de un lado y otro del centro de gravedad, semejantes, y caer el Fig. 51. punto I sobre B: en lo demas ha de resultar K de la relacion entre los volúmenes AFI, y CHD: quanto mayor fuere AFI, respecto á CHD, mayor será K por lo que toca á las arfadas de Proa; y al contrario. De aquí nace la necesidad de equilibrar estas dos partes; pero si se hace atencion, se verá, que no deben ser iguales: pues siendo u negativa quando chocan las olas por Popa, y disminuyendo por esto en ella la elevacion de las aguas, se hace evidente la precision de compensar esta diferencia ensanchando mas la parte de Proa.

486 Como por motivo del mayor ensanche en los extremos se logra, como acabamos de decir, mayor valor de K, y menor elevacion de las aguas en las cabezadas, se ve tambien claramente lo conveniente que es no adelgazar dichos extremos; antes al contrario, se hace preciso ensancharlos, particularmente en la parte ya fuera del agua, pues en esta no sirviendo de impedimento para el andar, aumenta la K, que es lo que eleva principalmente sobre las aguas á la Nave.

487 Esto debe hacer cesar ya la buena intencion con que los Geómetras han querido introducir la Proa de la menor resistencia, persuadidos á que daria la mayor velocidad á la Embarcacion: pues ven claramente que no pueden ser practicables sino en Rios ó Mares tranquilos; no donde las olas producen los efectos que hemos visto. Las aguas no solamente las inundarian, ó quizas hicieran perecer, sino que las quitarian la pretendida velocidad, como ya se dixo, y puede ver (§. 359). De esto se infiere claramente, que con Mares suaves andarán mas los Navíos largos, y de Proas agudas; pero en las agitadas, ú de violentas olas, deben tener ventajas los cortos y de Proas mas amplias. Con este motivo se puede tambien adaptar el

que

que lo mas amplio del Navío, ó Quaderna maestra, debe colocarse algo mas á Proa, que el medio de la Embarcacion; pero guardada la prevencion primera, no se hace esta precisa, como han creido, y aun creen sin motivo algunos.

488 Lo que si es preciso tener presente es, que aunque la resistencia G de los costados la hemos hallado de poca consideracion en la Cabezada del Navío de 60 de nuestro exemplo, puede ser muy crecida en Buque de distinta hechura, particularmente quando las Quadernas de las cabezas, ú de Proa y de Popa, en las proximidades á la superficie del agua, siendo debaxo sumamente angostas, como la 30 y 33, ensanchan muchisimo de pronto por un arco y punto de inflexion. Quando llegan á salir estos redondos fuera del agua, á su regreso ó caida aumenta la G en gran manera repentinamente, y lo mismo el valor de $\frac{Sdu}{S}$, que es proporcional á la accion de los Palos. Es, pues, preciso que los Constructores eviten, lo mas que fuere posible, incurrir en este defecto, que puede en ocasiones ser muy perjudicial.

LI-

LIBRO QUINTO.

De las máximas y reglas que resultan de los precedentes.

CAPITULO PRIMERO.

De la fortaleza de los Navios; del grueso de sus maderas, y de la relacion entre sus Mangas y Esloras.

489 DEspues de haber dado la theórica clara y manifiesta de quantas acciones ó movimientos se ofrecen en un Navío, así como de las resultas que ocurren, segun los principios sobre que se construyen ó disponen las cosas; parece muy propio poner lo mas principal al alcance del Construćtor y Marinero que no fueren versados en el cálculo que antes nos pudo sacar del laberinto de escollos sobre que caminabamos, y se reducirá á dar las reglas ó maxîmas que resultan de aquel fruto; pero siempre en la inteligencia de que el perfećto conocimiento de lo dicho será lo que mas utilidad produzca.

490 No nos detendremos en repetir las primeras nociones de lo que es un Navío ó Embarcacion, ni las propiedades que deban acompañarla: la infinita variedad que hay y puede haber de ellas: el método con que se han construido, construyen, y pueden construirse geometricamente; ni tampoco de varias atenciones y reparos prácticos, pues todo esto se ha tratado ampliamente en el Libro primero sin el menor cál-

cálculo : y aun en el primer Capítulo del Libro segundo el que hay es tan corto, que puede sin la menor detencion comprehenderse ; lo que se hace muy importante por ser de los principales cimientos en la construccion de los Navíos.

491 No nos detendremos tampoco en tratar de nuevo las malas conseqüencias que resultan de no unirse perfectamente las piezas que componen el Navío , ú del juego que con el tiempo pueden adquirir: este asunto se explicó largamente en el Capit. 9. del Libr. 2 , que puede reveerse , particularmente desde el §. 250 : y así, despues de quedar en la inteligencia de que la mas perfecta union de todo el Buque será una de las mayores ventajas ; la primera máxima que ocurre es , *que el Navío se ha de construir con la menos madera y herrage que posible sea.* Esta máxima se funda en que habiendose de sumergir el Navío en el fluido á proporcion del peso que tenga , segun demostramos ampliamente con medidas y demas atenciones en el Capit. 1. del Libr. 2 ; y aumentando igualmente la resistencia del fluido á medida que aumente dicha emersion, como se dixo en el Cap. 5. del mismo Libro , se sigue , segun el Cap. 1. del Lib. 4. §. 347 , que el Navío será menos velero : propiedad que sin fundamental motivo no debe perderse. Por otro lado , debe recibirse por máxima esencial , *que el Navío ha de tener toda la madera y herrage necesarios para mantenerse firme* , á pesar de todas las violentas agitaciones , sacudidas , y golpes del Mar. De estos dos principios resulta, que el Navío no ha de tener mas que estos precisos materiales: qualesquiera que se le agreguen , por falta de un debido conocimiento , no le son sino de grande perjuicio , particularmente si este exceso se agrega desde el centro de gravedad para arriba ; pues en tal caso, no solo resulta el defecto anotado , sino tambien los de perderse parte del aguante de la Vela : aña-

diendose en general los de disminuirse las alturas de las baterias, y el primor que requiere el govierno.

492. Para llegar á conseguir la perfeccion en este asunto, es preciso determinar la fuerza absoluta de la madera, y compararla con los esfuerzos que debe padecer. Lo primero ya se computó en el Cap.9. del Libro 2. §§.248 y 249: y aun lo segundo se ve resuelto en los propios números, con motivo de averiguar el peso que puede suportar uno de los costados del Navío; pero el cómputo solo se aplicó al caso de actuar solamente los simples momentos, ó de no actuar los pesos ó fuerzas, sino en el reposo; no en el de la agitacion, ú de los balances rapidísimos en que los momentos de inercia actuan con excesivas ventajas. Si bien se consideran estos momentos, se verá que su accion sobre las maderas que les deben sufrir, en nada se diferencia de la fuerza de percusion que en el Tom.1. Propos.42, sus Corolarios y Escolios, hallamos centenares y millares de veces mayor que la fuerza de gravedad, segun la velocidad del movimiento, y la materia que debe sufrir el golpe.

493. Es claro, pues, que no podemos determinar absolutamente estos esfuerzos, y por consiguiente tampoco las fuerzas de que deben constar las maderas; pero si nos vemos desposeidos de esta determinacion absoluta, podemos lograr la relativa, que auxiliada con las experiencias producirá la misma absoluta. La resistencia ó aguante de las maderas, semejantes en sus gruesos, es (*Cor.*13. *de la Defin.*33. *Lib.*1. *Tom.*1.) en razon directa de los cubos, de sus dimensiones lineares, y en inversa de los momentos que sobre ellas se exercieren, que en este caso son los de inercia. Si los gruesos de las maderas en los distintos Navíos fueren, pues, como las dimensiones de estos, segun lo practican proximamente los Constructores, serán los momentos de inercia que padecerán aquellas, como las quin-

quintas potestades de las dimensiones lineares; y por consiguiente *las resistencias de las maderas en razon inversa de los quadrados de las mismas dimensiones lineares*: y así, para que los Navíos fuesen igualmente fuertes, fuera preciso que el número de las Quadernas de que se componen, fueran como los quadrados de estas dimensiones; pero solo son proximamente como las raices cúbicas de los quadrados de ellas: luego *la fuerza de los Navíos queda en razon inversa de las raices cúbicas de las quartas potestades de dichas dimensiones lineares*: esto es, *los Navíos serán tanto mas débiles, quanto mayores sean las raices cúbicas de las quartas potestades de sus mangas*; ó *quanto mayores sean los produćtos de sus mangas por las raices cúbicas de las mismas.* El Navío de 70 y Fragata de 22 tienen por exemplo sus mangas en la razon de 3 con 2: sus fuerzas son por consiguiente proximamente como 5 con 8. Esto mismo quedó demonstrado (§. 113), donde diximos, que era preciso, segun ello, que las Fragatas fuesen excesivamente fuertes, ó los Navíos muy débiles: lo cierto es, que la experiencia no nos ha dado sino quotidianas pruebas de ello. Los Navíos salen continuamente escalabrados, descoyuntados y rotos de los temporales; quando las Fragatas están firmes y fuertes: los Navíos necesitan de continuadas carenas costosisimas; las Fragatas con pocos reparos se mantienen.

494 No se limita, sin embargo, á este el error que se comete. Los Construćtores, llevados mas bien de una apariencia, que de la Geometria, les hizo creer que el crecido buque del Navío le hacia precisamente mas fuerte, y en conseqüencia lo han sobrecargado de Artilleria, con tal exceso, que si la que lleva un Navío de 70, con sus correspondientes utensilios, es de 5250 quintales, no lleva una Fragata de 22 sino 924, quando á correspondencia debieran ser 1550:

ó la inversa, siendo solo de 3118 quintales los que á proporcion tocaban al Navío, le ponen 5250; esto es, dos terceras partes mas de lo que le toca. Añádase ahora este exceso de momentos de inercia á la debilidad del Navío, ya demonstrada, y se verá que las resultas no pueden ser sino fatalisimas, como la experiencia lo manifiesta.

495 Los Navíos no solo son débiles, segun esto, por lo respectivo á su tamaño, sino tambien por el crecido aumento de su Artillería: el remedio ha de consistir en fortalecerles mas, y no en disminuir el calibre de los Cañones, porque esto fuera de resultas mas perjudiciales: á mas de que tampoco evitara el primer defecto, que nace de la misma debilidad de las maderas. Al contrario, las Fragatas es preciso se disminuyan de fuerzas por las mismas razones, y por la primera máxima establecida. Para esto es preciso que la experiencia nos diga, qué magnitud de Navío se ha observado de bastante fuerza y firmeza: supongamos que sea el de 40 pies de manga, y tendremos, que á todos los de mayor manga será preciso fortalecerlos, y á los de menor disminuirles los gruesos de maderas. Esto se puede practicar de dos modos, ó variando los gruesos, ó variando los anchos de las maderas; pero como esta enmienda debe practicarse con el menor perjuicio posible, esto es, con el menor aumento de peso; y por otro lado, las fuerzas de las maderas son como los quadrados de sus gruesos, y como sus simples anchuras, es evidente que la correccion debe recaer enteramente sobre los gruesos: pues de esta suerte, con menos aumento de peso se gana muchisima mas fuerza.

496 Supongamos que ya no sean los gruesos de maderas como las simples dimensiones lineares, sino como los quadrados de las mismas: en este caso, sus fuerzas absolutas serán como las quintas potestades; y que-

quedando los momentos de inercia en corta mayor razon que las mismas, quedarán las relativas fuerzas proxîmamente iguales en todos los Navíos; pero el número de Quadernas de que se componen es, segun se dixo, como las raices cúbicas de los quadrados de las mismas dimensiones: luego *quedarán las fuerzas de los Navíos proxîmamente en esta razon*, ó mas bien *como las raices quadradas de las mismas dimensiones lineares*: aumento de fuerzas que se hace preciso tengan para sostener sin detrimento el excesivo peso de su Artillería.

497 Exâminemos ahora los inconvenientes que de esta regla pueden resultar. Los gruesos y anchos que proxîmamente dan los Constructores á las cabezas de los planes es de $\frac{1}{40}$ de la manga de los Navíos: de esta suerte, al de 40 pies de manga, que hemos supuesto de la precisa y debida fortaleza, le corresponden 12 pulgadas de grueso en las cabezas de los planes: y al de 48 pies de manga $14\frac{2}{5}$ pulgadas; pero siendo la razon de estas mangas como 5 con 6, debieran ser los gruesos de maderas, segun las reglas que acabamos de establecer, como 25 á 36: esto es, el grueso de la madera en el Navío de 48 pies de manga, debe ser de $17\frac{1}{5}$ pulgadas, quedando su ancho de solas las $14\frac{2}{5}$. Este grueso es $1\frac{1}{5}$ pulgadas mayor que el que se da al mayor Navío: no siempre se hallarán piezas que le dén; pero los Constructores deben arrimarse á él lo mas que fuere posible.

498 Ademas de las Quadernas se necesita fortificar, en igual modo, para sostener los excesivos momentos de inercia que resultan del balance, la curbería de todas las cubiertas; y del mismo modo la pernería que las ligue: el peso á que monta el exceso es, con corta diferencia, de 2000 quintales; por consiguiente el Navío se sumergirá en el fluido, á causa de este peso, de 3 pulgadas mas: cantidad despreciable, pues.

pues en el §. 356 se demonstró que *6* pulgadas más calado el Navío no produce sino $\frac{3}{1000}$ de milla de perdida de su andar. Es, pues, yá evidente, que el aumento de la madera propuesto en los Navíos grandes, se puede practicar sin riesgo de pérdida en ninguna de las propiedades. No obstante, si de la diferencia de grueso y ancho, $17\frac{1}{3}$ y $14\frac{4}{5}$, resultare considerable desperdicio de madera, se podrán igualar estas dos medidas, tomando para una y otra *16* ó $16\frac{1}{2}$ pulgadas; pues de ello será cortísima la diferencia que resulte, ya sea en peso ó en fortaleza.

499 En las Fragatas tenemos que disminuir los gruesos de sus Quadernas, segun la regla dada. Tomemos por exemplo la de 22 Cañones con 32 pies de Manga, y quedará la razon que con ella tiene la de 40, como 5 con 4: por consiguiente sus quadrados, como 25 con *16*, y el grueso de maderas de la Fragata de solo $7\frac{17}{25}$ pulgadas, con el ancho de $9\frac{3}{5}$. Pero como no se aumentará peso por tomar la raiz quadrada del producto de ambas medidas para medida comun: esto es, proxîmamente $8\frac{3}{5}$ pulgadas, y lexos de perder fuerza con ella se gana; se sigue, que dando á la cabeza de los planes las $8\frac{3}{5}$ pulgadas en lugar de $9\frac{3}{5}$, queda la Fragata aun mas fuerte, á proporcion que los Navíos, y sin embargo con 5*6*0 quintales de menos peso.

500 Si en lugar de clavazon hubiera de usarse de cavillería de madera, para clavar las tablas, se deberán aumentar los anchos de las Quadernas, y disminuir á proporcion los gruesos, á fin de no debilitarlas con los taladros; pero en esto es preciso se guarde gran precaucion, porque á medida que esta diferencia sea mayor, mas y mas se debilitan por sí las maderas, á causa que sus fuerzas son como los quadrados de sus gruesos.

501 Sin embargo que estas consideraciones son dignas del mayor cuidado y atencion, se hace aun mas

mas particular la fortificacion de las curvas de la segunda cubierta de los Navios. En el §. 255 expusimos ampliamente esta necesidad, en atencion á que los momentos de inercia que padece esta cubierta son mas que duplos de los que padece la primera, y que un Cañon de 24, puesto en esta, produce aun menos efecto que uno de á 4 puesto en la segunda. Aun fortificando igualmente ambas cubiertas, diximos en el mismo párrafo, que puede leerse para mas clara inteligencia, que poniendo Cañones de 24 en la primera cubierta, no corresponden en la segunda sino de 6: y así debe inferirse, que la curveria de la segunda cubierta debe ser mas fuerte que la de la primera. Esto mismo practican los Constructores con las Fragatas, en atencion á no llevar Artillería en la cubierta baxa; y por la misma razon, siendo en los Navíos el momento de inercia que padece la baxa mucho menor que el que padece la alta, menor fortificacion necesita.

502. Hasta aquí no hemos tratado sino de la fortificacion que necesita el Navío, respecto á la accion que padece en sus Balances. La que requiere, por lo que toca á sus Cabezadas, varía enteramente, porque los momentos de inercia no tienen en este caso lugar. En el §. 255 diximos, que divididos estos momentos en verticales y horizontales, aquellos están sostenidos por la fuerza vertical de las Quadernas, que es excesiva, y por consiguiente poco efecto produce sobre ellas; y los horizontales por la fuerza horizontal de Quadernas y curvas: de suerte, que en el movimiento del Balance se hacen estos tan considerables como hemos visto. En el de la Cabezada son enteramente contrarias las conseqüencias, porque el movimiento horizontal es casi insensible, y solo resultan efectos considerables en los momentos verticales; pero como estos momentos están sostenidos por los golpes de Mar que los producen, acompañando al mismo

cuer-

cuerpo del Buque, se sigue, que ya no quedan que considerar en las Cabezadas sino los simples momentos, y no los de inercia.

503 De esta suerte la fuerza que el Navío necesita en estos momentos no es distinta de la que necesita en el caso del reposo, ú de la que necesita para no quebrantarse, y que explicamos ampliamente en el Cap. 9. del Lib. 2, que puede leerse para mayor inteligencia. La accion que padecen los Navíos semejantes es, en este caso, como las quartas potestades de sus dimensiones lineares; y la fuerza de las maderas como los cubos de las mismas: luego *las fuerzas de los Navíos serán en razon inversa de las mismas dimensiones lineares.* Esta es la causa porque se observan tan excesivos quebrantos en los Navíos grandes; quando en las Fragatas casi son insensibles.

504 Para remediar este daño, y que queden unos y otros con la misma fortaleza, es preciso aumentar el grueso de las tablazones y demas piezas que corren de Popa á Proa, en razon de los quadrados de las dimensiones lineares de los Navíos semejantes; ó acortar sus longitudes ó esloras, respecto de las mangas, en razon inversa de las raices quadradas de estas. Si admitimos, como antes, el Navío de 40 pies de manga, por el de la debida y precisa fortaleza, teniendo de eslora 144 pies; el Navío de 48 pies de manga solo debiera tener 160 pies de eslora, en lugar de 175 que le ponen los Construćtores, para que no padeciera mas en quanto á su longitud: y la Fragata de 32 pies de manga 128, en lugar de solos 115 que los Construćtores la dieran. Esto es, dexando el grueso de las tablas en razon de las dimensiones lineares ó mangas de los Navíos; pero si al contrario no se quisieren alterar las esloras, siendo la cinta principal del Navío de 40 pies de manga, de 7 pulgadas de grueso, se le debe dar á la de 48 de manga $10\frac{2}{25}$, por ser el qua-

dra-

drado de 40 al de 48, como 7 á 10 $\frac{2}{25}$. Esta medida solo se aparta de la que dan los Constructores de $\frac{1}{2}$ pulgada; pero si en esta pieza se halla esta conformidad, no sucede lo propio con la demas tablazon, porque ordinariamente entablan los fondos de los dos Navíos de 48 y 40 pies de manga, casi con el mismo grueso de tabla; quando, segun nuestra regla, si la tabla del fondo del Navío de 40 pies de manga fuese de 4 pulgadas de grueso, la del otro Navío debia ser de 5 $\frac{19}{25}$, ó de 5 $\frac{3}{4}$ pulgadas. Para la Fragata de 32 pies de manga, la cinta debiera ser de 4 $\frac{1}{2}$ pulgadas, y la tabla del fondo de 2 $\frac{3}{5}$: los Constructores las hacen de 5 y 3.

505 Puede tomarse un medio entre las dos reglas, corrigiendo parte en la eslora, y parte en el grueso de las tablas. Para esto es preciso que *el grueso de estas sea como las raices quadradas de los cubos de las mangas: y la eslora como las raices quadradas-quadradas de los cubos de las mismas mangas.* De esta suerte, el grueso de la cinta principal en el Navío de 48 pies de manga, debe ser de 9 $\frac{1}{4}$ pulgadas: el de la tabla del fondo de 5 $\frac{1}{2}$ pulgadas; y la Eslora de 165 pies. En la Fragata de 32 pies de manga, la cinta de 5 pulgadas, la tabla del fondo de 2 $\frac{6}{7}$, y la Eslora de 122 pies: cuyas medidas por mas conformes con la práctica de los Constructores, podran quizás tener mayor aceptacion. La demas tablazon de los Navíos se corregirá tambien proporcionalmente.

506 Esta casi general disminucion de los gruesos de las maderas en las Fragatas, y del aumento de las Esloras, les será de sumo beneficio, porque pueden salir mucho mas ligeras, procurando disminuir sus volúmenes ó buques proporcionalmente al peso que se les quite; pero el aumento de los mismos gruesos en los Navíos, con la disminucion de Eslora, será algo perjudicial para el mismo efecto. En el de 48 pies de manga, se aumentará el peso de maderas y herrages

de 4500 quintales, á que añadiendo 1500 mas, por motivo del peso que podrá suportar menos la disminucion de la eslora, serán 6000, que equivalen á 9 pulgadas que el Navío se sumergirá mas en el fluido. El efecto en el andar que esto producirá, será algo, aunque corta cosa, y la bateria queda yá mas baxa de las mismas 9 pulgadas: por cuyo motivo se le puede dar algun volúmen mas á los fondos del buque, para que se profundice de algunas pulgadas menos.

507 Esta enmienda en los Navíos será quizás repugnante á muchos Constructores, que vinculan su credito solo en sacarlos veleros: en efecto esta propiedad, luego que el Navío se hace á la vela, se manifiesta al público: la de ser firme y fuerte se conoce tarde, ó no se conoce; pues pueden atribuirse los descalabros á varias causas; sin embargo la Geometría nos manifiesta claramente los que deben resultar de esta falta de gruesos en las maderas, y de las excesivas longitudes en las esloras.

508 A mas de la fuerza relativa que los Navíos tienen, respecto unos á otros, debemos considerar la que tienen entre sí las distintas partes de un propio Navío, para que á cada una se le aumente ú disminuya, segun la urgencia. La accion ó momento que padecen de Popa á Proa es como los productos de los varios pesos por sus distancias al punto que padece la accion, (*Esc.* 1. *Def.* 33. *Lib.* 1. *Tom.* 1.) y por tanto diximos, supuesto que los pesos estén semejantemente distribuidos en los varios Navíos, que esta accion es como las quartas potestades de las dimensiones lineares; pero estos pesos pueden distribuirse ú ordenarse de varios modos, ó á varias distancias: por tanto, quanto mayores fueren estas, mas padecerán los Navíos: y así, quando otra necesidad no pida distinta disposicion, *quanto mas inmediatos se pongan los varios pesos, de que se componga la carga de un Navío, á su*

centro de gravedad, menos padecerá aquel. Esto debe entenderse tambien aun hasta los materiales de que se compone el mismo Navío: de suerte, que si hubiera razones fundamentales que requieran mas cantidad de material en las proximidades del centro que á los extremos, tanta mas ventaja se lograria colocandolos así.

509 Esta necesidad queda comprobada con lo que acabamos de decir; pues siendo la accion que padece cada parte del Navío, como los productos de los varios pesos por sus distancias al punto que padece la accion, quanto mas inmediato al centro esté dicho punto, mas padecerá, no solo porque aquellas distancias serán mayores, sino tambien porque el número de los pesos que actuen será mayor. Las partes del Navío necesitan tener, pues, mas fortaleza, á medida que estén mas proximas al centro de gravedad: y así, la tablazon en el medio del Navío debe ser mas gruesa que á los extremos. En el de 48 pies de manga dimos á la cinta principal (§.505) $9\frac{3}{4}$ pulgadas, y á la tablazon del fondo $5\frac{1}{2}$: se puede dar á la cinta en el medio $10\frac{1}{2}$, y en las cabezas 9: á la tablazon del fondo 6 en el medio, y 5 en las cabezas: guardando el mismo orden en las demas tablas, y Navíos. Con esto no solo serán mas fuertes por causa de la fuerza absoluta de las maderas, sino porque el peso se recoge mas á su centro.

510 Por iguales razones no necesitan las Quadernas de las cabezas ser tan fuertes como las de enmedio del Navío: pues ni las cantidades de peso, ni las distancias del medio son tan grandes en aquellas, como en este; pero esta regla ya la han puesto en uso los Constructores Ingleses, que dan una pulgada de menos ancho á las de las cabezas.

511 Hasta aquí nos hemos reducido á tratar el asunto baxo el supuesto de hacerse el Navío todo de

 Ro-

Roble; pero se puede hacer de Cedro, Pino, ú de otras maderas que sean de menor ó mayor gravedad especifica que el Roble. En estos casos, como en el primero, es menester, en quanto sea posible, arreglarse á las máxîmas dadas. Si la madera es v.g. de menor gravedad especifica, es menester aumentar, ya sean los gruesos, ya los anchos, ó ya ambas medidas de las piezas, segun hubiere cabimento; pero no ha de ser sino hasta que quede el buque de igual ó de correspondiente fortaleza, sin aumentarle el peso, á fin de no perder las buenas calidades que de esta atencion dependen.

512 No basta para esto atender á la gravedad especifica de la madera, es preciso tener presente su fortaleza ó intensidad de sus fibras, porque no siempre la fortaleza es como la gravedad: hay maderas que á proporcion de su peso son mas fuertes, y otras que al contrario son mas débiles: de la primera especie es el *Pino*, lo que la hace mas preferente á las demas, porque al mismo tiempo no es menos durable. La fortaleza del de *Tortosa*, á la de nuestro *Roble*, la he hallado por varias experiencias como 4 con 5. *Mr. Muller* (*Tratado práctico de la Fortificacion* pag. 77.) dice haberla hallado como 2 con 3; por lo que nuestro *Pino Español* es sin duda mas fuerte en la razon de 6 con 5. Este Pino es el que los Franceses llaman *Sapin*, y los Ingleses *Fir*: el que llaman *Pin* y *Pine*, y que nosotros distinguimos por *Pino del Norte*, hallé por mis experiencias que es $\frac{1}{8}$ menos fuerte que el *Pino de Tortosa*, ó que su fortaleza es á la de nuestro *Roble* como 7 con 10. Pero todas estas razones no son tales que se hallen exemptas de variaciones: entre las mismas calidades de maderas hay algunas mas ó menos compactas, de mas ó menos fino el grano, de mas ó menos rectitud en las fibras, mas ó menos cargadas de resina, y mas ó menos secas: todo esto conduce á

va-

variar la fuerzas y el peso ; pero las medidas halladas fue con maderas bastante secas, y pueden tomarse como un medio, considerando despues las variaciones que pueden ocurrir por los varios estados de sequedad, sazon, y naturaleza de ellas.

513 El peso del mismo *Pino*, estando en su sazon, y regularmente seco, es proxîmamente al del *Roble* como 3 con 5 : donde se ve la ventaja de aquel, porque si su fuerza hubiera de ser como su peso, debiera tambien ser esta como 3 con 5, y se halla, segun diximos, como 4 con 5. De esta suerte, si la tablazon del costado de un Navío se hubiere de hacer de Pino, bastará para que sea igualmente fuerte que siendo de Roble, aumentar sus gruesos en la razon de 4 con 5 : en este caso, el peso de toda ella fuera menor que siendo de Roble en la razon de 4 con 3 ; esto es, el costado fuera una quarta parte menos pesado, quedando no obstante de la misma fortaleza : beneficio considerable, porque solo la disminucion de este peso llega en el Navío de 60 Cañones, que nos ha servido de exemplo, (§.161) á 2025 quintales.

514 De la misma manera disminuirá el peso de las demas maderas, llevando el systhema de dexarlas igualmente fuertes; pero con alguna ventaja mas. V.g. la fortaleza de las Quadernas es como el produćto del cubo de sus dimensiones, por la intensidad ó fuerza de la madera: con que para que queden igualmente fuertes, es preciso que los cubos de las dimensiones, por las intensidades, sean iguales : y por consiguiente, si el produćto del cubo de las dimensiones de la Quaderna, siendo de Roble, por su intensidad 5, se divide por la intensidad 4 del Pino, y del quociente se saca la raiz cúbica, será esta la dimension que requiere la Quaderna siendo de Pino: esto es, si el grueso de esta fuerza de 12 pulgadas, su cubo 1728, multiplicado por 5, y partido por 4, da al quociente
2160,

2160, cuya raiz cúbica es proxîmamente 13, que son las pulgadas que deben darsele á la Quaderna, para que siendo de Pino sea igualmente fuerte que la de Roble de 12 pulgadas. El peso de estas Quadernas es como el quadrado de sus dimensiones, multiplicado por su gravedad especifica: luego el peso de la de Roble, será á la de Pino, como 144 multiplicado por 5, á 169 multiplicado por 3, ó como 240 á 169: de suerte, que las Quadernas, siendo igualmente fuertes, pesarán proxîmamente $\frac{3}{10}$ menos que siendo de Roble; por tanto, todas las del Navío de 60 Cañones pesarán 2655 quintales menos. Si con todas las demas piezas se lleva la misma regla, pesará el todo del Navío proxîmamente 7000 quintales menos, quedando sin embargo de la misma fortaleza.

515 De esto se concluye claramente las grandes ventajas que resultarán de hacer el Navío de Pino; pues aunque para conservar el aguante de Vela se deben poner 2955 quintales de lastre mas, siempre quedará levantado sobre el agua de 9 pulgadas: por consiguiente tubiera de esta cantidad mas elevada la bateria, y seria mucho mas velero. O si la bateria se considerase suficientemente elevada, se podrá disminuir el puntal de aquellas 9 pulgadas: lo que fuera mucho mas ventajoso, no solo para aguantar mas la Vela, sino tambien para el andar.



CA-

CAPITULO 2.

De la magnitud de los Navíos.

516 AUnque en el *Cap.* 1. *Lib.* 2. determinamos la magnitud de los Navíos, no fue sino conformandonos con las medidas que ahora estilan dar muchos Constructores, y con ellos, á poquisima diferencia, todos los de Europa. Los antiguos usaron sus Buques mucho menores: esto es, los Navíos de Guerra, pues los de Comercio no deben tener mas límite que la voluntad del dueño, ó la medida de la carga que deben transportar, y el ahorro de gastos, en lo que tambien caben sus reflexiones. El *P. Fournier* en su *Hydrographia*, impresa en París año de 1679 (Lib. 1. cap. 30.), pondera la magnitud y buenas propiedades del Navío la *Corona*, como cosa singular en aquel tiempo, sin embargo de que su eslora se reducia á solos 155 pies Franceses, y su manga á 44; medidas que hoy se dan á un Navío de 64 Cañones, y quando mas á uno de 70. Pero no obstante esta autoridad *Mr. Dassie*, que imprimió su *Architectura Naval* en la misma Ciudad dos años antes que el Padre, da (pag. 110.) un estado de los Navíos que tenia el Rey de Francia el año de 1671, y supone los dos el *Sol Real*, y el *Real Luis* de 2500 toneladas, que segun las reglas que él mismo prescribe para determinarlas (pag. 23.) corresponden á cada Navío de estos 48 pies Franceses de manga, que es la que hoy se da á los mayores Navíos de tres puentes. Segun esto, parece que desde el año de 1670 acá no se ha variado sensiblemente la magnitud de los mayores Navíos; pero si pasamos á especular las clases menores, se hallan diferencias considerables. Un Navío de 60, segun el mismo *Dassie*, en el estado ci-

citado, no contenia sino 1000 toneladas, y á estas solo corresponden $34\frac{1}{2}$ pies de manga; pero sean $36\frac{1}{4}$, como resulta de una Tabla que da (pag. 51.), siempre son, quando mas, $38\frac{3}{4}$ Ingleses, $3\frac{1}{4}$ pies menos de manga de lo que (*Cap.* 1. *Lib.* 2.) asignamos al Navío de 60 Cañones.

517 *Guillermo Sutherland*, en su *Ship-builders assistant*, impreso en Londres año de 1711, da un Navío de los mayores de tres puentes (pag. 90.) de solos $46\frac{1}{2}$ pies de manga: y en la pag. 97. otro de 70 con $38\frac{1}{2}$, rebaxados 2 pies por el grueso de las tablas de ambos costados. *D. Antonio de Gastañeta* (*Proporciones de las medidas...... para la fabrica de Navios*) tambien da el Navío de 60 de $21\frac{1}{8}$ codos de manga, que corresponden á $39\frac{3}{4}$ pies Ingleses, $2\frac{1}{4}$ pies menos de lo que asignamos. De esto se infiere, que los Navios se han ido aumentando en buque diariamente, y que no se hacen tan precisas las medidas asignadas, que no puedan variarse, conservandolas solo con el fin de algun beneficio ó adelantamiento.

518 En efecto los Constructores modernos juzgan haberle percibido, pues á Navío de mayores dimensiones, conservando el buque necesario, cabe darle las líneas de agua mas agudas: y por consiguiente menos resistencias en ellas, de que redunda mayor andar.

519 No obstante el beneficio no es tan singular como puede creerse. Pongamos v.g. dos Navíos de 60 Cañones, uno con 42 pies de manga, y otro con solos 40: ambos de dimensiones proporcionales entre sí, tanto en el buque como en maderas, aparejos, gente, y aun en Artillería. Estos dos Navíos quedarian flotando sobre el agua con semejante disposicion y término: el chico, por lo dicho (§.359) andaria mas con vientos cortos, y el grande con vientos violentos: esto con la circunstancia de que el pequeño seria

mas

mas fuerte, como acabamos de decir en el Capítulo precedente, parece que le hace preferente; pero en el estado en que lo consideramos no puede reputarse por Navío de 60, á menos que no se le ponga la misma Artillería que al otro, tanto en número como en cantidad de peso ó metales. Substituida esta, quedará sobrecargado, no solo del peso excedente de ella, sino tambien de sus utensilios, y aun de alguna gente y víveres mas. Si el peso de la Artillería con sus utensilios en el Navío grande es de 3760 quintales, al chico le correspondieran 3250: esto es, 510 quintales menos, con que de estos quedara sobrecargado: y si el peso de la gente con sus víveres en el primero fuera de 5150 quintales, el segundo debiera llevar solo 4500: esto es, 650 quintales menos, que añadidos á los 510, será el todo de lo que iria sobrecargado el Navío chico de 1160 quintales, que corresponden á 1820 pies cúbicos de volúmen, y partidos como diximos (§.110) por 5312, resultan poco mas de 4 pulgadas que el Navío chico estará á proporcion mas sumergido en el fluido que el grande: causa por la qual debe ser aquel menos velero; pero como demostramos (§.356) que por estar mas sumergido de 6 pulgadas solo pierde $\frac{3}{1000}$ de milla por hora, por las 4 solo perderá $\frac{2}{1000}$: esto es, una milla en cada 500, cantidad sumamente despreciable; por tanto la aprehension de aumentar los Navíos solo por conseguir mayor velocidad es absolutamente digna de desprecio.

520 A mas de esto, si por lo dicho (§.496) disminuimos los gruesos de Quadernas y tablas en razon de las mangas, á fin de que queden los dos Navíos de igual fortaleza, serán 850 quintales los que el chico llevará de menos, que quitados de los 1160, ya no quedarán sino 310, y serán de los que solamente quedará sobrecargado. Estos equivalen á 486 pies cúbicos de volúmen, y partidos por 5312, viene al quociente

poco mas de una pulgada, que será lo que el Navío chico estará unicamente mas sumergido de lo que estubiera sin aquel exceso de carga. Por otro lado, este Navío tubiera, guardada la debida proporcion, 3 pulgadas de menos elevacion en la bateria que el grande, supuesta la de este de 5 pies: con que le quedarán 4 pies 9 pulgadas; y substrayendo la pulgada que debiera profundizarse mas, se reduxeran á 4 pies 8 pulgadas: es toda la desventaja que le quedará á este Navío respecto del grande.

521 En efecto, el único recelo que pudiera quedarnos fuera, que el Navío chico perdiera algun aguante de Vela, respecto á que se sobrecarga de Artillería, gente y viveres, que todo tiene su centro de gravedad mas alto que las maderas que se le substraen; pero hecho el debido cómputo, solo resultan $3\frac{1}{2}$ pulgadas que el centro de gravedad del Navío se elevara: lo que, segun lo dicho (§§. 383. 385), disminuyen de $\frac{1}{31}$ la elevacion que sobre este tendrá el metacentro, y por consiguiente la inclinacion del Navío aumentara tambien de $\frac{1}{31}$: esto es, desde 12 á 20 minutos, cantidad tambien despreciable.

522 Sin embargo todas las ventajas, aunque cortas, quedan siempre de parte del Navío grande: las que resultan á favor del chico es el coste de la fábrica y de la manutencion, pues llega á ser, con corta diferencia, de $\frac{1}{8}$ menos: de suerte, que si el Navío grande costara 160 mil pesos, el chico solo montara 140 mil, y lo mismo á proporcion la manutencion: diferencia que merece algun aprecio, respecto de lo limitado de las ventajas que se han visto.

523 De esto se sigue, que la magnitud de los Navíos no debe exceder de la medida precisa ó necesaria para corresponder al fin á que se dirigen: esto es, los Navíos de Guerra al servicio y manejo de la Artillería que se pretende montar: pues toda otra ventaja puede

 con-

conseguirse, como se ha visto, á cortísima diferencia, siempre que con cuidado se hagan los cálculos y correcciones necesarias. El Navío de 60 Cañones se pide que monte Artillería de 12 sobre la segunda cubierta, cuya longitud, con el cascabel, es de $9\frac{1}{2}$ pies. Añádanse á estos 4 pies 9 pulgadas, mitad de la manga de la Lancha: 1 pie por lo que la joya del Cañon ha de quedar interiormente en el Navío, á fin que se pueda cargar bien, y 9 pulgadas por el grueso de tabla y madero del costado, y serán 16 pies, distancia que debe haber desde el medio del Navío á su costado en el parage donde está el Cañon; ó substrayendo seis pulgadas que la borda recoge mas, deben quedar en esta al Navío 15 pies 6 pulgadas de amplitud: y supuesto que el recogimiento del portalon es por lo regular de $\frac{1}{5}$ de la manga, será la mitad de esta $\frac{5}{4}$ de aquellos $15\frac{1}{2}$ pies, ú de 19 pies $4\frac{1}{2}$ pulgadas, y la manga entera de 38 pies 9 pulgadas: de suerte, que con esta se puede ya fabricar un Navío que lleve Artillería de 12 sobre la segunda cubierta.

524 No obstante por el cálculo se habrá visto, que no hemos incluido el espacio que se regula haya entre el costado de la Lancha, y el cascabel del Cañon, quando este está enteramente dentro: espacio que habiendo de ser para que pase por él con alguna seguridad la gente, debe ser á lo menos de 2 pies; que con otros dos del lado opuesto hacen 4; los que añadidos á los 38 y 9 pulgadas, hicieran 42 y 9 pulgadas, por la manga que debiera tener el Navío. Pero no todos conceden tan grande espacio: se contentan con que haya alguno, para que por qualquier accidente de dar de sí los bragueros no corra riesgo la Lancha; y en tal caso 40 pies de manga son mas que suficientes.

525 De este principio se sigue quanto importa que la Artillería de los Navíos sea la mas corta que posible sea: el manejo de ella fuera de mucho mas des-

desembarazo y agilidad: la gente pasará con libertad por entre su cascabel y la Lancha, y el peso disminuirá mucho. Los momentos de inercia fueran mucho menores, y por consiguiente el Navío mas fuerte y durable. Todas estas ventajas se pierden por solo la de lograr alguna velocidad en las balas, que si bien se exâmina, quizás montará á muy poca, y mucho menos el efecto de ellas: pues este, por repetidas experiencias de los Academicos de Londres, no es proporcional á las velocidades; antes bien se han hallado mayores quando estas son algo menores.

526 Del mismo modo se concluye lo mucho que importa no llevar Lanchas tan monstruosas: el lugar que ocupan es mucho, y su peso sobre las cubiertas del Navío no menos considerable; y así alguna disminucion de ellas en buque y maderas, como estilan algunas Naciones, sería de grandes ventajas.

527 Determinada la manga se tiene la eslora por las reglas expuestas en el Capítulo precedente. El puntal resultará, computando, como se dixo (*Lib.* 2. *Cap.* 1.), el peso que debe llevar el Navío, y el volúmen que á este corresponde, calculándolo segun se dixo en el mismo Capítulo; bien entendido, que quanto menor sea el peso, menor será el puntal, y mayor el andar.

CAPITULO 3.

Del aguante de Vela.

528 TOdo el *Capit. 6. del Lib. 2.* se ha reducido á explicar y calcular el aguante de Vela que tienen los Navíos: en el 4 se trató de la inclinacion que pueden padecer en el caso del reposo, obligados por algun peso ó fuerza que se les aplique; y en el 3 del *Lib.4.* la misma inclinacion que procede de la fuerza con que hiere el viento las Velas. Ya vimos en los §§.197 y 214 que resulta alguna diferencia de un caso al otro, siempre que el centro de las resistencias laterales, ú de las fuerzas que hacen las aguas en el costado del Navío no concurra con el plano horizontal en que se halla el centro de gravedad; pero tambien vimos en el §.386, que esta diferencia se hace despreciable en Navíos fabricados proxîmamente segun el uso comun, y por consiguiente que se reducian ambos casos al mismo que expresa la fórmula dada al fin del §. 383, que expone la inclinacion que debe padecer el Navío: y como esta es en razon inversa del aguante de Vela, será este como el denominador de dicha fórmula, dividido por el numerador: esto es, *el aguante de Vela de los Navíos es en razon directa compuesta de la altura del metacentro sobre el centro de gravedad, y del volúmen de fluido que desocupen los Navíos: y en inversa de los momentos laterales que padecieren las Velas*; pero estos momentos son como el seno del ángulo que forma la Quilla con la direccion de la fuerza con que actuan las Velas, y el momento con que estas actuan en la propia direccion: luego será *el aguante de Vela de los Navíos en razon directa compuesta de la altura del metacentro sobre el centro de grave-*

vedad, y del volúmen de fluido que desocupen los Navíos; y en inversa compuesta del seno del ángulo que forme la Quilla con la direccion de la fuerza con que actuan las Velas, y el momento con que estas actuan en la misma direccion.

529. Todas estas cantidades dependen de otras muchas que las componen. La altura del metacentro sobre el centro de gravedad resulta de la altura del metacentro sobre el centro de volúmen, y de la altura del centro de gravedad sobre este mismo. Por lo ordinario está el centro de gravedad mas alto que el de volúmen, y por tanto substrayendo lo que distan entre sí estos dos centros, queda la altura del metacentro sobre el centro de gravedad. En el *Cap. 3. del Lib. 1.* explicamos latamente el modo de calcular la altura del mismo metacentro sobre el centro de volúmen, y
Lam. 1. Fig. 31. diximos, que si ABD representa el cuerpo del Navío, AD su línea de agua quando está derecho, y GL la misma quando está inclinado: siendo C el centro de volúmen en el primer caso, y N en el segundo, levantada la vertical NE, el punto E, en que concurre esta con la vertical BCE, que lo es quando el Navío está derecho, es lo que se llama el metacentro, y CE la altura de este sobre el centro de volúmen.

530 Esta altura, como es evidente, depende de la CN, ú de la translacion del centro de volúmen del punto C al N: de suerte, que quanto mayor sea esta, mayor será la altura CE; pero la translacion CN depende de la relacion entre el nuevo volúmen del Navío LED que se sumerge, y el total ABD que el Navío tubiere sumergido; por consiguiente, quanto mayor fuere esta relacion, mayor será la altura CE.

531 Pero no se crea que estos volúmenes dependen solo de la manga ó mayor amplitud del Navío, pues es evidente, que resultan del conjunto de todas las amplitudes ó anchuras distribuidas en todos los pun-

puntos de la longitud del Navío : de suerte, que qualquiera punto de la seccion horizontal, ó línea de agua superior, que se le dé mayor amplitud ó anchura al Navío, resultará mayor el nuevo volúmen que se sumerja en la inclinacion, y por consiguiente tambien mayor la CE.

532. Por otro lado la CN es asimismo proporcional á la anchura ED, y siendo el volúmen que se sumerge en la inclinacion, como el quadrado de ED multiplicado por la longitud del Navío, será CN, como la suma de los cubos de todas las anchuras del Navío multiplicadas por la longitud de él mismo. Esto es, en el caso de que el volúmen total que el Navío hubiere sumergido en el fluido fuere siempre el mismo; pero variando este, *será* (§. 530.) *la altura del metacentro sobre el centro de volúmen, en razon directa de la suma de los cubos de todas las anchuras del Navío en la mas alta línea de agua, multiplicadas por la longitud del mismo: y en inversa del volúmen total que el Navío tubiere sumergido en el fluido*; lo mismo que resultó en el (§. 150).

533. De esta suerte, el producto de la altura del metacentro sobre el centro de volúmen, por el mismo volúmen, será como la suma de los cubos de todas las anchuras del Navío, en la mas alta línea de agua, multiplicadas por la longitud del mismo: por consiguiente, si no varía la seccion horizontal hecha por la superficie del agua, tampoco variará aquel producto.

534. Si el centro de gravedad concurriese con el de volúmen, la razon compuesta de la altura del metacentro sobre el de gravedad, y del volúmen del fluido que desocupen los Navíos, fuera la misma que la suma de los cubos de todas las anchuras del Navío, en la mas alta línea de agua, multiplicadas por la longitud del mismo: y por consiguiente, *concurriendo el centro de gravedad con el de volúmen, el aguante de Vela,*

de

... Navíos es en razon directa compuesta de la suma de los cubos de todas las anchuras del Navío, en la mas alta línea de agua, multiplicadas por la longitud del mismo: y en inversa del coseno del ángulo que forme la Quilla con la direccion de la fuerza con que actuen las Velas, y de los momentos que padecieren estas en la propia direccion.

535 De aquí es, que en este caso de concurrir el centro de gravedad con el de volúmen, *el aguante de Vela depende precisamente* (lo demas quedando constante) *de la seccion del Navío hecha por la línea del agua*: de suerte, que quanto mayor fuere dicha seccion, mas aguante de Vela logrará el Navío. Pero como diximos antes, por lo ordinario el centro de gravedad no concurre con el de volúmen, sino que está mas alto, lo que hace alterable esta regla, variando al paso que varien de disposicion, ó colocacion en altura, los varios pesos de que se compone el todo del Navío, que es en lo que consiste la mayor ó menor elevacion del centro de gravedad. Para un Navío de 60 Cañones con 42 pies de manga hallamos (§§.152.153.y 154) la altura CE del metacentro, sobre el centro de volúmen, de 11 $\frac{1}{2}$ pies, y la altura del centro de gravedad, sobre el de volúmen (§.166), de 2 pies, y 4 $\frac{1}{2}$ pulgadas: y así la altura del metracentro, sobre el centro de gravedad, es solo de 9 pies 1$\frac{1}{2}$ pulgadas. El Navío de 70 Cañones, como á proporcion tiene menos obras muertas (§.168), y por consiguiente menos volúmen sumergido en el fluido, no solo es á proporcion mayor la altura del metacentro sobre el céntro de volúmen, sino que es menor la del centro de gravedad sobre el mismo de volúmen: y por consiguiente, por dupla razon es mayor á proporcion la altura del metacentro sobre el centro de gravedad; pero esta diferencia es sumamente corta, siempre que los Navíos sean semejantes, en cuyo caso todas estas alturas son proxîmamente co-

como las dimensiones lineares de los Buques. En las Fragatas ya no es lo propio, porque á proporcion tienen mucho menos peso su buque y su Artillería, y así una Fragata de 20 Cañones con 32 pies de manga, á proporcion del Navío de 60, solo debiera tener elevado el metacentro sobre el centro de gravedad de 6 pies 11 $\frac{3}{7}$ pulgadas; y se halló (§.172) de 7 $\frac{3}{4}$ pies. Al contrario sucede con el Navío de tres puentes, por sus muchas obras muertas y Artillería: su metacentro debiera estar elevado sobre el centro de gravedad, á proporcion del Navío de 60 Cañones, de 11 pies 1 pulgada; y solo se halló (§.173) de 8 $\frac{6}{7}$ pies: menos aún que en el Navío de 60.

536 En quanto al volúmen que ocupa un Navío en el fluido no tenemos que detenernos: todo el *Cap.* 1. *del Lib.*2. se reduce á este exâmen, y en los §§.112. 115. 117. y 118 se ven los que resultan en los Navíos de varios portes. Estos volúmenes deben permanecer constantes, á menos que no varien las magnitudes de los Navíos, y los gruesos y pesos de sus maderas, como diximos en el Capítulo citado, y en el primero de este Libro. Por esta razon, si se pusiere en práctica la disminucion de maderas en las Fragatas, y aumento en los Navíos, segun se vió necesario en este mismo Capítulo, será preciso atender á esta diferencia.

537 El ángulo que forma la Quilla con la direccion de la fuerza con que actuan las Velas, fuera el complemento del que forma la Quilla con las Vergas, si la Vela se mantubiera plana, y no tomara, por su flexîbilidad, la curvidad que toma, y con mayor exceso por la parte de sotavento: con esto se ve claramente, que la direccion compuesta de todas las parciales que actuan en la Vela, no puede ser ya perpendicular á la Verga, ha de inclinarse un poco hacia sotavento. Esta diferencia, que todos han mirado como despreciable, puede montar hasta 20, ó mas grados,

como se vió en el (§. 276): y por tanto, no solo no se puede omitir, sino que se hace de la primera consideracion. En el *Cap. 1. del Lib.3*, donde dimos por extenso la theórica de la Vela, hallamos (§. 263) que
Lam. 9. Fig. 52. siendo CQ la Quilla, AK la Verga, y ABK una seccion horizontal de la Vela, tiradas desde los extremos A y K de esta las dos tangentes AO, KO, la TO, que divide el ángulo AOK en dos partes iguales, será la direcccion con que actuará la Vela. Para hallar, pues, el ángulo CTO que forma la Quilla con dicha direccion, tenemos que substrayendo los dos ángulos A y K de 180°, queda el ángulo AOK, cuya mitad es TOK, á que añadiendo AKO, resulta OFA, y substrayendo de este el ASC, que forma la Quilla con la Verga, queda el CTO que se busca. Haciendo el cálculo, se deduce la regla siguiente; *que baxada la perpendicular* TD, *el ángulo* DTO, *de que la direccion de la fuerza de la Vela cae mas á sotavento, que la perpendicular* TD *á la Verga, es igual á la mitad de la diferencia de los dos ángulos en* K *y en* A: *y el ángulo* CTO, *que forma la Quilla con la direccion* TO *de la fuerza con que actuan las Velas igual al complemento del que forma la Verga con la Quilla, aumentado de la mitad de la diferencia de los dos ángulos en* K *y* A, *que forma la Verga con la Vela.* De esto se sigue, *que quanto mas braceada estubiere la Verga por sotavento, y mas curvidad tubiere la Vela en sotavento, respecto á la de barlovento, menos aguantará el Navío la Vela.*

538 A mas de esto demostramos (§§. 268 y 269) que la diferencia de los ángulos K y A depende del ángulo que forma el viento con la Verga, y de la velocidad de aquel: de suerte que *quanto menor sea dicho ángulo que forme el viento con la Verga, mayor será la diferencia de los dos* K *y* A; y asimismo mayor *quanto mayor fuere la velocidad del viento.* De esta suerte, siendo esta muy corta, la diferencia de los dos ángulos

es cero, y aumenta quanto mas aumente el viento; y así, el aguante de Vela será menor quanto mas aumente el viento, y esto aun sin atender á la mayor fuerza que hace en la Vela, y solo sí por la mayor curvidad que á esta la obliga á tomar. En el §.276 hallamos á bolina, y con viento de todas Velas, el ángulo DTO, mitad de la diferencia de los dos K y A, de $8^{\circ}\ 20'\frac{1}{4}$, y con viento fresco de $21^{\circ}\ 3'\frac{3}{4}$: esto admite alguna diferencia, porque solo se deduxo de terminada suposicion.

539 *El momento que padecen las Velas se reduce al produćto de la suma de todas las fuerzas que hacen, por la altura del centro de las mismas sobre el centro de gravedad del Navío.* La fórmula que determina las fuerzas se dió §. 264: por ella se ve, que *dichas fuerzas son en razon compuesta direćta del area de todas las Velas, de la velocidad del viento, del seno del ángulo que forma este con las Vergas, y de la razon que hay del seno al arco de la semisuma de los ángulos* K *y* A *que forma la Vela con la Verga en sus extremos.*

540 El area de cada Vela es el produćto de su caída por su anchura media, y sumados todos los de las Velas que sirvan, como se vió en el §. 280, se tendrá el area total; pero si hallamos primero como en el §. 281 la altura del centro de la fuerza de cada Vela sobre el centro de gravedad del Navío, y se multiplica como en el mismo párrafo por su area, se tendrá con la suma de estos produćtos la expresion del momento de las Velas, en caso que fueran planas, de herirlas el viento perpendicularmente, y ser la velocidad de este de solo un pie por segundo: no hay despues sino multiplicar la misma cantidad por el seno del ángulo que forma el viento con las Vergas, por la velocidad de este, y por la razon del seno al arco de la semisuma de los ángulos que forma la Vela con la Verga en sus dos extremos, y se tendrá el momen-

Zz 2

mento de dichas Velas para el caso propuesto.

541 Como el aguante de Vela es en razon inversa de este momento, se sigue, que *tambien será el aguante de Vela en razon inversa de la velocidad del viento, de la cantidad de Velamen, de la altura del centro de este sobre el centro de gravedad del Navío, del seno del ángulo que forme el viento con las Vergas, y de la razon del seno al arco de la semisuma de los ángulos que forme la Vela con la Verga en sus dos extremos.* Esta razon del seno al arco se hace despreciable en vientos cortos, pues aun con los mas violentos, en que resultó (§. 276) el ángulo DTF de $21^\circ\ 3'\frac{3}{4}$, es proxîmamente de $\frac{13}{14}$, lo que no disminuye el momento de las Velas sino de solo $\frac{1}{14}$.

542 De esta suerte, dandoles á los Palos y Vergas medidas proporcionales á las mangas de los Navíos, como de ordinario hacen los Marineros, los momentos de las Velas serán proxîmamente como los cubos de dichas dimensiones: y como en Navíos de fondos semejantes son tambien los volúmenes que desocupan como dichos cubos, quedarán los aguantes de Vela en los mismos Navíos en razon directa de las alturas de los metacentros sobre los centros de gravedad, y en inversa de los senos de los ángulos que forme la Quilla con la direccion de la fuerza con que actuen las Velas; ó porque estos ángulos en varios Navíos pueden diferenciarse muy poco, *quedarán los aguantes de Vela, en Navíos de fondos semejantes, proxîmamente en razon directa de las alturas de los metacentros sobre el centro de gravedad.*

543 Segun esto, en los Navíos de 60 y 70, que como diximos (§.535) tienen las alturas de los metacentros sobre los centros de gravedad, proxîmamente, en la razon de sus dimensiones lineares, sus aguantes de Vela serán tambien como dichas dimensiones lineares; pero en las Fragatas y Navíos de tres puentes

variará esta razon, puesto que tambien varian las alturas de los metacentros: en aquellas será su aguante algo mayor que en dicha razon, y en estos algo menor. Para el Navío de 60 Cañones hallamos (§§. 385. 387. y 388) que sus fuertes inclinaciones pueden ir desde 12 á 15 grados, sufriendo vientos violentos con aparejos proporcionados: las del Navío de 70 serán de $10\frac{1}{2}$ á $13\frac{1}{8}$ grados, respecto que las dimensiones lineares de este son á las de aquel como 8 con 7. Las de las Fragatas de 20 Cañones serán de $14\frac{1}{8}$ á $17\frac{2}{3}$, siguiendo la relacion de las alturas de los metacentros sobre los centros de gravedad, que en este caso son como $9\frac{1}{8}$ á $7\frac{3}{4}$: y ultimamente las inclinaciones del Navío de tres puentes, serán de $12^{\circ}\frac{3}{8}$ á $15^{\circ}\frac{1}{2}$, siguiendo la misma relacion, que para este Navío es como $9\frac{1}{8}$ á $8\frac{6}{7}$.

544 Por este exceso de aguante de Vela que tienen los Navíos, respecto á las Fragatas, ha habido Marineros que creyeron conseqüente deberse aumentar los aparejos de los Navíos, para mejorar su marcha, persuadidos á que por esta adiccion y razones expuestas, no puede seguirse perjuicio; pero, como se verá mas adelante, y se demostró (§.442), la accion, esfuerzos ó momentos de inercia que padecen las Arboladuras con los valances, es proxîmamente como los quadrados de las alturas de los metacentros sobre los centros de gravedad, y como los pesos de las mismas Arboladuras: por consiguiente, estos esfuerzos son sumamente mayores en los Navíos grandes, y sus Arboladuras, que solo resisten en la razon de sus pesos, quedan expuestas, ó con menos resistencia, en la razon inversa de los quadrados de las alturas de los metacentros: ¿si se aumentaran, pues, dichas Arboladuras, quánto mas expuestas estubieran á un fracaso, que con mucha mas razon es preciso evitar?

545 Teniendo el aguante de Vela de un Navío, se

se puede hallar facilmente el de otro, que varie en algo del primero en peso y volúmen. En el §. 391 dimos la fórmula que resulta de esta variacion, y el denominador de ella tiene de mas el momento ó producto del volúmen aumentado por la distancia entre los centros de gravedad del peso y volúmen que se aumentare; y ademas la diferencia que resultare en el producto de la nueva altura del metacentro sobre el centro de volúmen, por el mismo nuevo volúmen. De esta suerte, *los aguantes de Vela de dos Navíos de aparejos iguales, serán como el producto de la altura del metacentro sobre el centro de gravedad, por el volúmen que ocupe el primer Navío: á este mismo producto, con mas el del volúmen que se añadiere en el segundo Navío, por la distancia entre los centros de gravedad del peso y volúmen aumentados, añadiendo la diferencia que resultare en el producto de la nueva altura del metacentro sobre el centro de volúmen, por el mismo nuevo volúmen.* Esto es en caso que el centro del peso aumentado esté mas baxo que el del volúmen añadido; pero si estubiere mas alto el producto de este volúmen, por la distancia entre los dos centros, debe substraerse.

546 Si en lugar de aumentarse peso y volúmen se substrageren las dos cantidades que resultan en el segundo Navío, deben quitarse quando el centro de gravedad del peso quitado estubiere mas baxo que el de volúmen substraido; y al contrario si estubiere mas alto.

547 Si se le añadiese á un Navío lastre, ó qualquiera otro peso, respecto que en este caso no varia sensiblemente la seccion horizontal hecha por la superficie del agua, tampoco varia (§.392) el producto de la nueva altura del metacentro sobre el centro de volúmen por el mismo nuevo volúmen: luego solo tendremos de aumento el momento ó producto del volúmen que el Navío sumergiere mas, por la distancia en-

entre los centros de este volúmen, y del lastre que se añadiere: *con que serán sus aguantes*, antes y despues del lastre añadido, *como el producto del volúmen que antes desocupare el Navío, por la altura del metacentro sobre el centro de gravedad, á este mismo producto con el del volúmen añadido, por la distancia entre los dos centros de este volúmen, y del peso aumentado*; ó porque los volúmenes son como los pesos, *serán dichos aguantes como el producto del peso de todo el Navío, por la altura del metacentro sobre el centro de gravedad, á este mismo producto, con el del peso ó lastre aumentado, por la distancia entre los dos centros de este lastre, y del volúmen añadido*. En el Navío de 60 v.g. hallamos (§. 166) la altura del metacentro sobre el centro de gravedad de $9\frac{1}{8}$ pies, y (§. 161) su peso de 43750 quintales: el producto de estas dos cantidades es 399219. Supongamos que se le añadiesen 3600 quintales mas, colocados á 15 pies debaxo de la superficie del agua: y respecto que la distancia entre los centros de este peso, y del volúmen en la superficie del agua que se sumerge, es la de los mismos 15 pies, será el producto de esta distancia, por el peso añadido, 3600 quintales, igual 54000: por lo que el aguante de Vela del Navío en el primer caso será á la del segundo, como 399219, á 399219 con mas 54000; ó reducido como 175 á 175 con mas 24: el segundo aguante con los 3600 quintales de lastre mas, será pues, $\frac{24}{175}$ mayor que el primero; y la inclinacion del Navío de otro tanto menor.

548 *Añadiendo*, pues, *peso debaxo de la superficie del agua, el Navío aguantará mas la Vela*: y por igual razon, *aguantará tambien mas quitandolo de encima de la misma superficie*. Si se quitaren v.g. del aparejo $456\frac{1}{4}$ quintales de peso, de suerte que su centro de gravedad estubiera 60 pies sobre la superficie del agua, respecto que $456\frac{1}{4}$ es el producto de $9\frac{1}{8}$ por 50, fuera el momento que produciria el producto de $9\frac{1}{8}$ por 50

y

y por 60, ú de $9\frac{1}{8}$ por 3000 : luego el aguante de Vela fuera asimismo mayor de $\frac{12}{175}$. Si supusiesemos que el centro de gravedad de toda la Artillería estubiera $9\frac{1}{8}$ pies sobre la superficie del agua, el momento que producirian 1000 quintales que se le quitaran, solo sería el producto de $9\frac{1}{8}$ pies por 1000, ó la tercera parte del que antes resultó : luego el mayor aguante consistiria en el $\frac{1}{3}$ de $\frac{12}{175}$, ó en $\frac{4}{175}$, cantidad despreciable: y así se adelanta poco en el aguante de Vela con la alteracion del peso de la Artillería. Por igual termino se puede hacer exâmen de todo lo demas.

549 Respecto que el producto de un peso que se añada debaxo de la superficie del agua, por su distancia á esta, da el momento con que el Navío aguanta mas la Vela; y que al contrario será el momento con que aguanta menos, si el peso se quitare; se sigue, que *si un peso se traslada de una altura á otra, el producto del mismo peso, por la distancia á que se traslade, será el momento con que el Navío aguante mas la Vela si se hubiere colocado el peso mas baxo, ó el momento con que aguantará menos, si se hubiere colocado el peso mas alto.* De esta suerte, habiendo hallado (§. 514) que haciendo el Navío de 60 de Pino, debiera tener 7000 quintales de menos madera, este peso es como si se quitara del centro de gravedad del casco, que (§. 161) se halló de $11\frac{2}{3}$ pies sobre la cara alta de la Quilla. Supongamos, pues, que los mismos 7000 quintales se pusieran de lastre, 3 pies sobre la Quilla, y tendremos $8\frac{2}{3}$ pies por la distancia á que se traslada el peso, y el momento con que el Navío aguantará mas la Vela, igual al producto de 7000 por $8\frac{2}{3}$, igual 60667. Si se quisiere, pues, que el Navío no aguante mas que lo que aguantara siendo de Roble, se conseguirá disminuyendo el lastre que se supuso añadido de una cantidad tal, que multiplicada por 15, distancia desde el centro del lastre añadido á la superficie del agua, pro-

produzca el mismo momento 60667. Esta cantidad se halla de $4044\frac{1}{2}$ quintales : con que quitados de los 7000 quedarán solo $2955\frac{1}{2}$ quintales , que serán los que solamente necesitará el Navío para aguantar tanto como quando fuera de Roble : que fue lo que diximos en el §.515.

550 Si se aumenta el puntal del buque ; esto es, si se aumentan proporcionalmente las profundidades de todos los puntos de la superficie del buque sumergido en el fluido , se halla por la misma regla la diferencia en el aguante de Vela que debe resultar. Supongamos por un instante, que todo el buque aumentado quede debaxo del fluido , por haberse asimismo aumentado el peso correspondiente : en este caso el produćto de la altura del metacentro , sobre el centro de volúmen , por el mismo nuevo volúmen , tampoco varía , por no variar la seccion hecha por la superficie del agua : luego tampoco hay mas diferencia que el produćto del peso aumentado , por la distancia desde su centro de gravedad á la del volúmen añadido , que en este caso es el mismo que el centro de todo el volúmen del cuerpo. Si las profundidades del Navío de 60 Cañones se aumentasen, pues, de $\frac{1}{10}$, su volúmen y peso aumentaran asimismo en la propia razon : el peso añadido fuera de 4375 quintales : y si su centro se colocara 15 pies debaxo de la superficie del agua , puesto que el del volúmen está á $7\frac{5}{6}$, quedarán $7\frac{5}{6}$ por la distancia entre los dos centros del peso y volúmen añadidos , y el produćto de 4375 por $7\frac{5}{6}$ igual 34271, será la cantidad que aumenta el aguante de Vela : por consiguiente será el primero , antes de haberse aumentado puntal; al segundo despues de habersele aumentado, como 399219 á 399219, con mas 34271 : esto es, el segundo fuera $\frac{34271}{399219}$, ó proxîmamente $\frac{86}{1000}$ mayor.

551 Pero no todo el peso 4375 quintales se puede poner como lastre á 15 pies debaxo de la superficie del agua: es preciso contar con la madera, que con el aumento del buque es preciso que se agregue: las Quadernas son mas largas de todo lo aumentado del puntal, y el número de tablas mayor. Supongamos que este aumento de peso sea de 1200 quintales, y que su centro esté 10 pies debaxo de la superficie del agua: con esto rebaxados $7\frac{1}{6}$ de los 10, quedan $2\frac{5}{6}$, distancia entre los centros del peso y volúmen añadidos, y 1200 por $2\frac{5}{6}$ igual 3400 será el producto ó momento que resulta de la madera. Rebaxados ahora los 1200 de los 4375, quedarán 3175, cantidad de lastre que debe agregarse, que multiplicada por $7\frac{5}{6}$, produce el momento 24871: y añadido al 3400, es el todo 28271; 6000 menos que antes. El aguante de Vela en el segundo caso, será pues solo de $\frac{18271}{399219}$, ó proximamente $\frac{71}{1000}$ mayor que en el primero.

552 Por la misma regla se puede disponer el Navío de suerte que no aguante mas de lo que antes aguantaba: no hay para esto sino quitarle el lastre necesario hasta producir un momento igual al 28271 que antes se aumentó. En este caso el volúmen que se quita es el que el Navío sacará fuera del agua en la superficie de esta: con que su centro debe considerarse proxîmamente en la misma superficie: y el momento será el producto del lastre que debe quitarse por la distancia desde su centro á la propia superficie, que en este caso es de 15 pies. Partiendo, pues, los 28271 por 15, viene al quociente 1885 quintales, lastre que debe quitarse: Esta cantidad substraída de los 3175, dexa 1290 de lastre, que solo se necesitan para que el Navío aguante la Vela, lo mismo que en el primer caso. La batería quedará con esto elevada de lo cor-

res-

respondiente á los 1885 quintales, ó con corta diferencia de 6 pulgadas.

553 Lo mismo que se ha dicho del aumento del puntal, ó del volúmen que con él se agrega, como colocado en el centro del volúmen del todo del Navío, debe entenderse de qualquiera otro volúmen que en los fondos del Navío se agregue, sin tocar á la seccion horizontal hecha por la superficie del agua. No hay sino considerar donde se halla el centro de este volúmen añadido, y la distancia desde él al centro del peso que se agregue: multiplicar despues esta distancia por el peso agregado, y se tendrá el momento con que el Navío aguantará mas la Vela, caso de estár el centro del peso mas baxo que el de volúmen; y al contrario si estubiere mas alto aquel centro.

554 De esto se sigue claramente, que *si el peso se coloca en el centro del volúmen añadido, el Navío no aguantará ni mas ni menos la Vela, sin embargo que se hayan aumentado sus fondos ó volúmen.*

555 Del mismo modo se sigue, que *si en una parte se aumenta el volúmen, y en otra se disminuye de igual cantidad, el Navío aguantará mas la Vela, si el volúmen añadido estubiere mas alto que el quitado, y al contrario*: pues supuesto el correspondiente peso al volúmen aumentado, colocado en qualquiera parage mas baxo que el mismo volúmen, el momento que resultará será el produćto del mismo peso, por su distancia al centro de volúmen aumentado; del qual fuera preciso substraer el produćto del mismo peso, por su distancia al centro de volúmen substraido: de que quedará el produćto del mismo peso por la distancia entre los centros de los volúmenes añadido y quitado.

556 Esto manifiesta quanto importa, para el mayor aguante de Vela, ensanchar ó llenar las Quadernas de Proa y Popa en las inmediaciones de la superficie del agua, y adelgazar ó enflaquecer igualmente

por abaxo las de enmedio: pues estando aquel volúmen mas alto que este, el Navío debe aguantar mas la Vela.

557 Aumentando la eslora, el casco, y el volúmen sumergido en el fluido, aumentan proporcionalmente: el centro del peso de madera añadida concurre proxîmamente con el centro del todo del casco, que en el Navío de 60 se halló (§.161) elevado sobre la Quilla de 11 $\frac{2}{3}$ pies; y el centro de volúmen aumentado concurre con el del todo del volúmen sumergido, que en el mismo Navío está 7 $\frac{1}{6}$ pies debaxo de la superficie del agua, ó 10 $\frac{5}{6}$ sobre la Quilla. El peso del casco se halló en el mismo párrafo de 27125 quintales: luego si se aumentara la eslora de $\frac{1}{10}$, serán 2712 $\frac{1}{2}$ quintales de madera que se aumentaran; pero el peso total del buque es de 43750; luego serán 4375 los que deben añadirse para calar el Navío á su primitiva línea de agua: por lo que serán 1662 $\frac{1}{2}$ quintales los que deben ponerse en lastre. El momento ó mayor aguante de Vela del Navío consistirá, pues, en el producto de estos 1662 $\frac{1}{2}$, por la distancia desde su centro de gravedad hasta el centro del volúmen, que (§. 550) es de 7 $\frac{5}{6}$, ó en 13023: y asimismo en el producto de los 1712 $\frac{1}{2}$ quintales de madera, por la distancia desde su centro de gravedad hasta el de volúmen, que es 11 $\frac{2}{3}$ menos 10 $\frac{5}{6}$; igual $\frac{5}{6}$, ó en 2260; pero por estar el centro de volúmen mas baxo que el del peso: esta última cantidad debe substraerse de la primera, por lo que solo queda el momento 10763, con que el Navío suportará mas la Vela. A mas de esto, aumentando la eslora, aumenta proporcionalmente el producto de la altura del metacentro sobre el centro de volúmen, por el mismo volúmen; ó reduciendo este volúmen á peso en quintales, como hicimos con las otras cantidades, el producto de la altura del metacentro sobre el centro de volúmen, por el peso total del Na-

Navío, que en el de 60 es el producto de $11\frac{1}{2}$ (§.154) por 43740, ó 503125, cuya decima parte es $50312\frac{1}{2}$, exceso de momento con que tambien aguantará el Navío mas la Vela. Juntando, pues, este con el de 10763, será el todo del momento con que el Navío aguantara mas la Vela de 61075: y por consiguiente será el primer aguante al segundo, como 399219 á 399219 con mas 61075, ó este $\frac{61075}{399219}$, ó proxîmamente $\frac{3}{20}$ mayor.

558. Si se quisiere que el Navío no aguante á la Vela mas de lo que antes aguantaba, se partirá el momento 61075 por 15, distancia desde la superficie del agua al centro del lastre que se hubiere de quitar, y el quociente $4071\frac{2}{3}$ será la cantidad de aquel. En este caso el Navío, aguantando lo propio á la Vela, tubiera 8 pulgadas mas alta la bateria.

559 De la misma manera se puede deducir el cálculo, supuesto que se alargue el Navío en qualquiera de sus partes. Supongamos que se le diesen 10 pies, todos de Quadernas iguales á la maestra; y como el area de esta, sumergida en el fluido, es de 620 pies quadrados, será el volúmen que ocupen los 10 pies de 6200, que equivalen á 3952 quintales de peso. El de la madera que se aumentara es de 1800: y su centro estubiera proxîmamente á 11 pies encima de la superficie de la Quilla, ó á 7 debaxo de la superficie del agua; y estando el del volúmen añadido á 8, hay de diferencia un pie, que multiplicado por 1800, produce los mismos de momento de menos aguante que por el peso de la madera resultara. Substraidos ahora los 1800 de todo el peso 3952 quedan 2152 quintales que deben agregarse en lastre: y multiplicados por 7, á cuya distancia se supone colocarse debaxo del centro del volúmen añadido, producen el momento de mayor

aguan-

aguante 15064: del qual quitado el de 1800, queda el de 13264. A más de esto, si nos valemos del méthodo expuesto en el §. 151 de hallar la altura del metacentro sobre el centro de volúmen, hallaremos que el producto de esta altura, por el mismo volúmen, debe aumentar proxîmamente en este caso de $\frac{1}{6}$, ó de 65391, cuyo momento con el 13264 suman 77655: por consiguiente el Navío aumentará su aguante de Vela de $\frac{77655}{399219}$, ó proxîmamente de $\frac{1}{5}$. Esto manifiesta la ventaja con que cierto número de Quadernas, iguales á la maestra, aumentan la estabilidad: pues en el caso precedente de aumentar proporcionalmente toda la eslora de $\frac{1}{10}$, ó de 15 pies, solo resultaron $\frac{3}{20}$ de mayor estabilidad; quando en este, con solos 10 pies de mas longitud, resultaron $\frac{4}{20}$: y si hubieran sido 15 los pies, fuera la mayor estabilidad de $\frac{6}{20}$ dupla de la primera.

560 Si se quisiere que el Navío, despues de añadidos los 10 pies de Quadernas iguales á la maestra, no aguante á la Vela sino como antes, se partirán los 77655 de momento por 15, distancia desde la superficie del agua al centro del lastre que se hubiere de quitar, y el quociente 5177 será la cantidad de aquel. En este caso el Navío, aguantando lo propio, tubiera cerca de 11 pulgadas mas alta la batería. Es de notar en este caso, que no llevando el Navío primitivamente (§.161) sino 4935 quintales de lastre, juntos estos con los 1800, que (§.559) se agregaron antes, fueran en todo 6735: de los que quitando 5177, solo quedaran 1558, unico lastre con que navegara el Navío aguantando á la Vela como antes.

561 Por la misma regla se resuelve igualmente el caso en que se le quiera aumentar al Navío la manga; pero como se supone que en él se aumenta el aparejo

en

en la misma razon, es preciso atender á esta variacion, que disminuye en mucho la estabilidad. Supongamos, pues, que sea de $\frac{1}{10}$ el aumento de la manga, y lo mismo el de la madera que se agregue, siendo el centro de ella el del casco; y como por esta variacion no se altera el centro de volúmen, la estabilidad que resultara por el aumento de madera y lastre; será como en el aumento de la eslora (§.557) de 10763. El producto de la altura del metacentro sobre el centro de volúmen, por el mismo volúmen, es (§.153) en este caso, como los cubos de las mangas, ó como 1000 á 1331, y el aumento como 1000 á 331: luego el producto 503125 aumentará ahora de 166534: á que, añadiendo el de 10763, y el 399219, es la suma de 566753. Tanto este, como el 399219, se deben partir ahora, el primero por 1331, y el segundo por 1000, en que se hallan los cubos de las mangas, ó los momentos de los aparejos: hecho, resulta el aguante del Navío sin el aumento de la manga, al mismo despues de aumentada, como 399219 á 433145; ó el aumento de esta proxîmamente de $\frac{17}{200}$.

562. Puedese, sin aumentarle al Navío la manga principal, ó su mayor ancho en la Quaderna maestra, aumentarle todas las demas anchuras de las demas Quadernas. En este caso, respecto que los Marineros arreglan el aparejo por la primera, no se altera este, y sin embargo la estabilidad aumenta de mucho. Si supusieramos, por exemplo, que se le hubiesen dado al Navío tales anchuras, que resultare la mitad de aumento que en el caso precedente, ó la mitad de la diferencia de 566753 á 399219; esto es, 167534, sería proxîmamente el primer aguante ó estabilidad, á la segunda, como 5 con 7, y el aumento de $\frac{2}{5}$: cantidad dupla de la mayor que antes hallamos.

563 Con esto se vé lo mucho que importa para lograr una buena estabilidad, que el Navío esté sufi-

cien-

cientemente ancho en sus cabezas ó extremos: en el §.393 hicimos manifiesto tambien, que si el buque se compusiera de dos prismas triangulares, padecería mas de quatro veces mas inclinacion que otro hecho en paralelepípedo rectángulo, siendo sin embargo ambos del mismo largo, ancho y volúmen; cuya grandisima diferencia solo resulta de los mayores anchos que el paralelepípedo tiene en sus extremos.

564 Ultimamente, en la estabilidad ó aguante de Vela, es muy digno de atencion el caso, en que siendo el viento fuerte, el Navio toma por la *Lua*: en el §. 390 diximos y demostramos, que si aquel corriese 60 pies por segundo, puede inclinarse el buque de 35 grados, y llegar el agua un pie mas abaxo que el canto baxo de las portas altas: este accidente es menester, pues, precaverle mucho, porque á corto esfuerzo de un golpe de Mar, podria suceder la desgracia mayor que padece la Marinería.

CAPITULO 4.

Del andar y rumbo que siguen las Naves.

565 EL andar ó movimiento progresivo de las Naves, que exâminamos por extenso (*Lib.* 4.*Cap.*1.) lo consideramos compuesto de dos acciones, una directa, ó segun la Quilla, y otra lateral, ó perpendicular á la misma. Estas, y la compuesta de ambas, las distinguimos por velocidades directa, lateral y obliqua: á la que añadimos otra, que es aquella con que la Nave sale ó gana á barlovento, cuyo conocimiento no es menos esencial que el de las otras tres. De estas solo calculamos la primera, porque conocida facilmente se infieren las otras dos. La fórmula que la de-

determina (§.343) es demasiado complicada para darla á entender con la facilidad que se requiere, y por tanto nos hemos reducido á explicarla por una construccion Geométrica, como se sigue.

566 Represente QA la Quilla de la Embarcacion, VE la Verga, VIE la Vela, y JC la direccion del viento. Desde los extremos V y E de la Vela tírense á esta las dos tangentes VB, EB, y divídase el ángulo VBE en dos partes iguales con la BD. Tírese una linea qualquiera FO, perpendicular á la Quilla QA, y córtense en ella las partes GO, GH en la razon de las cantidades constantes, que multiplicadas por las velocidades correspondientes lateral y directa, dan las resistencias asimismo lateral y directa: cantidades que por cálculo se hallaron en el *Cap.5. del Lib.2*, y que para el Navío de 60 Cañones fueron (§. 187) 3316, y 294: y asi, para este Navío será GO á GH, como 3316 á 294; y lo mismo para qualquiera otro que le sea semejante. Desde el punto H báxese á la BD la perpendicular HK, que cortará la Quilla en M. Tírese la OML, y perpendicular á esta la CLF, que será el rumbo que seguirá la Nave. Lam.9. Fig.51.

567 Para hallar su velocidad fórmense sobre GO y GH los dos triángulos rectángulos GNO, GPH; de suerte, que GN sea paralela á KH: y prolongada VE, tómese CR, igual á GN, y báxense las perpendiculares RS, RT. Colóquese TX igual á GP, y hágase GU tal, que sea á GO como una veintésima parte de los pies quadrados de velámen que se largaren (§. 280) disminuida en la razon del arco al seno de la mitad del ángulo ZBE á la cantidad constante que para el Navío de 60 se dixo era de 3316: tírese UH, fórmese en O el ángulo GOW igual á GUH, y por último póngase XY igual á GW, que dará YR á RS, como la velocidad del viento, á la velocidad directa del Navío. De esta suerte, si tirada la YS se coloca Y*a* igual á los pies

que ande el viento por segundo, tirada la *ab* paralela á RS, *ab* serán los pies que el Navío andará por segundo directamente, ó segun la CQ: cortando, pues, *Cd* igual á *ab*, y levantada la perpendicular *de*, *Ce* será la velocidad oblíqua, y *de* la lateral del Navío.

568 Desde el punto C levántese *Cf* perpendicular á la direccion del viento JC: báxese sobre aquella la perpendicular *ef*, y será *fe* lo que el Navío salga ó gane á barlovento.

569 Esta construccion puede servir tambien para considerar las ventajas que pueden resultar variando qualesquiera de las cantidades, líneas, ó ángulos de que depende. Si las dos líneas YR, RS no variasen, como á primera vista parece que no debieran variar, no variando la cantidad y disposicion del aparejo, las velocidades del Navío fueran como las del viento; pero aumentando este, aumenta tambien la mayor curvidad de la Vela en sotavento, respecto á la de barlovento; y por tanto cae mas á sotavento la direccion DB: aumenta el ángulo QDB, y con él su igual NGO; lo que disminuye GN, y su igual CR: y aunque por esta disminucion no varía la razon de SR á RX, porque ambas disminuyen asimismo proporcionalmente; sin embargo la XY queda constante, y por consiguiente debe ser menor la razon de SR á RY, en que deben estar las velocidades de la Nave y del viento. Esta diferencia puede disminuirse cuidando de minorar quanto sea posible, la curvatura de la Vela, que depende mucho de su calidad y tirantéz.

570 Si aumenta la cantidad del velámen, aumenta GU en la propia razon, y disminuye GW, ó su igual XY en la inversa con que debe aumentar la razon de SR á RY, ó de las velocidades de la Nave y del viento; pero como queda RS constante, serán las velocidades de la Nave en razon inversa de las RY. Si suponemos v.g. que las tres líneas SR, RX y XY, son co-

como 3, 5 y 4, en que están próximamente yendo á bolina con todo el aparejo largo, disminuyendo XY de $\frac{1}{8}$ que equivale al aumento de velámen de los dos Juanetes, quedará XY como $\frac{7}{2}$, y el primer andar al segundo como 8 $\frac{1}{2}$ con 9, ó 17 á 18: de suerte, que por cada 17 millas aumentará una mas, añadiendo $\frac{1}{8}$ mas de velámen.

571 La variacion del ángulo que forma la Verga con la Quilla, es lo que mas sensible hace la de la velocidad de la Nave. En el *Cap.2. del Lib.4.* se trató latamente este asunto, y se demostró las ventajas con que pueden disponerse los aparejos que lleguen al extremo de poder andar las Embarcaciones mas que el viento. En efecto, si en lugar de disponer el aparejo ó formar el ángulo QCE de 40°, como lo disponen los Fig.53. Marineros en el caso de bolina, se formase de solo 28° Fig.54. á 29°, bien se vé que siguiendo las reglas, es en la segunda disposicion mayor SR, y menor RY: con que tambien ha de ser mucho mayor la velocidad de la Nave, respecto á la del viento. Por igual razon parece que debiera seguirse, que si aun disminuyera mas aquel ángulo, mas andaria la Embarcacion; pero no es asi: este aumento tiene un límite ó máximo, y pasando de él se disminuye el andar; pues es claro, que si la DB llega á ser perpendicular á la Quilla QA, coincidirá GN con la misma Quilla, y aun se desvanecerá cayendo el punto N sobre G, y lo mismo R sobre C, lo que hace SR igual á cero; pero aunque tambien lo sea RX, la XY queda constante, y la relacion de SR á RY, ú de la velocidad de la Nave á la del viento es infinitamente chica.

572 Este máximo se halló en el caso de bolina con todo el aparejo para el Navío de 60 Cañones (§. 364) siendo QCE de 28° 47′: y se dixo, que no podia conseguirse á causa de que la Obencadura y Estay no permiten que sea de mucho menos que los 40 grados.

En Embarcaciones de Vela latina puede desde luego formarse; y á viento largo es evidente, que del mismo modo lo admiten los Navíos: en el supuesto que ábra el viento por la Popa de 46 grados, hallamos con
Fig. 55. 17680 pies de velámen (§. 363) que debe ser QCE de 50° 11′, quando los Marineros lo forman de 70°: de que resultó, que la mejor disposicion dió la velocidad del Navío, respecto á la que resulta, segun la práctica de los Marineros, como 71 con 64: casi $\frac{1}{8}$ mayor.

573 Esta disposicion ventajosa de ángulos no es sin embargo constante, como han creido hasta ahora los Geómetras, depende de la cantidad de velámen que se largue; pues en el mismo §. 363 vimos que en el propio caso de viento largo, y navegando el Navío con solo las mayores, ó 5200 pies de velámen, debe ser dicho ángulo de 56° 21′, en lugar de 50° 11′: y á bolina (§. 364) de 40° 42′, proxîmamente como lo estilan los Marineros: de suerte, que *quanto mayor sea la cantidad de Vela que se largue, menor debe ser el ángulo que forme la Verga con la Quilla.*

574 Depende tambien dicho ángulo de la relacion entre GO y GH (§. 361): de suerte, que *quanto menor fuere* GH, *respecto de* GO, *menor debe ser tambien el ángulo: y así, quanto mas fina fuere la Embarcacion, ó menor fuere la relacion entre las cantidades constantes, que multiplicadas por las velocidades directa y lateral, producen las resistencias, tanto menor debe ser tambien el ángulo.* Las Vergas de un Xabeque deben por consiguiente formar menor ángulo que las de un Navío: y las de una Galera ó Gelota menor que las del Xabeque.

575 Igualmente debe disminuir el ángulo (§. 361) disminuyendo la diferencia entre los ángulos QCE, y el complemento de BDQ, que resulta de la mayor ó menor curvidad de la Vela: de suerte, que *quanto menos curva sea esta en sotavento, respecto á la curvi-*

dad

dad de barlovento, menor debe ser el ángulo: y asi debe depender del mismo modo este, de la calidad y tension de la Vela. Todas estas atenciones dificultan que pueda darse una solucion facil para la práctica: lo mas corto será seguir el cálculo, como se vió en los Párrafos desde 360 hasta 364.

576 Tambien es menester que atendamos en el andar á la fabrica del Navío: esto es, á la razon en que se hallan la GO y GH, que es en la que están las cantidades constantes, que multiplicadas por las velocidades correspondientes, producen las resistencias lateral y directa. Supóngase que GH fuese menor; en este caso seria tambien menor el ángulo GUH, y su igual GOW: de suerte, que GW, ó su igual XY, fuera siempre como GH: por tanto, al paso que disminuya GH, respecto de GO, disminuirá tambien YR, respecto de RS; y por consiguiente la razon de SR á RY, en que estan las velocidades de la Embarcacion y viento, será mayor. Igualmente debe disminuir la XT, igual GP, con que por ambas razones será mayor la de SR á RY. Toda la TY es, pues, la que disminuye en la razon que disminuye GH, y quedando SR constante, serán las velocidades de las Embarcaciones en razon inversa de la RY, cantidades que dependen de la constante RT, y de las TY, que son como las GH. De esta suerte, si en el Navío de 60 Cañones, que hallamos GO á GH, como 3316 á 294, y en quien es proximamente RT, igual TY, aumentamos su eslora de $\frac{1}{10}$, será tambien, sin diferencia sensible, GH de $\frac{1}{10}$ menor: luego la primera velocidad será á la segunda, como 2 menos $\frac{1}{10}$ á 2, ó como 19 á 20: de suerte, que por cada 19 millas anduviera el Navío una mas. Si por el aumento de eslora, y por consiguiente de buque, se le quitase algun lastre para que no aguantara mas la Vela que lo que antes aguantaba, tambien disminuiria algo mas GH; pero de esta segunda opera-

ra-

racion resultara muy poca utilidad; respecto á haberse demostrado (§.356) que por estar el Navío 6 pulgadas mas ó menos calado en el fluido, solo resulta $\frac{1}{250}$ de diferencia en su velocidad, que equivale á $\frac{3}{1000}$ de milla por hora, cantidad despreciable, por cuyo motivo, y porque la falta de estabilidad puede ser perjudicial, se dixo que el Navío debe estar siempre sumergido todo lo preciso para obtener una regular estabilidad.

577 No solo varía el andar del Navío por alterar la razon de GO á GH, resulta tambien en parte por disminuir dichas cantidades, aunque queden en la misma razon: porque de esto no solo disminuyen todas las demas cantidades en la propia razon, sino que GW se altera en la duplicada, como se puede ver en el §. 357.

578 De la combinacion de las tres cantidades eslora, manga y puntal, se deduxo (§. 358) que, conservando al Navío el mismo buque, quanto mayor fuere la eslora y menores las otras dos dimensiones, mayor será la velocidad; pero si se conservare la misma eslora, y solo se aumentare una de aquellas dos dimensiones, disminuyendo á proporcion la otra, el buque de mayor manga y menos puntal, andará mas á vientos largos; y el de menos manga y mayor puntal, á vientos escasos: esto se entiende, supuesto que los aparejos sean siempre como las mangas: es theórica que la práctica ha acreditado muchas veces.

579 No menos ha manifestado esta lo demostrado en el §.359, deducido de las resistencias que padecen los buques, por causa de lo que se desnivela el fluido, (§.359) cuyo efecto es mayor á proporcion en los buques menores: de que resulta, que sin embargo de que los chicos debian ser mas veleros sin este accidente, al paso que crece ó aumenta la velocidad ú desnivelacion, lo son menos: y así, en Embarcaciones se-

semejantes é igualmente dispuestas, con viento corto andan mas las chicas, y con violento las grandes.

580 Ultimamente, el andar del Navío depende asimismo de la mayor ó menor curvidad que tenga la Vela en sotavento, respecto á la de barlovento; porque si fuese mayor, tambien lo será el ángulo BDQ, y su igual NGO: GN y su igual CR serán menores; y aunque RS y RX disminuirán en la misma razon, quedará constante XY, y por consiguiente la razon de SR á RY, ó de las velocidades de la Nave y el viento, será menor. De este principio parece que nace la diferencia que han observado los Marineros del mayor efecto que producen las Velas altas que las baxas: pues como aquellas no sirven sino con vientos suaves, sus curvidades son en estos casos menores, y por consiguiente mayores sus efectos; al contrario las Velas mayores ó baxas, expuestas con vientos violentisimos y curvidades grandes, no pueden corresponder á sus mismas acciones en tiempos suaves; pero en el mismo caso ó tiempo iguales Velas, del mismo modo dispuestas, producen iguales efectos; á menos que por su distinta calidad no resulten tambien distintas curvaturas.

581 Sin embargo de que con lo dicho quedan exâminadas todas las resultas que pueden ocurrir, por variar las distintas cantidades que conducen á la determinacion de la velocidad ó andar de la Nave, parece que no dexa de interesar al Marinero el saber con qué viento es su máximo andar: pues aunque la práctica ha manifestado que es el largo, se ha creido, y aun cree, que es por causa de que pueden servir mas Velas que navegando á Popa; no porque se crea que aun sirviendo las mismas Velas utilmente en uno y otro caso, suceda lo propio, como lo demostramos (§§. 365. 366). En estos párrafos concluimos una nueva fórmula para hallar el ángulo JCA con que andará el Navío lo Fig. 55.
mas

mas que es posible, que da la construccion siguiente.
Fig. 53. y 55. Sobre qualquiera triángulo rectángulo GNO tómese Hg, igual á WG mas GH, y de los puntos H y g tírense las Hh, gh paralelas á GN: descríbase el semicírculo hkO, y tirada hk, será ACJ igual hhk. El ángulo JCE, que debe formar la Verga VE, con la direccion JC, para que logre la Nave su máxîma velocidad, ha de ser recto.

582 Es, pues, esta direccion variable, aun en el mismo Navío, porque depende de WG, que es en razon inversa de la cantidad de velamen que se llevare largo. A medida que se aumente este, serán menores GW y Hg, y mayor el ángulo Ohk, ó su igual ACJ; al contrario, disminuyendo de Vela, aumentan GW y Hg, y disminuyen los ángulos, hasta que cayendo g sobre O, se desvanecen, y es el viento en Popa el mas ventajoso. Para el Navío de 60 Cañones hallamos (§. 367) que con 17680 pies quadrados de velamen, que son los unicos utiles á viento largo, ha de ser el ángulo ACJ de 41° 56′: y que llevando solos 8065 ya es este ángulo cero, ó el viento en Popa el mas ventajoso. En el §. 350 se dixo, que pueden ser utiles en este caso de navegar en Popa 12950 pies quadrados de velamen: si se quiere navegar con los mismos, por el ángulo mas ventajoso ACJ, se hallará este para el mismo Navío de 60 de 32°. Sin embargo, el aumento de velocidad que por él resultará será solo de $\frac{1}{71}$; pero si esta diferencia es tan corta en un Navío, no es lo mismo en Embarcacion mas fina como Galera ó Xabeque, porque en estas, en uno y otro caso, sirve la mayor parte de todo el velamen; y por ser este á proporcion en mas cantidad, abre asimismo mas el ángulo ACJ.

583 Tambien depende este ángulo de la relacion entre GO y GH, pues á medida que GH es menor, lo es tambien GW y Gg, y por consiguiente es mayor el ángulo Ohk, y su igual ACJ: y asi en un Xabeque el án-

ángulo ventajoso es mayor que en un Návío, y en una Galera mayor que en aquel. Para el Xabeque le hallamos (§.368) de $63° 19'$, y con él la velocidad del Xabeque á la del viento, como 163 á 100; esto es, la velocidad de aquel una vez, y cerca de dos tercios tanta como la del viento: de suerte, que si este corriese 15 pies por segundo, andaría el Xabeque $24\frac{45}{100}$, que equívalen á $14\frac{67}{100}$ millas por hora.

584 El andar ó salida de las Embarcaciones á barlovento, depende principalmente de la velocidad directa (§.355), y por consiguiente, de todas las circunstancias que promueven esta, como antes vimos; pero en los ángulos mas ventájosos que deben formar la Verga y el viento con la Quilla, cabe alguna diferencia, y á veces mucha, pues es menester atender tambien á la deriva, de que igualmente depende la salida á barlovento. En el §.371 dimos las fórmulas para determinar estos ángulos; pero resultan tan complicadas, que aun en el cálculo convino no reducirlas á una sola, como es regular. Solo la aplicamos á varios exemplos en el Navío de 60 Cañones de poco viento con mucha Vela: de poca Vela y mucho viento: como tambien de poca Vela y viento; pues en todos ellos se vió que varian los ángulos ventajosos con que el Navío ganara lo mas que es posible á barlovento. Con todo el velamen de 23050 pies quadrados, y poco viento, se halló que el ángulo que debe forma la Quilla con el viento es de 56 grados, y el que deben formar las Vergas con aquella de $30° 33'$. Estos mismos ángulos con solas las dos Mayores, ó 6130 pies de velamen, y mucho viento, deben ser de $84° 44'$ y $82° 14'$: con este mismo velamen y poco viento, de $66° 13'$, y de $47° 20'$; y como este caso se aproxîma tanto á lo que generalmente estilan los Marineros, se evidencia lo que se apartan en los demás del beneficio que la Geometria nos ofrece.

585 De este principio se sigue, que al paso que aumente el viento y disminuya la Vela, deben aumentarse uno y otro ángulo: el que forme el viento con la Quilla, desde 56 grados hasta 84° 44'; y el que forme esta con las Vergas, desde 30° 33' hasta 82° 14', tomando un medio en los demás casos, tambien medios; ó ocurriendo á las fórmulas, si se quisiere mayor exâctitud, particularmente si fuere mui diverso el Navío para quien se hiciere el cálculo, lo que varía mucho los valores. Si se aplica el cálculo á la fórmula (§. 360) se halla, que el ángulo que deben formar las Vergas con la Quilla, para que el Navío ande lo mas que es posible, dado el de viento y Quilla de 56 grados, es de 26° 55'; por consiguiente el ángulo que hace ganar barlovento lo mas que es posible, no es el que hace andar mas: las distintas fórmulas que los determinan lo demuestran, y en este caso, que es el menos sensible de diferencia, se halla esta de 3° 38'.

586 En el §. 376 vimos últimamente que usando de los ángulos ventajosos, con toda Vela y poco viento, es el barlovento que se ganara al que se gana, segun el uso comun de los Marineros, como 164 á 125; proxîmamente una tercera parte mas: lo que demuestra la necesidad de no despreciar esta ventaja tan considerable. Es verdad que en los Navíos se dificulta que puedan formarse los ángulos tan agudos en caso de mucha Vela; pero en las latinas ninguna dificultad hay: y si en aquellos se quieren usar trozas, y el partido de afloxar los obenques proeles, lo que ningun riesgo tiene con poco viento, que es precisamente el caso de la necesidad, se pueden llevar las Vergas mayores muy proxîmas á la formacion de los ángulos que se requieren: en las otras Vergas no hay dificultad.

587 A mas de estas principales atenciones, es preciso que tenga presente el Marinero la de llevar el

Ti-

Timon, en quanto sea posible, siempre paralelo al camino que haga la Nave; pues de lo contrario será una rémora que le quite muchisimo su andar.

CAPITULO 5.

Del govierno del Navío.

588 ENtre las varias causas que concurren al govierno del Navío, es una la accion del Timon, que vulgarmente se cree única. En el *Cap. 2. del Lib. 3.* dimos la theórica de este instrumento, y concluimos con alguna diferencia á lo resuelto hasta ahora por los Geómetras, por causa de habérnos fundado sobre diversos principios. En el §. 290 quedó determinada la fórmula de la fuerza que hace el Timon en direccion perpendicular á la Quilla, que es la que solamente conduce al govierno, y por ella se vió, que *quanto mayor fuese la velocidad del Navío, mayor el area del Timon, y menor el lanzamento del Codaste, mayor será aquella fuerza*; aunque con la advertencia de que á iguales ángulos del mismo Timon por uno y otro lado, *siempre es la fuerza para arribar mayor que la fuerza para orzar*: son determinaciones que ya habian anticipado los Geómetras; pero no es lo propio en quanto al ángulo ventajoso que debe formar el Timon con la Quilla, para conseguir la máxima fuerza, porque aquellos lo concluyeron de $54^\circ\ 44'$; quando en el §.293 lo hemos hallado de 45° en el caso de ser nula la deriva: ó de 45°, menos la deriva en caso de arribar; y de 45°, mas la deriva en caso de orzar: es asunto ya demostrado en dicho Capítulo, al qual debemos remitirnos. Sin embargo, en el §. 296 expusimos, que de ningun modo conviene formar dichos

ángulos, no solo por la poca necesidad que de ellos hay, ó poca ventaja que llevan á los que los Marineros practican, sino tambien por los inconvenientes que resultaran acortando la caña del Timon: lo que fuera preciso executar para conseguirlo.

589 Tambien hicimos ver (§.298) quanto importa, para ganar fuerza en el Timon, el que se aproxîme este, quanto sea posible, á la figura de un triángulo, tal como lo practican los Marineros: es circunstancia, que hasta ahora tampoco se habia notado, y es bien particular que una práctica sin luces haya llegado al verdadero conocimiento con tanta anticipacion á la theórica.

590 A la fuerza del Timon es preciso que acompañe su distancia horizontal hasta el centro de gravedad del Navío, sobre el qual gira este, como manifiestan las fórmulas del §. 297, porque es el momento de quien depende la accion: y así, quanto mas distare el Timon del centro de gravedad, mayor será la accion con que actuará; pero como en esta distancia y cuerpo del Navío concurren las resistencias de las aguas en el costado, y demas fuerzas que actuan, es preciso, para llegar á un perfecto conocimiento del govierno, atender al concurso de todas ellas.

591 Estas fuerzas, á mas de las del Timon, que no deben emplearse sino en la absoluta necesidad, se reducen (§.400) por lo ordinario á dos, la fuerza de la corriente de las aguas en el costado del Navío, y la de las Velas. Aquella se descompone en la que se hace directa ó paralelamente á la Quilla, y en la que actua perpendicularmente por el costado de sotavento; pero como la primera de estas actua igualmente en uno y otro lado del buque, no conduce al govierno, y solo queda la segunda, cuyo centro hallamos que dista hacia Popa del centro de gravedad del Navío de 60 Cañones (§.223) de $11\frac{1}{2}$ pies. La fuerza de las Velas

se descompone del mismo modo en la direćta y lateral, ó perpendicular á la Quilla, ambas opuestas á la de la corriente: las dos direćtas se equilibran perfectamente luego que el Navío toma su andar; pero las dos laterales no pueden equilibrarse si ambas no concurren en el mismo punto; y como son iguales, la que mas dista del centro de gravedad del Navío, vence á la otra, y obliga al buque á girar. De esta suerte, siendo EAF el buque, reunidas las fuerzas de las aguas en A, y dirigiendose segun IG, representará DG la fuerza direćta de ellas, y HG la lateral ó perpendicular á la Quilla: si las fuerzas de las Velas se reunieran asimismo en G, las direćtas, ó segun GD, equilibraran á las de las aguas, y lo mismo las laterales segun GH; pero si al contrario las fuerzas de las Velas se reunieren mas á Proa, como en L, siendo C el centro de gravedad del Navío, arribará este, porque las fuerzas de las aguas en G, y segun HG, tendrán mas momento que las de las Velas en L: y así, *para que el govierno sea perfećto, ó el Navío quede constantemente dirigido al propio rumbo, es preciso que las fuerzas de las Velas se reunan sobre un punto de la* GI, *y se dirixan segun esta misma linea.* Fig. 48.

592 Ha habido Geómetras que por este motivo encargaron, que (*a*) el punto G es el propio y ventajoso para la colocacion del Palo, siendo solo uno, ó el de la fuerza reunida de todos, siendo varios: persuadidos á que dicho punto de reunion no varía como no varien las Velas su disposicion y colocacion; pero no es menester, para persuadirse de lo contrario, y llegar al conocimiento del hecho, sino releer el *Cap. 4. del Lib. 4*, desde el §. 397 hasta el 404, donde sin cálculo alguno se explica por extenso el todo. Allí vimos, que sien-

(*a*) *Juan Bernoulli*, *Nueva Theórica de la maniobra de los Navíos*, Cap. 12. §§. 1. 2. 3.
Mr. Bouguer, *Traité du Navire*, Lib. 3. Sec. 3. Cap. 1. pag. 473.

siendo B el punto donde se reunen las fuerzas de las Velas estando el Navío derecho, y las Velas planas, por motivo de la curvidad de estas, se transfiere á D; y que por la inclinacion que padece el buque, pasa asimismo de D á K: de suerte, que por estas dos causas se muda del punto B al K; y así, *para que se verifique el buen govierno, ha de caer este punto* K *sobre el* I, *ó el* L *sobre* G: *si* L *está mas á Proa que* G, *el Navío arriba, y si está mas á Popa, orza.* Pero como aquellas translaciones dependen de la curvidad de la Vela, y de la inclinacion del Navío, y estas de la mayor ó menor violencia del viento, tambien depende el govierno de esta violencia, sin embargo que quede constante el punto B: y así, *aumentando el viento, es la translacion mayor, y el Navío orza*; y al contrario, *disminuyendo arriba*: es lo que los Marineros saben muy bien con sola la experiencia. No solo se experimenta la variedad en la translacion por motivo del aumento ú disminucion del viento, qualquiera ola de proporcionado tamaño hace inclinar al Navío en el balance mas de lo regular, y por consiguiente se apartan mas de B los dos puntos K y L, y es preciso que el Navío orce; al contrario, quando regresa ó se restituye del mismo balance, arriba: y como las olas son continuadas, continuados han de ser tambien estos movimientos de orzar y arribar, y continuado el reparo que con el Timon se debe procurar; y así, por mas que las Velas, y aun el viento no se alteren, el govierno no puede dexar de variar, y necesitarse un continuado movimiento en el Timon, con mucho cuidado, y mas experiencia, que es la maestra en este asunto.

593 Diximos que la translacion del punto B al K depende de la mayor ó menor curvidad de la Vela, y de la inclinacion del Navío, y como de mayor amplitud en las Velas, resulta mayor curvidad en ellas, *quanto mayor fuere la amplitud, ó quanto mas largas fue-*

fueren las Vergas, mas propenso será el Navío á orzar.

594 Igualmente la mayor altura del centro comun de todas las Velas, y menor cantidad de lastre, obligan al Navío á inclinarse mas: con que *quanto mayor fuere la Guinda ó altura de los Palos, y menos lastre se pusiere, mas propenso será tambien el Navío á orzar.* De estos dos principios resulta, que *quanto mayores fueren en general las Velas de un Navío, mas propenso será á orzar.*

595 *Manteniendo las Velas de una misma magnitud, y variando solamente sus dimensiones, será corta la variacion que habrá en el govierno*, porque si se aumenta la guinda, y á proporcion se disminuye el cruzamen, lo que aquella obliga á orzar, obliga á arribar este, y se compensan uno á otro sensiblemente.

596 Todas estas variaciones dependen de solo la accidental translacion del punto B al K ó I; pero en qualquiera punto de la EF que se halle colocado el B, que es donde se reune la fuerza de todas las Velas, ó centro de ellas, estando el Navío derecho, se efectuará la misma translacion: y por consiguiente, quanto mas á Popa estubiere dicho punto ó centro, mas propenso será el Navío á orzar; lo que saben muy bien los Marineros. La colocacion de este punto depende de la distribucion que se hubiere dado á los Palos, y de la magnitud de las Velas que cada uno de ellos tubiere; como asimismo de las que se largaren ó quitaren: y así, en esta distribucion y combinacion de partes, es menester proceder de forma que le quede lugar al Marinero para que atrasando ó adelantando el punto B por medio de variar las Velas, se mantenga constante, y proximamente el punto K sobre el I, y esto en quantos casos sean dables de llevar poca ó mucha Vela, de haber mas ó menos viento, y de necesitarse orzar mucho ó poco.

597 Ha de resultar, pues, esto de los valores que pu-

pudieren tener DB, BC, CG, GD y DI. Para el Navío de 60 Cañones, navegando con todo el aparejo, es (§§. 276. 419) DB $= 13\frac{84}{100}$ pies, y BC (§. 285) $= 12$: luego caerá D entre C y G, y será DC $= 1\frac{84}{100}$ pies, que substraídos de GC (§. 223) $= 11\frac{1}{2}$, queda GD $= 9\frac{66}{100}$. Como el ángulo DIG se halló para este propio caso, iendo de bolina, (§. 276) de 31 á 32 grados, es proxîmamente su tangente de $\frac{62}{100}$: y siendo DG á DI como la misma tangente al radio, segun los mismos principios de Trigonometría, tendremos DI, partiendo DG por $\frac{62}{100}$; por lo que será DI proxîmamente de $15\frac{3}{5}$ pies: de esta suerte, para que se verifique el buen govierno en este caso, ó que no sea necesario que actue el Timon, es preciso que sea DK de $15\frac{3}{5}$ pies, ó que la fuerza del viento sea tal que haga inclinar al Navío hasta llevar el punto K $15\frac{3}{5}$ pies apartado de D. Pero este mismo punto K se eleva (§. 282) sobre el centro de gravedad de $70\frac{1}{2}$ pies: con que habrá de ser la

Fig. 49. inclinacion DCK de $\frac{15\frac{3}{5}}{70\frac{1}{2}}$, ó el ángulo DCK proxîmamente de $12\frac{1}{2}$ grados. En el §. 419 hallamos que esto se verifica corriendo el viento $18\frac{1}{2}$ pies por segundo. Si aumentare, el Navío orzará, y será preciso que el Timon acuda al remedio; y si disminuyere arribará, y se necesitará del propio auxilio.

598 Navegando con las Mayores, Gabias tomados todos los rizos, Mesana y Contrafoque es (§. 420)

Fig. 48. BC $= 11$, y BD $= 17\frac{58}{100}$: lo que da GD $= 4\frac{92}{100}$: y siendo el ángulo DIG de 40° menos 21° que (§. 352) resultan de la curvidad de las Velas, es DIG de 19°, cuya tangente es de $\frac{344}{1000}$; por consiguiente DI es proxîmamente de $14\frac{1}{5}$ pies, cuya magnitud habia de tener DK para que se verifique el buen govierno. La altura del centro de gravedad de las Velas sobre el del Navío es en este caso (§. 228) de $56\frac{1}{2}$ pies: con que la

inclinacion del Navio, habra de ser de $\frac{14\frac{1}{3}}{56\frac{1}{2}}$, para que se verifique el buen govierno, ó proxîmamente de 14° 14'. En el §.420 hallamos que esto se verifica corriendo el viento cerca de 29 pies por segundo.

599 Quedando el Navío con solo las dos Mayores es (§.421) BC $=$ 16 $\frac{15}{100}$, BD como antes de 17 $\frac{58}{100}$: lo que da GD de 10 $\frac{7}{100}$ pies, y DI, baxo el mismo supuesto de ser el ángulo DIG de 19°, de 29 $\frac{1}{3}$ pies; cantidad exorbitante á que jamas llegará á apartarse el punto K: lo que prueba que con este aparejo jamás llegará á orzar el Navío por sí: en efecto vimos en el §. 421 que para poderse verificar habia de correr el viento 240 pies por segundo, velocidad que no puede efectuarse sin la ruina de las Velas, ú de los Palos y Vergas. Cazando la Mesana vimos en el propio §. 421 que el punto D caerá á Popa del centro de gravedad del Navío C, con que en este caso orzará continuamente, lo que pudiera equilibrarse con el Contrafoque.

600 Quedando con solo la Mayor cae (§.422) el punto B 12 $\frac{71}{100}$ pies á Popa del centro C, y el D 17 $\frac{58}{100}$, asimismo á Popa de B; luego caerá D 30 $\frac{29}{100}$ pies á Popa del centro C de gravedad: de los quales quitando 11 $\frac{1}{2}$ que el punto G dista de C, quedaran 18 $\frac{79}{100}$ que D caerá á Popa de G; por tanto, el Navío tenderá á orzar con muchisima fuerza, cuya propiedad se hace esencialisima en este caso, porque las olas que chocan en la Proa obligan á arribar mucho.

601 En todos estos casos se ve que el Navío puede tender por sí á arribar y orzar, segun la velocidad del viento: falta solo saber si el Timon es capaz de corregir estas diferencias. El caso en que cabe la mayor duda es el primero, porque en él puede ser la velocidad del viento muy corta, y por consiguiente serlo tambien DK; pero en el §. 423 se resolvió esta duda

haciendo ver que la fuerza del Timon es mas que suficiente para ello, particularmente si el viento fuese suficiente para hacer sensible la curvidad de las Velas.

602 Los casos de ir en Popa y viento largo, quedan igualmente satisfechos en los §§.424. 425. y 426, en que se dice: que la fuerza del Timon es excesiva, respecto á las demas; y por tanto, que muy poca obliquidad en el Timon basta para obligarle á girar, y es de lo que depende la gran delicadeza del govierno en estos casos, particularmente á Popa.

603 La colocacion de los Palos, y disposicion de las Velas en el Navío de 60, que nos dió con todas ellas CB de 12 pies, es por consiguiente muy buena; pero esta cantidad ha de depender, como hemos visto de la CG, distancia desde el centro de las resistencias laterales, al de gravedad del Navío. Quanto menor sea CG, menos fuerza tendrá aquel para arribar, y por necesidad mayor debe ser CB, de cuya longitud depende tambien la misma accion: por consiguiente, la GB se ha de mantener constante, ó siempre la misma: y como hallamos CG de $11\frac{1}{2}$ pies, debe ser en el Navío de 60 Cañones constantemente GB de $23\frac{1}{2}$ pies, ó la distancia desde el centro del velamen al de las resistencias laterales: y asi á proporcion en los demas Navíos.

604 La colocacion del centro de las resistencias G, no solo depende de la figura del cuerpo del Navío, sino tambien de la relacion ó magnitud de los lanzamentos de Proa y Popa, como se puede ver en el *Cap.* 7. *Lib.* 2: de suerte, que quanto menor fuere el lanzamento de Proa, respecto al de Popa, mas á Proa estará el punto G, y mas propenso será el Navío á orzar, si no se cuida de pasar hacia Proa de igual cantidad el punto B, ó centro del velamen. (*a*) El

(*a*) En el Departamento de Brest se fabricaron, por el Constructor Mr.

605 El punto G varia sobrecargando el Navío, porque el centro de las resistencias laterales de la parte del costado, que de nuevo sumerge en el fluido, está mas á Proa que el punto G: y por consiguiente, el nuevo centro que resultará debe estar tambien mas á Proa que dicho punto. De esto se sigue que el Navío sobrecargado debe ser propenso á orzar quando el centro de gravedad no hubiere baxado, y por ello fuere el buque mas estable. Si al contrario el centro de gravedad hubiere subido, ó lo que es lo mismo, si la sobrecarga estubiere algo sobre bocas, el Navío será propenso á orzar por dos motivos; uno porque el punto G habrá pasado mas á Proa, y otro por la menos estabilidad que resultará.

606. Varía asimismo el punto G, variando la inclinacion del Navío con respecto á su longitud, ó lo que es lo mismo, variando la inclinacion de la Quilla con respecto al horizonte: pues (§.224) diximos que los $11\frac{1}{2}$ pies, distancia desde G á C, resultan supuesto el Navío 2 pies mas calado de Popa que de Proa; y que supuesta la Quilla horizontal solo fuera CG de $9\frac{1}{2}$ pies. El Navío menos calado de Popa, será por consiguiente mas propenso á orzar. La práctica tiene manifestado á los Marineros esto mismo, y se valen de este arbitrio para corregir los defectos en que incurren algunos Constructores, de proporcionar mal los lanzamientos, ó la distancia CB desde el centro del velamen al de gravedad del Navío.

607. Para proceder con acierto en este punto, se tendrá presente que, segun lo expuesto (§.276), iendo con todo el aparejo á bolina, y con viento de 18 á 20 pies por segundo de velocidad, es el ángulo DIG de 31 á 32 grados, y su tangente de $\frac{62}{100}$, por lo que

ha

Mr. Olivier, Navíos sin lanzamento á Proa, con el fin de hacerlos mas bolineros; pero la experiencia manifestó despues el defecto grande, que por nuestra theórica se hace evidente.

ha de ser DG de $\frac{62}{100}$ de DI : y siendo asimismo DG igual GB menos BD , igual (§.276) $\frac{173}{1000}$ de la anchura de las Velas á la altura de su centro de gravedad , será GB igual $\frac{62}{100}$ DI, con mas $\frac{173}{1000}$ de la anchura de las Velas á la altura de su centro de gravedad : por lo que se podrá tomar sin error sensible GB de $\frac{2}{3}$ de la inclinacion DI que el Navío puede tomar en semejante caso, con mas $\frac{1}{6}$ de la anchura de las Velas á la altura de su centro de gravedad. Para el Navío de 60 Cañones se halló la primera cantidad DI (§.597) de 15 $\frac{3}{5}$ pies, cuyos $\frac{2}{3}$ son 10 $\frac{2}{5}$: y la segunda (§.419) de 80 pies , cuyo $\frac{1}{6}$ es 13 $\frac{1}{3}$, que añadido á los 10 $\frac{2}{5}$ hacen 23 $\frac{11}{15}$ pies , valor de GB. El punto C, centro de gravedad del Navío, se halla como se enseñó en el *Cap.* 2. del *Lib.* 2. §.140 : y la distancia CG , segun se expuso en el *Cap.* 7. *Lib.* 2.

608 Todo esto, sin embargo, es solo haber determinado las distancias respectivas, que deben tener entre sí las Velas ; no el lugar que deben ocupar los Palos. Para esto es preciso situar primero el Palo mayor: y respecto que se hace necesario que el Navío orce mucho con sola la Vela mayor , se podrá colocar éste Palo en el centro G de las resistencias laterales , ó proxîmamente á él : pues en tal caso, como la curvidad que la Vela tome , atrasará su centro de fuerzas de (§. 422) 17 $\frac{58}{100}$ pies , el Navío orzará con el momento, producto de 17 $\frac{58}{100}$ por la fuerza que haga la misma Vela. Este momento parecerá un poco excesivo , porque el Navío de 60 Cañones tenia colocado el Palo 4 pies mas á Proa que dicho centro G; pero á mas de que otros Navíos solo le tienen 1 $\frac{1}{2}$, asimismo mas á Proa , se puede considerar que lo mas distante que estén los dos Palos Mayor y Trinquete , es siempre lo mejor para que las Velas del primero no tapen el viento á las del segundo ; de cuya ventaja ningun perjuicio se sigue , manteniendo GB del valor determinado.

Co-

Colocado el Palo mayor, se pondrá el Trinquete lo mas á Proa que posible sea: y la Mesana se adelantará ó atrasará lo necesario para que quede GB como se previno.

CAPITULO 6.

Del Balance y Cabezada.

609 ENtre las theóricas que resultan de los movimientos del Navío, es de las mas intrincadas la del Balance y Cabezada, como puede verse en el *Capit.* 5. del *Lib.* 4, donde se trató por extenso. Por este motivo los mas célebres Autores (*a*) no supusieron el Balance sino como la mera accion del Navío que resultara de inclinarle un poco, manteniendose la superficie del agua siempre horizontal; en cuyo caso, bien se ve que el Balance ninguna dependencia tubiera de la ola, que es sin embargo quien la causa, y quien puede asimismo aumentarle y disminuirle. Aquella suposicion facilitaba el cálculo, y el no haber previsto los errores á que conducia, obligó á seguirle sin variar de suposicion. La conseqüencia que de ella resulta es, que el Navío procediera como si fuese un péndulo de determinada longitud: siendo sus balances isochronos con los del péndulo, ó durando cada uno de ellos lo mismo que tardare el péndulo en hacer una oscilacion: y como esta ninguna dependencia tiene con el tiempo que emplee la ola en pasar por debaxo del Navío, se sigue, que aunque fuese aquella grande ó chica, siempre sería el balance de la mis-

(*a*) *Leonardo Eulero, Ciencia Naval*, Tom. 1. Cap. 4. Prop. 48. *Mr. Bouguer, Tratado del Navío*, Lib. 2. Sec. 3.

misma duracion, lo que se hace evidentemente falso, porque el Navío debe regresar de la inclinacion que tome obligado de la ola, luego que esta le falte, ó se aparte de él: y como esto se efectúa en diversos tiempos, segun el tamaño de las olas que corren con distintas velocidades, es preciso que tambien los balances se cumplan en diversos tiempos.

610 No obstante, pasada ya la ola, deben resultar otros balances procedentes de la inclinacion ya tomada del Navío, y fueron sin duda de los que quisieron los Autores citados darnos la theórica; pero estos, ya por la resistencia de las aguas, y ya por la del viento en las Velas, son muchisimo menores, y á proporcion sus efectos: de suerte, que son los primeros los unicos que debemos considerar para precaber los desastres que de ellos, y con demasiada repeticion, suceden.

611 A mas de esto, se persuadieron igualmente los mismos Autores, á que en el balance no habia que considerar sino el tiempo en que se cumplian, respecto á que habian de resultar mas suaves, quanto mas tiempo empleasen los Navíos en ellos: y aunque esto sea efectivamente así siendo los balances constantemente de la misma magnitud; ya no es lo propio variando esta: si el tiempo de un balance fuere duplo de otro, basta que sea tambien de dupla magnitud para que las velocidades en uno y otro sean iguales, y para que los efectos en el grande sean mucho mas temibles que en el chico. La principal atencion en el balance es el momento de inercia que comunica á las arboladuras y partes del buque: á proporcion de aquel estan expuestas estas á romperse, y lo mismo la curberia, y otras piezas del buque.

612 En el *Cap.*5. del *Lib.*4. que dimos con toda extension la theórica de esta accion, distinguimos dos especies de balances, que deben especularse en el

Na-

Navío, de los quales resulta el legitimo ó verdadero. El primero es el que por sí solo diera sin ola, procedente de alguna inclinacion que preceda; y el segundo el que diera por sola la accion de la ola, y sin atencion á las alteraciones que deben resultar por los momentos con que actuan los varios pesos de que se compone el cuerpo del buque. El tiempo en que deben efectuarse la primer especie de balances, es (§. 434) en razon directa subduplicada de los momentos con que actuen todas las partes del Navío, y en inversa asimismo subduplicada del peso de todo el buque, y de la distancia desde su centro de gravedad al metacentro. Es lo mismo que concluyeron los Autores citados: y como los momentos son mayores, y en duplicada razon al paso que los pesos distan mas del exe sobre que gira el buque, ó efectua su balance, es conseqüente que los tiempos deben ser como las distancias de los pesos al exe: motivo porque encargaron se separaran, lo mas que fuere posible, del exe los varios pesos, pues de ello debian resultar los balances de mayor duracion: y á su inteligencia de mayor suavidad.

613 El tiempo en que debe efectuarse la segunda especie de balance, que procede de solo la ola, se resolvió en el §. 449: y en el 450 dimos una Tabla del tiempo en que los cumple el Navío de 60 Cañones de nuestro exemplo, en que puede verse, que estos tiempos son grandes quando las olas son chicas: que disminuyen hasta cierto termino aumentando las olas, y que despues de este vuelven á aumentar: de suerte, que á la ola de $\frac{1}{4}$ de pie de alto corresponde un balance de 5 segundos, á la de 4 pies de alto $2\frac{64}{100}$ de segundo, y á la de 64 pies $6\frac{32}{100}$ de segundo de tiempo.

614 Ni estos tiempos, ni aquellos son como hemos dicho los verdaderos en que los Navíos dan sus balances: los legitimos toman un medio entre unos

y

y otros, segun se expuso (§.453), y su verdadero valor se dió en el §.457. Segun la fórmula que en el mismo
Lam. 9. mo párrafo se deduxo, si AB es igual al tiempo en que
Fig. 56. diera el Navío el balance por sí solo, y la perpendicular AC el tiempo en que lo diera por solo causa de la ola, tirada la perpendicular AD á la hypothenusa BC, y la AF igual y perpendicular á AD, DF será igual al verdadero tiempo en que el Navío dará el balance. De esta suerte, el tiempo AB en que el Navío de 60 diera su balance por sí solo, se halló (§.434) de $2\frac{4}{5}$ segundos, y el AC que diera por solo causa de una ola de 64 pies de alto, ó de una Mar de leva equivalente, de $6\frac{1}{5}$ segundos: si por estos datos se dispone el cálculo, se halla DF, ó el tiempo verdadero en que el Navío diera el balance con dicha ola de $3\frac{3}{5}$ segundos.

615 Con esta construccion se evidencia, que si aumenta AB, tambien aumenta DF, y por consiguiente, quanto mayor fuere el tiempo en que el Navío dé el balance por sí solo, tanto mayor será tambien el tiempo del verdadero balance. Pero considérese que segun la fórmula (§.459) la magnitud del balance será como el quadrado de CB: de suerte, que quanto mayor fuere AB, tanto mayor será el balance: y así, si el efecto de este aumento fuese de mayor consideracion que el que puede resultar por el aumento del tiempo, de ninguna manera conviene que este se solicite.

616 Para inquirir, segun esto, qual sea el balance menos perjudicial, es menester recurrir á la accion que puede producir en los Palos, que son los mas expuestos. Dos son los casos distintos que se ofrecen: uno, quando varía el tiempo AB en que el Navío dé el balance por sí solo, á causa de haber variado sus momentos de inercia, ó haber separado mas del exe de rotacion los varios pesos ó carga: y otro, quando va-

varíe el mismo tiempo AB por haber variado la distancia desde el centro de gravedad al metacentro.

617 Para el primer caso la fórmula dada (§. 461) nos enseña, que los momentos ó accion que padecen los Palos es en razon inversa de DE perpendicular á AC: de suerte, que quanto mayor pueda ser DE, tanto menor será la accion que padezcan los Palos; y como el ángulo ADC ha de ser recto, y por consiguiente debe hallarse siempre D sobre la semicircunferencia ADC, la mayor DE será el radio ó media AC, en cuyo caso AB igual AC: esto es, *para que los Palos padezcan lo menos que sea posible, el tiempo* AB *en que el Navío dé por sí solo el balance, ha de ser igual al tiempo* AC *en que debiera darle por solo causa de la ola.* En este caso será tambien DF igual AC; con que *el verdadero tiempo en que el Navío ha de dar el balance, para que los Palos padezcan lo menos que sea posible, ha de ser asimismo igual á aquel en que lo diera por solo causa de la ola.*

618 Ha sido, pues, grave error, sin mayor exâmen, querer dilatar el tiempo del balance por medio de separar del exe de rotacion los varios pesos ó carga del Navío: esto ha de tener por límite el tiempo en que solo por causa de la ola se diera: todo lo que sea pasar de este termino será perjudicialísimo, y mucho mas si se considera que en los grandes balances no solo actuan los momentos de inercia que padecen las arboladuras, sino el peso de ellas, que crece á medida que las inclinaciones son mayores: de suerte, que para el verdadero acierto aun es menester fixar el tiempo del balance algo menor que el del límite asignado. En los §§.458. y 459 vimos que, separando los pesos en el Navío de 60 en la razon de 15 á 21, ó de 5 con 7, aumentó el tiempo del balance en la de 6 con 7, y la magnitud de él en la de 949 á 1258, ó proxîmamente en la de 3 con 4; razon excesivamente mayor. Si para

 los

los mismos casos se inquieren las acciones que padecen los Palos con la ola de 9 pies de alto, y que por ella balanceará el Navío en $3''$, se hallan

Balanceando el Navío por sí solo en	Razon de la accion de los Palos.
$2''\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2,2320}$
3	$\frac{1}{2,2500}$
$3\frac{2538}{10000}$	$\frac{1}{2,2352}$

Donde se ve que la accion, balanceando el Navío por sí solo en el mismo tiempo que balanceara por solo causa de la ola, es menor que las otras dos acciones, ya sea balanceando por sí en menos ó en mas tiempo; pero con la diferencia de que esta última es la peor, pues, como diximos antes, se agrega á ella el mayor peso con que por la mayor inclinacion se exercita sobre los Palos: razon por la qual aun la primera accion se hace preferente á la segunda: de suerte, que puede asegurarse que para las olas de 9 pies de alto, no podia estar la estiba del Navío mejor dispuesta.

619 Habiendo de ser el tiempo en que por sí solo haya de dar el Navío el balance, siempre igual al que diera por solo causa de la ola, y cada una de estas produciendolo distinto, distinto ó variable debiera ser aquel para que en los Palos se exerciera la menor accion posible; ó lo que es lo mismo, para lograr esta ventaja se debiera mudar la carga para cada ola: lo que en la práctica fuera muy expuesto, y de un trabajo insoportable. Esto sería sin embargo lo mas ventajoso; pero como los efectos de las olas pequeñas son de poca consideracion ó perjuicio al Navío, debemos atenernos á las que ya pueden ser perjudiciales, como

las de 9 á 36, ó 40 pies de alto, en que por solo causa de ellas diera el Navío el balance (§.450) entre 3 y 5 segundos, tomando un medio 4 segundos, puesto que no podemos variar el tiempo segun la ventaja que se ha visto. En el §. 463 vimos que para lograrla en este caso debieramos separar los pesos en la razon de 15 á 22, ó fuera de lo que la manga del Navío permite; pero haciendo memoria de lo que expusimos (§.618) sobre lo que contribuye al perjuicio de la arboladura su propio peso en los grandes balances, concluiremos, que los de $3\frac{1}{2}$ segundos serán los mas propios, no solo para el Navío de 60, sino para todos en general, puesto que para todos son las olas las mismas. En Navíos pequeños será esto irreconciliable; pero en ellos se procurará separar la carga con atencion á lo que mas adelante se dirá.

620. El segundo caso en que varía el tiempo en que diera el Navío el balance por sí solo, á causa de haber variado la distancia desde su centro de gravedad al metacentro, se expuso en el §. 464, donde se demostró que á medida que aumente esta distancia, aumenta tambien la accion de los Palos, y que por consiguiente lo menor que pueda establecerse aquella, será lo mas ventajoso para el efecto. Pero á mas del perjuicio que en los Palos resulta del balance, tenemos que atender á otro no menos esencial, que es la inundacion de las aguas, ó lo que los golpes de mar, por elevarse demasiado, suelen pasar por encima del Buque: defecto que hasta ahora no se ha tratado en theórica, ni que quizás se habrá creido que tenga correspondencia con el balance. Sin embargo, en el §.465 demostramos, que las elevaciones de las aguas en el costado son como los quadrados de los tiempos en que se cumplen los balances, ó como el quadrado de AD ó DF: motivo el mas esencial para que tampoco se aumente mucho AB, como hasta ahora se nos

ha encargado. En el mismo párrafo se determinó la verdadera altura á que debe elevarse la ola en el costado: y en el §. 466 se aplicó la fórmula á algunos exemplos del Navío de 60: en el primero, en que se supone en su regular estiba, se halla que con ola de 36 pies de alto se elevara el agua en el costado de 12 $\frac{1}{2}$ pies: en el segundo, en que se supone que los pesos se separaran del exe de rotacion en la razon de 15 á 21, se halla que se elevaran de 18 $\frac{1}{3}$ pies; y en el tercero, que se supone que la distancia desde el centro de gravedad al metacentro, se disminuye en la razon de 9 $\frac{1}{8}$ á 6, se halla que se elevaran de 16 pies; ó lo que es lo mismo (§.458) en el primer caso que hiciera el Navío su balance en 2 $\frac{6}{7}$ segundos, se elevaria el agua en el costado de 12 $\frac{1}{2}$ pies: en el segundo, que diera el balance en 3 $\frac{1}{3}$ segundos, se elevaría el agua de 18 $\frac{1}{3}$ pies; y en el tercero, en que diera el balance en 3 $\frac{18}{100}$ segundos, se elevaria de 16 pies.

621 Pero estas elevaciones no son aun las legítimas ó reales, pues en el cálculo no se habia atendido aún á la desnivelacion, ó mayor altura que resulta por la velocidad con que las mismas olas chocan el costado; ni á la disminucion que pór chocarle obliquamente debe asimismo resultar. Atendiendo á estas circunstancias, se halló en el §.467, que las verdaderas elevaciones serán en el primer caso de 15 $\frac{1}{2}$ pies: en el segundo, de 21 $\frac{1}{3}$; y en el tercero, de 19. Como el costado del Navío no tiene sino de 16 á 17 pies de alto, se sigue, que solo en el primer caso no le pasará el agua por encima; en el segundo y tercero sobrepujarán á lo menos de 2 y 4 $\frac{1}{3}$ pies. De esto se infiere, que ni aun al tiempo de los 3 $\frac{1}{2}$ segundos que (§.619) hallamos conveniente se fixase el balance que por sí solo habia de dar el Navío, para que los Palos estubiesen menos arriesgados, debemos tampoco estendernos si hemos de evitar que las Mares no aneguen el buque.

En

622 En las Embarcaciones menores es preciso precaverse aun mas de este accidente; pues en el §. *469* demostramos que en ellas son las elevaciones de las aguas mayores á proporcion: y asi necesitan que los tiempos en que den sus balances por sí solas, sean aún en menor razon que la directa de sus mangas, é inversa de las distancias desde el exe de rotacion al metacentro: esto es, en las Embarcaciones chicas, los varios pesos de la carga deben estar á proporcion mas próxîmos al exe que en los Navíos; mayormente quando en ellas es á proporcion mayor la distancia desde el exe al metacentro. En el mismo §. *469* se dió por exemplo una Fragata en todo semejante al Navío, cuyas medidas fuesen de la mitad de las de este: y se halló, que en la Fragata se elevaran las aguas de $10\frac{67}{119}$ pies; quando en el Navío solo se elevarian de $12\frac{1}{2}$: de suerte, que en aquella pasaran las aguas de 2 pies por encima; quando no alcanzarian á la borda del otro ni con 4 pies mas. Para la Fragata de 22 Cañones, con $31\frac{2}{3}$ pies de manga hallamos (§.471) que con la ola de 36 pies de alto se elevaran las aguas de 14, quando ella no tenia de alto en su medio sino 11; y se advirtió, que si esta padeciera semejantes inundaciones, ¿qué sucederá en otras que con menos ventajas, y solo por la idea de sacarlas mas andadoras fabrican algunos Constructores modernos con solos *9* ó *9*$\frac{1}{2}$ pies de alto? En un temporal, y particularmente con Mares y vientos de traviesa, la propiedad de que mas necesita el Navío es la del aguante, pues de esta depende el poderse libertar.

623 En el §. *469*, que puede leerse, diximos el gran perjuicio que puede resultar de los terceros balances, quando concurra en ellos el efecto de nueva ola: para este accidente no hay precaucion que no deba tomarse, porque corre manifiesto riesgo el Navío de desarbolar: por fortuna se verá rara vez.

La

624 La cabezada tiene los mismos principios theóricos que el balance, según se dixo (§. 473). La diferencia que en ella resulta depende solo de la velocidad respectiva con que las olas chocan el buque. En el balance supusimos la velocidad lateral del Navío cero, porque efectivamente es tan corta, que se hace despreciable: en la cabezada, quando la ola viene sobre la Proa, la velocidad con que la choca es la suma de la del Navío, y de la que tubiere la misma ola; y quando esta viene por la Popa siguiendo al Navío, es la diferencia de las mismas velocidades. De esto se infiere claramente, que no solo debe ser menor el tiempo en que se efectúe la cabezada á medida que dicha velocidad respectiva sea mayor; sino tambien, que han de ser mayores las elevaciones del agua en el costado.

625 En el §. 473 dimos la verdadera medida del tiempo en que el Navío debe dar la cabezada; y se dixo, que debe ser menor, al paso que fuese menor el tiempo en que la diera por solo causa de la ola; pero este es menor (§. 476) quanto mayor sea la velocidad del Navío, supuesto que la ola choque la Proa: luego *quanto mayor sea esta velocidad del Navío, menor será el tiempo en que el Navío dará la cabezada.* Al contrario si la ola chocare la Popa, pues en tal caso la velocidad respectiva es menor que la de la misma ola. En el §. 473 se halló el tiempo en que el Navío de 60 diera la cabezada por sí solo de $2'' \frac{76}{100}$: y en el §. 475 aquel en que la diera por solo causa de una ola de 9 pies de alto navegando á bolina con 10 pies de velocidad por segundo, y es de $1'' \frac{59}{100}$: de lo qual inferimos (§. 476) que el verdadero tiempo en que el Navio daria la cabezada fuera de $1'' \frac{89}{100}$.

626 La magnitud de la cabezada se halló §. 477, donde se vé, que *á medida que mayor sea el tiempo en que el Navío dé la cabezada por sí solo, mayor será esta;*

y

y al contrario, que *será menor, quanto mayor sea el tiempo en que la diera por solo causa de la ola*; pero este (§.475) es mayor, quanto menor fuese la velocidad del Navío: luego *quanto menor sea esta, menor será tambien la cabezada*. De este, y del párrafo precedente se infiere quanto importa el moderar la velocidad del Navío para precaber los efectos de la cabezada: pues no solo se consigue con ellos el que sean menores, sino tambien menos violentas.

627 En el §. 479 dimos la accion que padecen los Palos, y que dimana de la misma cabezada, donde diximos, que la mínima resulta, quando son iguales el tiempo en que el Navío diera la cabezada por sí solo, y aquel en que la diera por solo causa de la ola: y como el primer tiempo (§.473) se halla mayor que el segundo (§.475), se sigue la necesidad de reducir aquel, aproximando lo mas que fuere posible la carga al centro del Navío: ó como dicen los Marineros, aliviandole en las cabezas. Puedese tambien disminuir la accion de los Palos, segun vimos en dicho párrafo, disminuyendo la distancia desde el centro de gravedad del Navío al metacentro; pero esto fuera sumamente perjudicial, como se verá despues, quando se trate de la elevacion de las aguas en la Proa. Ultimamente en el §.480 se demostró, que la accion de los Palos será en razon directa duplicada de la longitud de los Navíos: por cuyo motivo es menester proceder con mas miramiento en la determinacion de esta medida, no deduciendola unicamente por solo la ansia de aumentar las velocidades ó el andar, como hacen algunos Constructores, y han pretendido hasta ahora los Geómetras: particularmente quando las Embarcaciones hubiesen de navegar por Mares muy tormentosos, como sucede á los Navios.

628 En el §. 481 determinamos la altura á que ascenderán las aguas en el costado: y se vió, que de-

dependía de dos cantidades, una en que no se incluye la desnivelacion de las aguas, y que solo procede de la altura de la ola, del mayor ó menor momento de inercia que padece el buque, y de la altura del metacentro sobre el centro de gravedad del Navío. Quanto mayores fueren las dos primeras cantidades, y menor la tercera, mayores serán las elevaciones de las aguas: y esto igualmente tanto en Proa como en Popa, respecto de no incluirse sus desnivelaciones ó resultas de las velocidades respectivas.

629 La otra cantidad depende absolutamente de estas, y es el quadrado de dos partes en que se divide, una que procede de la altura de la ola, y del coseno del ángulo con que choca la Proa ó Popa, y la otra que procede de la sola velocidad del Navío. El quadrado de la suma de ambas partes, debe ser añadido á la primera cantidad, para tener las elevaciones de las aguas en la Proa; y substraido, para obtener las de la Popa, quando la ola corra hacia atras huyendo de aquella. En el §.482 hallamos para el Navío de *60* Cañones, que siendo la altura de la ola de *9* pies, y navegando el Navío á bolina con la velocidad de 10 pies por segundo, es la primera cantidad de $5\frac{46}{100}$ pies, y la segunda de $3\frac{59}{100}$: por lo que la altura de las aguas en la Proa, fuera en este caso, de $9\frac{1}{20}$ pies; y en la Popa de $1\frac{87}{100}$ pies. Si la velocidad del Navío hubiese sido cero, como sucede quando está dado fondo, tambien fuera cero la segunda parte de la segunda cantidad: la elevacion en Proa quedaria de $5\frac{88}{100}$, y la de Popa de $5\frac{4}{100}$ pies.

630 Si la ola, en lugar de correr de Proa á Popa, corriese de Popa á Proa, chocando primero la Popa, y huyendo ó apartandose de la Proa; el quadrado de la diferencia de las dos partes en que se divide la segunda cantidad, es el que se ha de añadir á la primera, para tener la elevacion de las aguas en Popa: y subs-

substraerse, para obtener las de Proa. De esta suerte, en el caso y circunstancias precedentes, las elevaciones de las aguas en Popa fueran de 5 $\frac{82}{100}$ pies; y las de Proa de 5 $\frac{10}{100}$.

631 De esto se infiere la necesidad que hay de precaver con preferencia las elevaciones de las aguas en la Proa, por ser mucho mayores que en la Popa, siempre que el Navío anda. Se consigue regularmente, disminuyendo el mismo andar, ó acortando de Vela, al paso que las mares ú olas fueren mas crecidas: pues si en el mismo caso, dado en el párrafo precedente, suponemos la ola de 36 pies de alto, y la velocidad del Navío de 15 pies por segundo, hallarémos, como en el §. 483, que la elevacion de las aguas en la Proa debe ser de 20 $\frac{4}{15}$ pies, 3 pies mayor que toda la altura del Navío. Esto manifiesta, como diximos en el propio párrafo, la imposibilidad de llevar en todos tiempos toda la Vela fuera, como pretende un Geómetra. La práctica se lo ha evidenciado á los Marineros. Por lo que toca á la Popa, respecto á que es el quadrado de la diferencia de las dos partes el que se ha añadir, quanta mas Vela se largue, menor será la diferencia, y menores las elevaciones de las aguas en la Popa. De aqui es, que corriendo de arribada, se debe largar quanta Vela sea posible, si se quieren evitar los fracasos que ocasionan los mares en la Popa.

632 Puedense, y aun se deben precaver las elevaciones de las aguas en la Proa, por medio de disminuir la primera cantidad en las acciones de Proa, aunque aumenten para la Popa, pues con ello se corrige en parte la grande diferencia que resulta por la segunda cantidad, quadrado de la suma de ambas partes, en el primer caso, quando solo es el quadrado de la diferencia en el segundo. Por la fórmula dada (§. 481) se ve que esto se consigue aumentando la distancia desde el centro de gravedad del Navío al metacentro; todo al

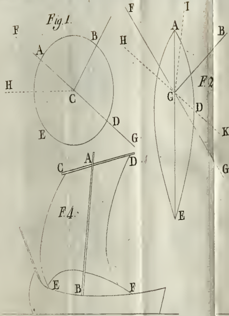
contrario de lo que convendria hacer para disminuir la accion de los Palos, segun diximos en el §. 627. Segun esto, es preciso aumentar dicha distancia para la accion de *arfar*, ó levantar el Navío la Proa, y disminuirla para quando levante la ola la Popa; pero esta aumentacion depende, como vimos *Cap.* 3. *Lib.* 2. de las mayores anchuras ó llenos de la Proa en las inmediaciones de la superficie del agua: luego para lograr este efecto, se hace necesario llenar la Proa en dicha superficie, y enflaquecer ó adelgazar la Popa. Si segun esta regla suponemos la primera cantidad (§. 629) $5\frac{46}{100}$, disminuida de $1\frac{1}{2}$ pies para la Proa, y aumentada de lo mismo para Popa, serán en tal caso las elevaciones de las aguas en Proa de $7\frac{55}{100}$ pies; y las de la Popa de $7\frac{33}{100}$: donde se vé que sin embargo de la gran diferencia que se supone entre los llenos de Proa y Popa, aun deben, en el caso supuesto, elevarse las aguas en Proa algo mas.

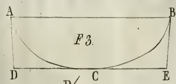
633 Con esto se evidencia la absoluta necesidad que hay de que la mitad de Proa de una Embarcacion sea mas llena que la otra mitad de Popa; pero con todo, es necesario proceder en esto con algun tiento, pues pudieramos caer en el vicio opuesto: porque si aquella diferencia de llenos se hace precisa en el caso de andar el Navio; en el del reposo, no solo no es necesaria, sino que resulta perjudicial: la altura de las aguas en este caso, y con las precedentes circunstancias, fuera en Popa de $7\frac{38}{100}$ pies; quando en Proa solo fuera de $4\frac{38}{100}$. Por este motivo están tan expuestas las Popas de los Navíos, quando hallandose combatidas de gruesas Mares de leva, es muy poco el viento para darle velocidad al Navío: y lo mismo quando estos se hallan anclados en uua Rada, y aproados á Mares muy gruesas. En ambos casos sería de desear, que el buque no fuese mas amplio en su mitad de Proa, que en la de Popa; pero no se puede conciliar

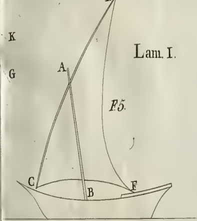
este

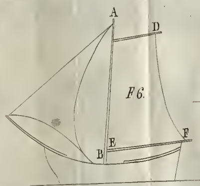
este beneficio con el que se lograra por dicha disposicion navegando, particularmente con grandes velocidades: por tanto, es preciso, como hemos dicho, que dicha diferencia de llenos se use con atencion á la especie de Embarcaciones, dandoselos mayores á las que hubieren de navegar Mares mas agitados.

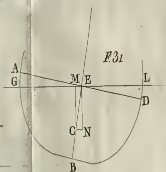
634 Ultimamente diremos de la cabezada lo que es preciso atender para suavizarla, y minorar la accion de los Palos, lo encargado en el §. 486 sobre la figura que deben tener las Quadernas de los extremos del Navío: pues siempre que tengan grandes cavidades, ó que sean muy delgadas en sus fondos, y de repente ensanchen en la superficie del agua, son fuertes los golpes que dan los extremos de las cabezas, quando caen sobre el agua; lo que, como diximos en el mismo párrafo, ocasiona grandes momentos de inercia en la Arboladura.

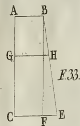

Fig. 1.
F
A
B
H
C
D
E
G
F. 2
F
I
A
B
H
G
D
K
G
E
F. 4.
C
A
D
E
B
F

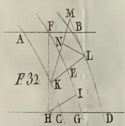

A
B
F. 3.
D
C
E

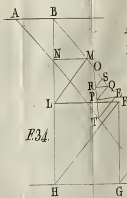

Lam. I.
D
A
F. 5.
C
B
F

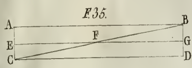

A
D
F. 6.
E
F
B

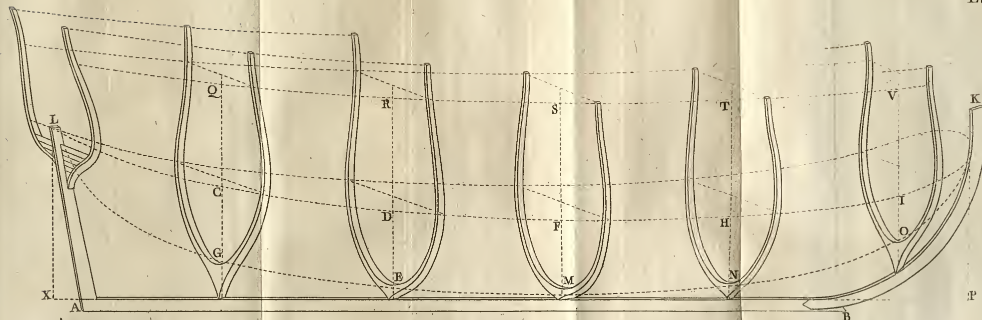

F. 31
A
G
M
E
L
D
C
N
B


A
B
G
H
F. 33.
C
F
E

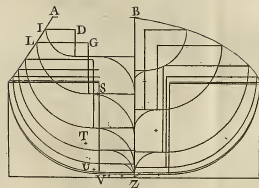

M
F
B
A
N
L
F. 32.
K
E
I
H
C
G
D


A
B
N
M
O
S
R
Q
P
E
F
L
T
F. 34.
I
H
G
C
K
D

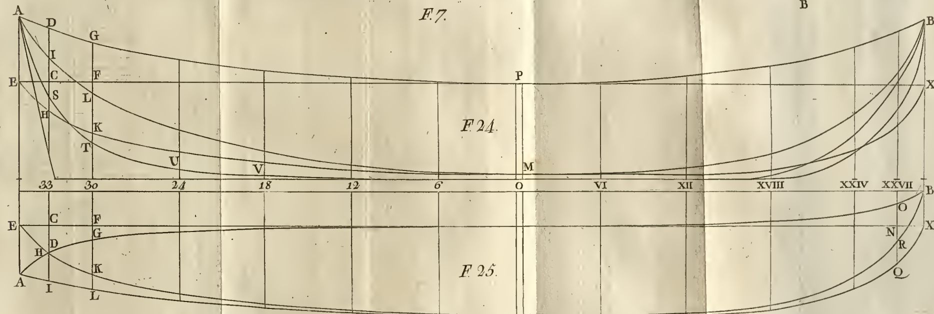

F. 35.
A
B
E
F
G
C
D



F. 7.

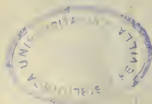


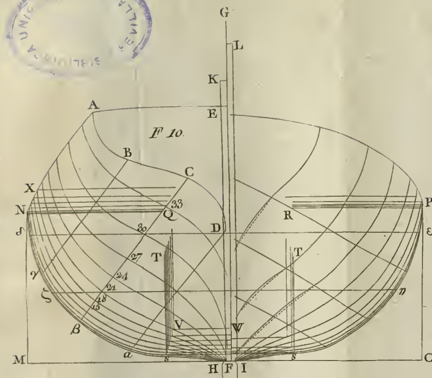
F. 26.

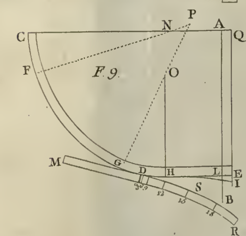


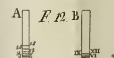
F. 24.

F. 25.









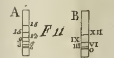


Fig. 8.

F. 13.

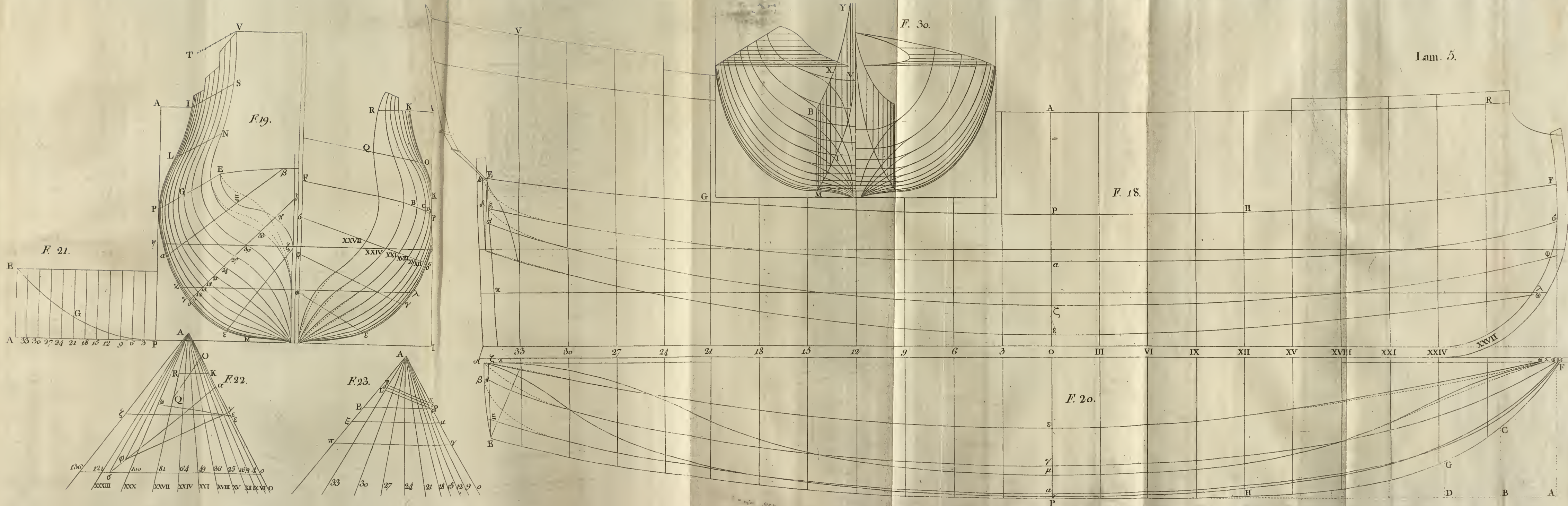
F. 15

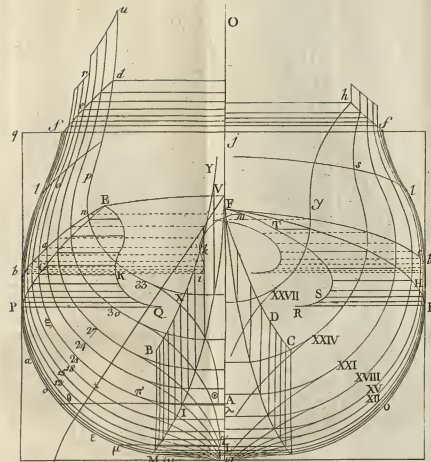
Fig. 14

33 30 27 24 21 18 15 12 9 6 3 O III VI IX XII XV XVIII XXI XXIV XXVII

F. 16

F. 17


Lam. 5.
F. 19.
F. 21.
F. 22.
F. 23.
F. 30.
F. 18.
F. 20.



F. 29.

F. 27.

F. 28.

Lam. 7.

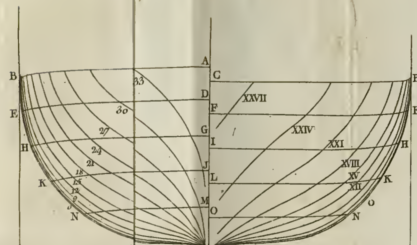
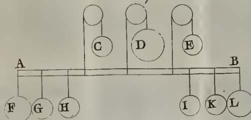
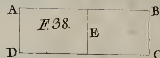
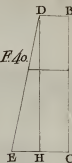
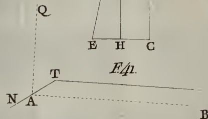



Fig.36.
A
9 6 3 o III VI IX
C
Y Z X
Q
S
M L K N O
H P T V R I
E D B F G

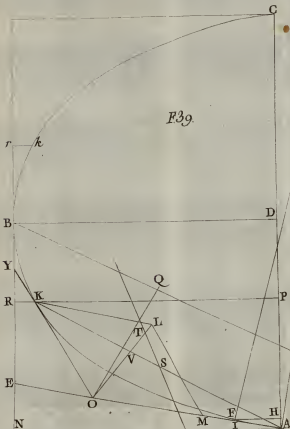

F. 37.
A B
C D E
F G H I K L

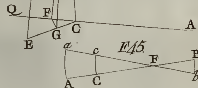

A B
F. 38.
E
D C


D B
F. 40.
E H C

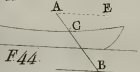

Q
T
F. 41.
N A
B

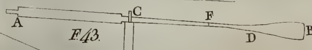
Lam. 8.


C
F. 39.
r k
B D
Y
Q
R K P
L
T
V S
E
O
F H
N M I A
X
G

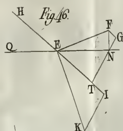

D B
F. 42.
Q F C A
E G

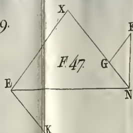
a c F. 45. B
F
A C b

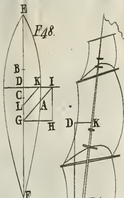

A E
G
F. 44.
B

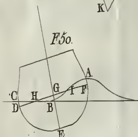

C
A F
B
F. 43. D

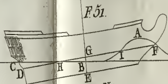
Lam. 9.

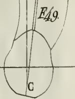

Fig. 46.
H
Q
E
F
G
N
T
I
K

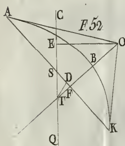

F. 47.
X
F
G
E
N
K

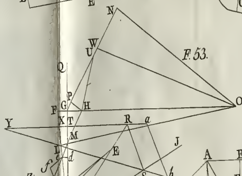

F. 48.
E
B
D
K
I
C
L
A
G
H
F

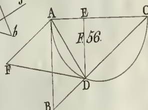

F. 50.
A
C
H
G
I
F
D
B
E

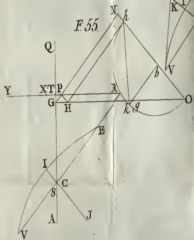

F. 51.
A
G
I
F
C
D
H
B
E

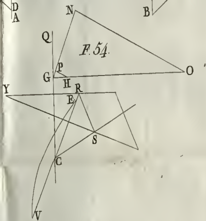

F. 49.
D
K
C


F. 52.
A
C
E
O
B
S
D
T
F
K
Q


F. 53.
N
W
U
Q
P
G
H
F
O
Y
X
T
R
a
M
L
E
J
d
S
b
Z
B
K
I
C
D
A
V


F. 56.
A
E
C
F
D
B


F. 55.
N
h
Q
b
V
Y
XT
P
R
G
H
k
g
O
E
I
C
S
A
J
V


F. 54.
N
Q
P
G
H
O
Y
R
E
S
C
V





EXAMEN MARITIM

T. II.